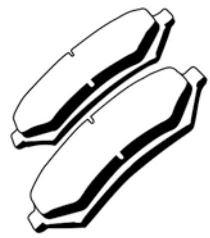
FIZIKA

Štedljivi motociklist

Petar Žugec[1]

Jednom nedavno u garaži, ne tako daleko...



Motociklist je pri kočenju u vožnji čuo neugodno škripanje. To je znak da se potrošio kočioni materijal s kočionih pločica te da ih je potrebno zamijeniti novima. Nakon uklanjanja starih pločica primijetio je da se kočioni materijal s jedne pločice, tj. s jedne strane kočionog diska potrošio do kraja, što objašnjava neugodno škripanje pri struganju ogoljele pločice o disk. Međutim, x-ti dio $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ početnog materijala s druge pločice ostao je nepotrošen zbog nejednolikog pritiska dviju pločica o kočioni disk. Motociklist razmišlja na sljedeći način: kad bi novom paru pločica zamijenio mjesta prije negoli se ijedna pločica protoši do kraja – tako da se jedan dio vremena materijal s jedne pločice troši brže, a drugi dio vremena s druge – mogao bi produljiti radni vijek čitavoga para te učinkovito potrošiti sav kočioni materijal s obiju pločica. Ako je sa starim parom pločica uspio prijeći put L prije potpunog iskorištenja kočionog materijala jedne pločice (naravno, ne kočeći sve vrijeme u vožnji, već nekom prosječnom učestalošću), nakon kojeg prijeđenog puta bi trebao zamijeniti mjesta novim pločicama da bi im se kočioni materijal istovremeno potrošio do kraja? Kolika je tada maksimalna duljina puta koji može prijeći u vožnji prije potpunog iskorištenja novog para pločica?

Rješenje

Označimo s λ potrošeni udio kočionog materijala s dane pločice u nekom trenutku. Tada za potrošene udjele sporije i brže trošene pločice vrijedi

$$\lambda_{\text{sporo}} = (1-x)\lambda_{\text{brzo}} \tag{1}$$

jer ako je, na primjer, na sporije trošenoj pločici ostalo $x = 10\ \%$ nepotrošenog materijala, tada ga se potrošilo $1 - x = 90\ \%$ u odnosu na potpuno potrošenu pločicu. Pretpostavimo da pločicama treba zamijeniti mjesto nakon prijeđenoga puta ℓ kako bi se u konačnici potrošile istovremeno. Tada se, *prije* zamjene, na prvoj pločici (onoj koja bi se prva potrošila nakon puta L da im ne mijenjamo mjesta) potroši udio kočionog materijala $\lambda_1^{(\text{prije})} = \ell/L$, dok se prema (1) na drugoj pločici potroši udio $\lambda_2^{(\text{prije})} = (1-x)\ell/L$. Prema tome, *nakon* zamjene, na prvoj pločici ostaje za potrošiti udio kočionog materijala $\lambda_1^{(\text{nakon})} = 1 - \lambda_1^{(\text{prije})} = 1 - \ell/L$, a na drugoj pločici $\lambda_2^{(\text{nakon})} = 1 - \lambda_2^{(\text{prije})} = 1 - (1-x)\ell/L$. Zahtjev da se preostali materijal s obje pločice

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pzugec@phy.hr`

istovremeno potroši do kraja, a nakon što smo im zamijenili brzinu trošenja, vodi na uvjet

$$\lambda_1^{(\text{nakon})} = (1-x)\lambda_2^{(\text{nakon})} \implies 1 - \frac{\ell}{L} = (1-x)\left[1-(1-x)\frac{\ell}{L}\right]. \tag{2}$$

Ovu jednadžbu lako je riješiti po jedinoj nepoznanici ℓ. Množenjem čitave jednakosti s L, prebacivanjem svih članova na jednu stranu i nakon sređivanja, pojavljuje se sljedeći izraz ekvivalentan s (2)

$$x[L-(2-x)\ell] = 0, \tag{3}$$

iz kojeg je vrlo lako iščitati traženo rješenje

$$\ell = \frac{L}{2-x}. \tag{4}$$

Budući da je $x \in [0,1]$, iz prethodnog rješenja vidimo $\ell \in [L/2, L]$. Prema tome, neovisno o razlici u brzini trošenja, motociklist uvijek može pričekati da se potroši barem polovica kočionog materijala prve pločice prije nego se počne zabrinjavati zamjenom njihovih mjesta[2]!

⋆ ⋆ ⋆

Možemo promotriti i inverzni problem: koliki udio x kočionog materijala jedne pločice bi trebao ostati nepotrošen bez zamjene mjesta kočionih pločica, da bi optimalna zamjena njihovih mjesta nastupila nakon prijeđenoga puta ℓ? U osnovi, odgovor bismo našli inverzijom ranijeg rješenja (4)

$$x = 2 - \frac{L}{\ell}. \tag{5}$$

Međutim, postupajući na ovaj način jedno rješenje sasvim bi nam promaklo! Naime, i (4) i (5) rješenja su ranijeg izraza (3) koji ima samo jedno rješenje za ℓ, ali dva rješenja za x. Jedno od njih – ono zanimljivo – svakako jest (5). No postoji i drugo: $x = 0$. Je li ono samo matematički artefakt ili je također i ono smisleno? Provjerimo njegovo značenje: $x = 0$ znači da bez zamjene mjesta pločica nemamo viška nepotrošenog materijala ni na jednoj od njih. Odnosno, kočioni materijal s obiju strana kočionog diska troši se jednakom brzinom. A u tom slučaju pločicama možemo zamijeniti mjesta nakon *bilo kojeg puta* ℓ i ponovno će se istovremeno potrošiti do kraja. Drugim riječima, $x = 0$ jest rješenje *za bilo koji* ℓ te je i ono smisleno i prihvatljivo!

