Jedan teorem u vezi sa šiljastokutnim trokutom i njegova primjena

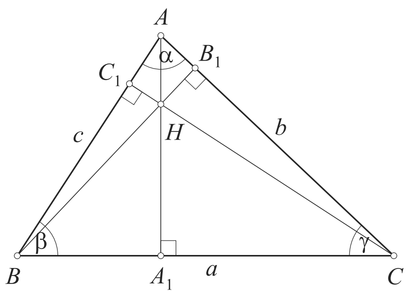
Šefket Arslanagić[1]

U ovom prilogu ćemo dokazati jednu zanimljivu tvrdnju koja vrijedi za šiljastokutni trokut te dati nekoliko primjera njezine primjene. Ona glasi:

U šiljastokutnom trokutu ABC čiji je ortocentar točka H, radijusi opisane i upisane mu kružnice R i r, vrijedi jednakost

$$|AH|+|BH|+|CH|=2(R+r). \tag{1}$$

Dokaz.



Slika 1.

Neka je trokut ABC šiljastokutan. Iz pravokutnog trokuta ACC_1 imamo

$$\cos\alpha=\frac{|AC_1|}{|AC|}=\frac{|AC_1|}{b},$$

a odavde zbog $b=2R\sin\beta$

$$\cos\alpha=\frac{|AC_1|}{2R\sin\beta}$$

ili

$$2R\cos\alpha=\frac{|AC_1|}{\sin\beta}. \tag{2}$$

U pravokutnom trokutu ABA_1 je $\sphericalangle BAA_1=90^\circ-\beta$, a kako je $\sphericalangle C_1AH=\sphericalangle BAA_1$, iz pravokutnog trokuta AC_1H dobivamo

$$\cos\sphericalangle C_1AH=\frac{|AC_1|}{|AH|},$$

odnosno

$$\cos(90^\circ-\beta)=\frac{|AC_1|}{|AH|},$$

a odavde

$$|AC_1|=|AH|\sin\beta. \tag{3}$$

Sada iz (2) i (3) slijedi:

$$|AH|=2R\cos\alpha. \tag{4}$$

Analogno dobivamo i sljedeće jednakosti

$$|BH|=2R\cos\beta, \tag{5}$$

i

$$|CH|=2R\cos\gamma. \tag{6}$$

Nakon zbrajanja jednakosti (4) – (6), dobivamo

$$|AH|+|BH|+|CH|=2R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma). \tag{7}$$

---

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Koristit ćemo dvije poznate trigonometrijske jednakosti

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \tag{8}$$

i

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}. \tag{9}$$

Sada iz (8) i (9) dobivamo jednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}. \tag{10}$$

Konačno iz (7) i (10) imamo

$$|AH| + |BH| + |CH| = 2(R + r),$$

a ovo je jednakost (1) koju je trebalo dokazati. □

Sada ćemo dati nekoliko posljedica ove jednakosti. Prvo ćemo dati dva zanimljiva dokaza poznate Eulerove nejednakosti

$$R \geqslant 2r. \tag{11}$$

Dokaz 1. Kako je $R = \dfrac{abc}{4P}$ i $r = \dfrac{P}{s}$, gdje je P površina trokuta ABC, a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg tog trokuta, imamo

$$\begin{aligned}
& R \geqslant 2r \\
\iff\ & \frac{abc}{4P} \geqslant 2\cdot\frac{P}{s} \\
\iff\ & abc \geqslant 8\cdot\frac{P^2}{s} \\
\iff\ & abc \geqslant 8\cdot\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \qquad \text{(Heronova formula)} \\
\iff\ & abc \geqslant 8\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} \\
\iff\ & abc \geqslant (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).
\end{aligned} \tag{12}$$

Da bismo dokazali nejednakost (12), uvest ćemo supstituciju $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, $(x, y, z > 0)$.

Sada iz nejednakosti (12) dobivamo njoj ekvivalentnu

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz. \tag{13}$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo redom sljedeće nejednakosti:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx},$$

čijim množenjem dobivamo (13).

