Više dokaza jedne geometrijske tvrdnje

Šefket Arslanagić[1]*, Alija Muminagić*

Korisnije je riješiti jedan isti zadatak na nekoliko različitih načina nego riješiti nekoliko zadataka – svaki na samo jedan način.

Ako se jedan isti zadatak riješi na razne načine, može se uspoređivanjem rješenja utvrditi koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Na taj način se stiče i izgrađuje vještina rješavanja zadataka.

W. W. Sawyer, Prelude to Mathematics

U ovom članku ćemo dati više dokaza jedne geometrijske tvrdnje o konveksnom četverokutu. Za to ćemo koristiti više važnih teorema iz planimetrije i trigonometrije te vektorski račun. Dokažimo sljedeću tvrdnju.

Ako su u konveksnom četverokutu $ABCD$ zbrojevi kvadrata duljina dviju nasuprotnih stranica jednaki, tj.

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2,$$

onda su dijagonale tog četverokuta međusobno okomite, tj. $AC \perp BD$.

Za rješenja ovog zadatka koristit ćemo sljedeću lemu.

Lema. *Ako su a, b, c duljiine stranica trokuta ABC, onda vrijedi:*

a) $a^2 = b^2 + c^2 \implies \triangle ABC$ *je pravokutan;*

b) $a^2 < b^2 + c^2 \implies \triangle ABC$ *je šiljastokutan;*

c) $a^2 > b^2 + c^2 \implies \triangle ABC$ *je tupoktan.*

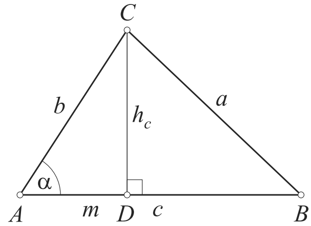
Dokaz 1. Promatrat ćemo sljedeća dva slučaja: 1. $\triangle ABC$ je šiljastokutan i 2. $\triangle ABC$ je tupokutan.

1. Neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$, a $h_c = |CD|$ je visina trokuta iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ tog trokuta i $m = |AD|$, $|BD| = c - m$ (slika 1). Iz Pitagorinog poučka za $\triangle BCD$ imamo $a^2 = h_c^2 + (c-m)^2$, a iz $\triangle ACD$: $h_c^2 = b^2 - m^2$, pa je

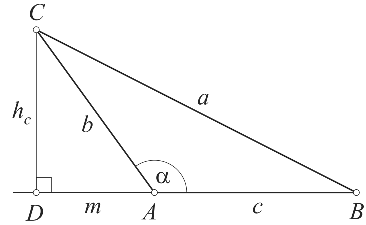
$$a^2 = b^2 - m^2 + (c-m)^2$$

ili

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \tag{1}$$



Slika 1.



Slika 2.

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

2. Iz Pitagorinog poučka za $\triangle BCD$ (slika 2) imamo

$$a^2 = h_c^2 + (c+m)^2,$$

a iz $\triangle ACD$:

$$h_c^2 = b^2 - m^2,$$

pa je

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c+m)^2$$

ili

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \tag{2}$$

Jednakosti (1) i (2) su u planimetriji poznate kao Carnotov teorem[3].

Sada iz (1) slijedi $a^2 < b^2 + c^2$, za šiljastokutan $\triangle ABC$, a iz (2) $a^2 > b^2 + c^2$ za tupokutan $\triangle ABC$.

Za pravokutan $\triangle ABC$, tj. $\alpha = 90^\circ$ je $m = 0$ pa iz (1) i (2) slijedi $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitagorin poučak), gdje je a hipotenuza, a b i c njegove katete.

Dokaz 2. Koristit ćemo kosinusov poučak za $\triangle ABC$, tj.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{3}$$

Ako je α šiljasti kut, tada je $-2bc\cos\alpha < 0$, pa iz (3) slijedi

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha < b^2 + c^2,$$

odnosno

$$a^2 < b^2 + c^2.$$

Ako je α tupi kut, tada je $-2bc\cos\alpha > 0$, pa iz (3) slijedi

$$b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha > b^2 + c^2,$$

odnosno

$$a^2 > b^2 + c^2.$$

Ako je α pravi kut, tada je $\cos\alpha = 0$, te $-2ab\cos\alpha = 0$, pa iz (3) slijedi

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

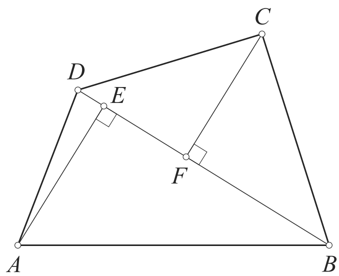
Sada ćemo prikazati nekoliko različitih dokaza dane tvrdnje na početku.

