Rješenje nagradnog natječaja br. 232

Dokaži da za svaki pozitivan cijeli broj $n \geq 1$ jednadžba
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^{2^n}$$
ima cjelobrojno rješenje.

Rješenje. Za $n = 1$ jedno rješenje je $x_1 = 1$, $y_1 = z_1 = 2$. Pretpostavimo da za neki $n \geq 1$ postoji cjelobrojno rješenje x_n, y_n, z_n tj.
$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 3^{2^n}.$$
Stavimo li $x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 - z_n^2$, $y_{n+1} = 2y_nz_n$, $z_{n+1} = 2x_nz_n$, imamo:
$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 &= (x_n^2 + y_n^2 - z_n^2)^2 + 4y_n^2z_n^2 + 4x_n^2z_n^2 \\ &= (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^2 = (3^{2^n})^2 = 3^{2\cdot 2^n} = 3^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$
što znači da je to jedno traženo rješenje dane jednadžbe za $n+1$. Prema principu matematičke indukcije, postoji cjelobrojno rješenje za svako $n \geq 1$.

Knjigom *Međunarodne matematičke olimpijade* (priredio Željko Hanjš), Element, Zagreb nagrađen je *Filip Vučić* (2), I. gimnazija, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 1/281

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Borna Cesarec* (3), Srednja škola Krapina, Krapina, 3769, 3770; *Mario Dodig* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3763–3770, 3772, 3774–3776; *Faruk Sijerčić* (3), Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH, 3763, 3765, 3766, 3769; *Stella Tomac* (3), Opća gimnazija, SŠ Donji Miholjac, Donji Miholjac, 3763, 3769, 3774; *Filip Vučić* (2), I. gimnazija, Zagreb, 3763–3767, 3769, 3774.

b) Iz fizike: *Lana Bailo* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 474–477; *Luka Krašnjak* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 474–477; *Marin Lakoš* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 474–477; *Vito Martinović* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 474–477; *Filip Matić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 474–477; *Borna Cesarec* (3), Srednja škola Krapina, Krapina, 1735, 1738, 1739, 1741.

Nagradni natječaj br. 234

Odredi minimalnu vrijednost izraza
$$\sqrt{x^2 + (20-y)^2} + \sqrt{y^2 + (21-z)^2} + \sqrt{z^2 + (20-w)^2} + \sqrt{w^2 + (21-x)^2}.$$