Klasična mehanika u biljaru

Filip Vučić[1]

Uvod

Biljar je nadaleko poznata društvena i sportska igra za dva igrača (ili u parovima po dvoje) s tri i više kuglica koje se udaraju vrhom biljarskog štapa na posebnom stolu. U svijetu se biljar vrlo često može naći u kavanama i gostionicama gdje se najčešće i igra amaterski, [1]. U članku će biti razmotreni neki fizikalni problemi povezani s biljarskim kuglicama, biljarskim stolom i biljarskim štapovima. Za razmatranje tih problema potrebno je poznavanje osnovnih pravila biljara koje većina ljudi poznaje, ali po potrebi će u tekstu biti navedena pravila koja su nužna za razmatranje određenog problema.

Sudari kuglica

Razmatranja započinju temeljnom pojavom koja se opaža prilikom igranja biljara, a to je sudar dviju biljarskih kuglica. Pravila biljara nalažu da se jedino bijela kuglica smije udariti štapom i da se sudarima dalje pomiču ostale. Igrač bijelu biljarsku kuglicu udari štapom i ona se sudara s nekom drugom kuglicom (na primjer crnom) jednake mase i jednakog polumjera. Cilj je odrediti koji će kut θ zatvarati smjer brzine bijele i crne kuglice nakon sudara. Trenje na biljarskom stolu pri sudaru je zanemarivo. Biljarske su kuglice savršeno elastične.

Jasno je da ako je sudar centralan, traženi kut jednak je $\theta = 0^\circ$ pa stoga valja razmatrati necentralni sudar. Neka je brzina bijele kuglice prije sudara jednaka $\vec{v}_0$. Referentni koordinatni sustav tada se odabire tako da je os apscisa usmjerena duž vektora $\vec{v}_0$ čime je os ordinata jednoznačno određena. Budući da su kuglice savršeno elastične, za sudar vrijedi zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije

$$\left.\begin{aligned} m\vec{v}_0 &= m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

gdje je m masa biljarske kuglice, $\vec{v}_1$ brzina bijele kuglice nakon sudara i $\vec{v}_2$ brzina crne kuglice nakon sudara. Sustav (1) može se elementarnim transformacijama svesti na oblik

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ v_0^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Sada je korisno promotriti geometrijsko značenje jednadžbi u sustavu (2). Prva vektorska jednadžba kaže da vektori $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ čine trokut jer se vektori zbrajaju po pravilu trokuta. Druga jednadžba postavlja odnos među duljinama stranica trokuta koji čine

[1] Autor je učenik drugog razreda I. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: fico.sah@gmail.com

vektori $\vec{v_0}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$. Može se uočiti kako je druga jednadžba u sustavu poseban slučaj kosinusovog poučka za trokut koji čine vektori $\vec{v_0}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$, odnosno da je to Pitagorin poučak za pravokutan trokut s katetama $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ te hipotenuzom $\vec{v_0}$. Iz toga se zaključuje da je kut između vektora $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ pravi, tj. $\theta = 90^\circ$. Do ovog rezultata se moglo doći i rješavanjem jednadžbe koju uvjetuje kosinusov poučak za trokut koji čine vektori $\vec{v_0}$, $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\theta). \tag{3}$$

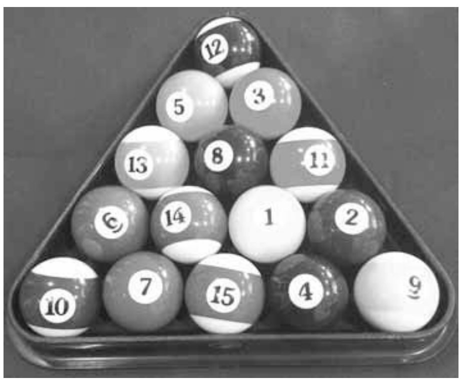
Uvažavanjem druge jednadžbe u sustavu (2) izraz (3) poprima oblik

$$2v_1v_2\cos(\theta) = 0. \tag{4}$$

Jednadžba (4) ima 3 rješenja, a to su $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ i $\theta = 90^\circ$. Rješenje $v_2 = 0$ fizikalno je nemoguće jer bi to značilo da se brzina crne kuglice nakon sudara nije promijenila (tj. da je crna kuglica nakon sudara ostala mirovati). Stoga u obzir dolaze samo slučajevi kada je $v_1 = 0$ i $\theta = 90^\circ$. Rješenje $v_1 = 0$ odgovara centralnom sudaru, a u svim ostalim slučajevima (dakle, kada sudar nije centralan) jedino je rješenje $\theta = 90^\circ$.