Dokaz 1. Primjenjujući danu lemu, tj. jednakosti (1) i (2) na $\triangle BDC$ i $\triangle ABD$ (slika 3), redom dobivamo:

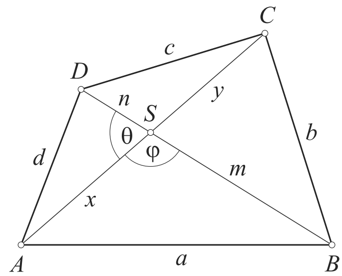
$$\begin{aligned}|BC|^2 + |AD|^2 &= (|CD|^2 + |BD|^2 - 2|BD|\cdot|DF|) + (|BD|^2 + |AB|^2 - 2|BD|\cdot|BE|)\\ &= |CD|^2 + |AB|^2 + 2|BD|(|BD| - |DF| - |BE|)\\ &= |CD|^2 + |AB|^2 - 2|BD|\cdot|EF|,\end{aligned}$$

a odavde zbog $|BC|^2 + |AD|^2 = |AB|^2 + |CD|^2$, imamo $2|BD|\cdot|EF| = 0$, odnosno zbog $|BD| > 0$, $|EF| = 0$, tj. $E \equiv F$, što znači da je $AC \perp BD$.

[3] Carnot Lazare Nicolas (1753. – 1823.), francuski matematičar.



Slika 3.



Slika 4.

Dokaz 2. Ovdje ćemo koristiti indirektan dokaz. Pretpostavimo da dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$ nisu okomite. U tom slučaju je jedan od kutova kojeg zatvaraju te dijagonale tupi, a drugi šiljasti (slika 4).

Neka je točka S presječna točka njegovih dijagonala i neka je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD = \varphi$ tupi kut. Tada je $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = \theta$ šiljasti kut.

Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$, $|AS| = x$, $|BS| = m$, $|CS| = y$ i $|DS| = n$. Pošto su trokuti ABS i CDS tupokutni, a trokuti ADS i BCS šiljastokutni, iz leme imamo

$$a^2 > m^2 + x^2 \qquad \text{i} \qquad c^2 > n^2 + y^2,$$

odnosno

$$b^2 < m^2 + y^2 \qquad \text{i} \qquad d^2 < n^2 + x^2,$$

a odavde nakon zbrajanja ovih nejednakosti:

$$a^2 + c^2 > m^2 + n^2 + x^2 + y^2,$$

odnosno

$$b^2 + d^2 < m^2 + n^2 + x^2 + y^2,$$

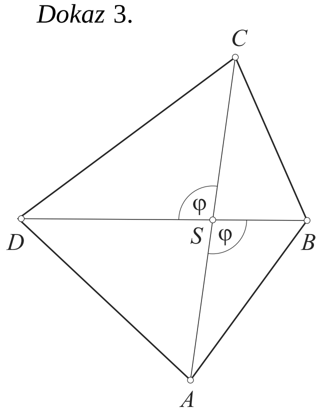
tj.

$$b^2 + d^2 < m^2 + n^2 + x^2 + y^2 < a^2 + c^2,$$

što nije moguće zbog danog uvjeta $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Dakle, pretpostavka da dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ nisu okomite nije ispravna, pa je $AC \perp BD$.

Dokaz 3.



Slika 5.

Neka je $AC \cap BD = \{S\}$ i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle DSC = \varphi$ (slika 5). Primjenjujući kosinusov poučak na trokute DSC, ABS, DAS, BCS dobivamo:

$$|CD|^2 = |DS|^2 + |CS|^2 - 2|DS| \cdot |CS| \cos\varphi,$$

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2|AS| \cdot |BS| \cos\varphi,$$

$$|AD|^2 = |AS|^2 + |DS|^2 - 2|AS| \cdot |DS| \cos(180^\circ - \varphi),$$

odnosno

$$|AD|^2 = |AS|^2 + |DS|^2 + 2|AS| \cdot |DS| \cos\varphi,$$

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |CS|^2 + 2|BS| \cdot |CS| \cos\varphi.$$

Iz danog uvjeta $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$, iz gornjih jednakosti dobivamo

$$(|AS| \cdot |BS| + |DS| \cdot |CS| + |AS| \cdot |DS| + |BS| \cdot |CS|) \cos\varphi = 0,$$

a odavde $\cos\varphi = 0$, tj. $\varphi = 90^\circ$ ili $AC \perp BD$.

Sada ćemo dokazati da u danoj tvrdnji vrijedi i obrat tvrdnje, tj.