Dokaz 2. Iskoristit ćemo poznatu nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja x_1, x_2, x_3:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}}$$

$$\iff (x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) \geqslant 9.$$

Uvedimo supstituciju $x_1 = r_a$, $x_2 = r_b$, $x_3 = r_c$, gdje su r_a, r_b, r_c radijusi pripisanih kružnica trokuta ABC. Iz gornje nejednakosti dobivamo

$$(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right) \geqslant 9. \tag{14}$$

Kako je $r_a = \dfrac{P}{s-a}$, $r_b = \dfrac{P}{s-b}$, $r_c = \dfrac{P}{s-c}$ i $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$, dobivamo jednakosti:

$$r_a+r_b+r_c = 4R+r, \tag{15}$$

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a = s^2, \tag{16}$$

$$r_ar_br_c = rs^2. \tag{17}$$

Sada iz (14) – (17) redom dobivamo

$$(4R+r)\frac{s^2}{rs^2} \geqslant 9 \iff R \geqslant 2r.$$

Očigledno vrijedi jednakost u (11) ako i samo ako je $a = b = c$ (ili $r_a = r_b = r_c$), tj. ako i samo ako je trokut jednakostranični.

Napomena 1. Više raznih dokaza (osim gornja dva) može se naći u [1] – [4].

Sada iz jednakosti (1) i nejednakosti (11) imamo ove dvije posljedice:

Posljedica 1.

$$|AH|+|BH|+|CH| \leqslant 3R. \tag{18}$$

Posljedica 2.

$$|AH|+|BH|+|CH| \geqslant 6r. \tag{19}$$

Jednakosti u (18) i (19) vrijede ako i samo ako je $R = 2r$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostranični.

Koristeći ove posljedice dokažimo još neke zanimljive nejednakosti:

a)
$$\frac{|AH|^2}{s-a}+\frac{|BH|^2}{s-b}+\frac{|CH|^2}{s-c} \geqslant \frac{36r^2}{s} \tag{20}$$

b)
$$\frac{|AH|^2}{a}+\frac{|BH|^2}{b}+\frac{|CH|^2}{c} \geqslant \frac{18r^2}{s} \tag{21}$$

c)
$$|AH|\operatorname{tg}\alpha+|BH|\operatorname{tg}\beta+|CH|\operatorname{tg}\gamma \leqslant 3R\sqrt{3}. \tag{22}$$

Dokaz. a) Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti imamo redom:

$$\begin{aligned}(|AH|+|BH|+|CH|)^2 &= \left(\frac{|AH|}{\sqrt{s-a}}\cdot\sqrt{s-a}+\frac{|BH|}{\sqrt{s-b}}\cdot\sqrt{s-b}+\frac{|CH|}{\sqrt{s-c}}\cdot\sqrt{s-c}\right)^2\\ &\leqslant \left(\frac{|AH|^2}{s-a}+\frac{|BH|^2}{s-b}+\frac{|CH|^2}{s-c}\right)[(s-a)+(s-b)+(a-c)],\end{aligned}$$

što je zbog (19) ekvivalentno s (20).

b) Kao pod a) imamo:

$$
\begin{aligned}
(|AH|+|BH|+|CH|)^2 &= \left(\frac{|AH|}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{|BH|}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{|CH|}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}\right)^2\\
&\leqslant \left(\frac{|AH|^2}{a}+\frac{|BH|^2}{b}+\frac{|CH|^2}{c}\right)[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2],
\end{aligned}
$$

što je zbog (19) ekvivalentno s (21).

c) Iz (4) slijedi

$$|AH|\operatorname{tg}\alpha = 2R\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = 2R\sin\alpha = a.$$

Analogno je

$$|BH|\operatorname{tg}\beta = b, \qquad |CH|\operatorname{tg}\gamma = c.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti imamo

$$|AH|\operatorname{tg}\alpha + |BH|\operatorname{tg}\beta + |CH|\operatorname{tg}\gamma = 2s. \tag{23}$$

Kako je

$$2s = 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) \leqslant 3R\sqrt{3}$$

(vidi npr. [4]), dobivamo traženu nejednakost.

U sva tri slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostranični.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 6*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2014.

[4] A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb 2007.

⋆ ⋆ ⋆