Spoznaja da postoje dvije ovisnosti x o ℓ – prema čemu bi trebale postojati i dvije ovisnosti ℓ o x – otkriva da nam je ranije sasvim promaknula činjenica da za $x = 0$ rješenje $\ell = L/2$ iz (4) nije jedino prihvatljivo! Stoga sada možemo upotpuniti rješenje (4) do konačnog oblika

$$\ell = \begin{cases} \dfrac{L}{2-x} & \text{ako } x > 0 \\ \text{bilo što između 0 i } L & \text{ako } x = 0. \end{cases} \tag{6}$$

[2] Kao ishitreni intuitivan odgovor na zadani problem, u početku smo mogli pomisliti da bi u slučaju upola sporijeg trošenja jedne pločice $(x = 1/2)$ pločicama trebalo zamijeniti mjesta nakon što se potroši polovica kočionog materijala prve pločice, tj. nakon prijeđenog puta $\ell = L/2$. Međutim, iz (4) vidimo da u tom slučaju treba pričekati da se potroše dvije trećine početnog materijala: $\ell = 2L/3$.

Ovo ilustrira zašto je korisno promatrati isti problem na različite načine, uključujući i njegovu inverznu formulaciju. Našem motociklistu to nije problem jer već ima iskustva s tim stvarima. Baš poput upravljanja motociklom, i matematička misao zahtijeva učestale korekcije "putanje".

⋆ ⋆ ⋆

Napokon, koliki je maksimalni put $\mathcal{L}$ koji motociklist može prijeći s jednim parom pločica, uz zamjenu njihovih mjesta u optimalnom trenutku? Rješenje možemo postaviti na dva načina. Prije zamjene mjesta pločica motociklist je svakako prešao put ℓ. Nakon zamjene, kočioni materijal *prve* pločice – s kojom bi mogao prijeći još samo put $L-\ell$ bez zamjene mjesta – sad se troši brzinom $1-x$ s obzirom na brzinu trošenja prije zamjene. Dakle

$$\mathcal{L}_1 = \ell + \frac{L-\ell}{1-x} = \frac{L-x\ell}{1-x}. \tag{7}$$

No isto tako možemo reći da je do zamjene (tj. nakon doista prijeđenog puta ℓ) zbog smanjene brzine trošenja *druga* pločica potrošila toliko kočionog materijala *kao da* je brzinom trošenja prve pločice prešla smanjeni put $(1-x)\ell$. Prema tome, njoj je ostalo dovoljno kočionog materijala za prijeći dodatan put $L-(1-x)\ell$ početnom brzinom trošenja prve pločice. Stoga

$$\mathcal{L}_2 = \ell + [L-(1-x)\ell] = L + x\ell. \tag{8}$$

Izgleda da se prethodna dva izraza ne slažu. I doista, ne slažu se za *nezavisne* x i ℓ jer se po zamjeni mjesta nakon *proizvoljnog* prijeđenog puta ℓ pločice neće istovremeno potrošiti do kraja. No uvrštavanjem prijeđenog puta ℓ iz (4) – upravo onoga za koji se pločice potroše istovremeno – oba izraza sasvim očekivano daju jednak rezultat

$$\mathcal{L} = \frac{2L}{2-x}. \tag{9}$$

Iz $x \in [0,1]$ izravno slijedi $\mathcal{L} \in [L, 2L]$ za maksimalni put koji motociklist može prijeći s jednim parom pločica. Ako se obje pločice troše jednakom brzinom $(x=0)$, tada je $\mathcal{L} = L$, tj. motociklist ne može produljiti radni vijek svojim pločicama. S druge strane, ako se pločica s jedne strane diska uopće ne troši $(x=1)$, onda se radni vijek *čitavog para* pločica može udvostručiti: $\mathcal{L} = 2L$. No po koju cijenu? U ovoj krajnosti u danome trenutku koči samo jedna od pločica, tako da se *svaka pojedina* ponovno troši samo duž puta L. Cijena je, naravno, oslabljeno kočenje.

Koliko je pri tome kočenje oslabljeno? Ona pločica koja se brže troši osigurava 50 % *najjačeg* mogućeg *ukupnog* kočenja (koje bismo imali da se obje pločice troše jednakom brzinom). Ona koja se troši sporije osigurava $(1-x)50$ % istog ukupnog udjela. Prema tome, ukupan faktor kočenja χ s obzirom na maksimalnu moguću snagu kočenja kojoj odgovara $\chi = 100$ %, jednak je

$$\chi = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{2} = 1 - \frac{x}{2}. \tag{10}$$

A kako je to upravo faktor za koji je produljen maksimalni put iz (9),

$$\mathcal{L} = \frac{L}{\chi}, \tag{11}$$

sasvim opravdano možemo reći da je maksimalni put koji motociklist može prijeći s parom kočionih pločica uvećan upravo za isti faktor za koji je kočenje oslabljeno.