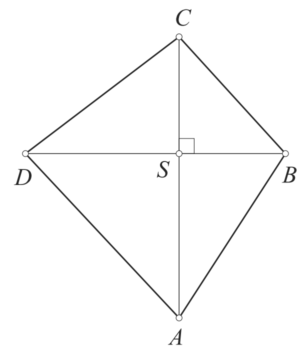
$$AC \perp BD \implies |AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2.$$

Dokaz. Neka u konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $AC \perp BD$ i $AC \cap BD = \{S\}$ (slika 6). Trokuti ABS, BCS, CDS, DAS su pravokutni pa koristeći Pitagorin poučak, dobivamo

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |CD|^2 &= (|AS|^2 + |BS|^2) + (|CS|^2 + |DS|^2) \\ &= (|AS|^2 + |DS|^2) + (|BS|^2 + |CS|^2) \\ &= |AD|^2 + |BC|^2, \end{aligned}$$

tj.

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2.$$



Slika 6.

Sada danu tvrdnju možemo formulirati kao jedan teorem:

Teorem. *U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$ ako i samo ako je $AC \perp BD$.*

Dokaz 4. Ovdje ćemo koristiti vektorski račun. Neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ (slika 7). Tada je $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$. Sada imamo

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \tag{4}$$

Iz danog uvjeta $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$ imamo

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2$$

tj.

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2,$$

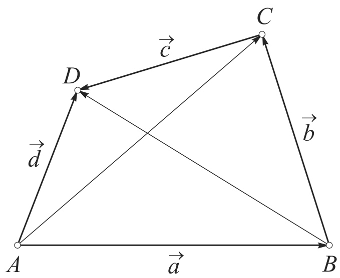
a odavde poslije kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2 = 0. \tag{5}$$

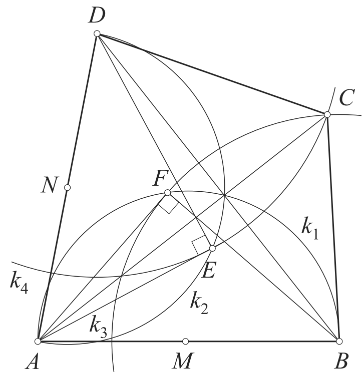
Iz (4) i (5) imamo

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0,$$

a odavde $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ tj. $AC \perp BD$.



Slika 7.



Slika 8.

Dokaz 5. Opet ćemo koristiti Pitagorin poučak i činjenicu da je obodni kut nad promjerom kruga pravi kut. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ kao promjerima konstruirajmo polukružnice $k_1(M, |MA|)$ i $k_2(N, |NA|)$. Neka su $k_3(B, |BC|)$ i $k_4(D, |DC|)$ kružnice i neka je $k_1 \cap k_3 = \{F\}$ i $k_2 \cap k_4 = \{E\}$. Iz uvjeta $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$ dobivamo

$$|AB|^2 - |BC|^2 = |DA|^2 - |CD|^2. \qquad (6)$$

U trokutima AFB i AED je $\sphericalangle AFB = 90^\circ$ i $\sphericalangle AED = 90^\circ$ (kao obodni kutovi nad promjerima kružnica) pa primjenom Pitagorinog poučka u ovim trokutima dobivamo

$$|AF|^2 = |AB|^2 - |BF|^2 = (\text{zbog } |BF| = |BC|) = |AB|^2 - |BC|^2$$

i

$$|AE|^2 = |DA|^2 - |DE|^2 = (\text{zbog } |DE| = |CD|) = |DA|^2 - |CD|^2$$

pa iz (6) imamo

$$|AF| = |AE|. \qquad (7)$$

Po konstrukciji AE i AF su tangente kružnica k_4 i k_3 i zbog (7) slijedi da točka A pripada radikalnoj osi kružnica k_4 i k_3 i tako dobivamo $AC \perp BD$.

Napomena 1. U matematičkoj literaturi se konveksni četverokuti čije su dijagonale okomite često nazivaju ortodijagonalni.

Napomena 2. Poslije pet raznih dokaza dane tvrdnje o konveksnom četverokutu, citirat ćemo poznatog hrvatskog matematičara (i haiku pjesnika) Vladimira Devidéa (1925. – 2010.): "Na velike se vrhunce koji put možemo popeti različitim padinama planine, no one koji stignu na vrh obasjava isto Sunce".

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] M. S. Jovanović, D. Đ. Tošić, *Zbirka rešenih zadataka i problema iz matematike za učenike srednjih škola,* Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[4] R. Tošić, V. Petrović, *Problemi iz geometrije – metodička zbirka zadataka,* MP "STYLOS", Novi Sad, 1995.