Razbijanje trokuta u *osmici*

U klasičnom biljaru (*osmici*) jedan od igrača na početku razbija trokut udarom bijele kuglice u kojemu su složene sve kuglice osim bijele kao što je prikazano na slici 1.



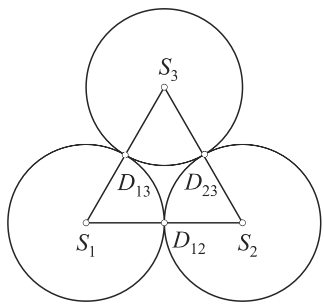
Slika 1. Biljarski trokut.

Bijela kuglica sudara se centralno s kuglicom obilježenom brojem 12 na slici 1. Ako je brzina bijele kuglice neposredno prije sudara s kuglicom obilježenom brojem 12 bila v_0, treba odrediti koje će se kuglice gibati nakon svih sudara i odrediti njihove brzine. Sve su kuglice savršeno elastične.

Opažaju se dva tipa sudara. Prvi je tip centralni sudar dvije biljarske kuglice jednake mase, a drugi je tip sudar triju biljarskih kuglica koje se svaka sa svakom međusobno dodiruju, a dvije od njih miruju u početnom trenutku.

Za centralni je sudar poznat rezultat iz prethodnog odjeljka u kojemu je određeno da biljarska kuglica koja nalijeće brzinom v_0 na drugu biljarsku kuglicu jednake mase i s njom se centralno sudara neposredno nakon sudara miruje, a iz zakona očuvanja količine gibanja tada je moguće zaključiti da biljarska kuglica koja je prije sudara mirovala neposredno nakon sudara ima brzinu v_0. Stoga, nakon sudara bijele kuglice i kuglice obilježene brojem 12, bijela kuglica miruje, a kuglica označena brojem 12 ima brzinu v_0.

Sada treba promotriti i drugi tip sudara. Pogled odozgo na geometriju problema prikazan je na slici 2. Kuglica sa središtem u S_3 nalijeće brzinom v_0 na preostale dvije kuglice pri čemu je brzina v_0 usmjerena duž simetrale kuta $\sphericalangle S_1S_3S_2$. Budući da su kuglice jednakih polumjera, stranice trokuta $S_1S_3S_2$ jednake su pa je taj trokut jednakostraničan. Budući da je vektor brzine usmjeren duž simetrale kuta $\sphericalangle S_1S_3S_2$, vektori brzine kuglica sa središtima u točkama S_1 i S_2 zatvarat će kut od 30° s tom simetralom jer na tom pravcu djeluje sila, a spomenute kuglice miruju u početnom trenutku pa II. Newtonov zakon implicira taj smjer brzine. Također, brzina kuglice sa središtem u S_3 imat će nakon sudara isti smjer (ležat će na istom pravcu) kao i prije sudara jer se zbog osne simetrije komponente sile kojima kuglice sa središtima u S_1 i S_2 djeluju na kuglicu sa središtem u S_3 poništavaju po komponenti okomitoj na brzinu kuglice sa središtem u S_3 prije sudara pa po II. Newtonovom zakonu brzina te kuglice ostaje nepromijenjena po toj komponenti.



Slika 2. Geometrija problema o razbijanju biljarskog trokuta.

Budući su kuglice savršeno elastične, svi su sudari savršeno elastični pa vrijedi zakon očuvanja energije

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} \iff v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \tag{5}$$

gdje su v_1, v_2 i v_3 redom brzine kuglica sa središtima u točkama S_1, S_2 i S_3. U referentnom sustavu u kojemu je jedna os usmjerena duž vektora brzine v_0 može se pisati zakon očuvanja količine gibanja po komponentama tog koordinatnog sustava

$$\frac{mv_1}{2} = \frac{mv_2}{2} \iff v_1 = v_2$$

$$mv_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}mv_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv_2 + mv_3 \iff v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + v_3.$$

Kombiniranjem prethodnih dviju jednadžbi dobiva se

$$v_0 = \sqrt{3}v_1 + v_3. \tag{6}$$

Eliminacijom v_3 iz (5) i (6) i uvažavanjem $v_1 = v_2$, dobiva se

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 2v_1^2 + \left(v_0 - \sqrt{3}v_1\right)^2 = 2v_1^2 + v_0^2 - 2\sqrt{3}v_1v_0 + 3v_1^2 \\ &\iff 5v_1^2 - 2\sqrt{3}v_1v_0 = 0 \iff v_1\left(5v_1 - 2\sqrt{3}v_0\right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Rješenja jednadžbe (7) su $v_1 = 0$ i $v_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$. Rješenje $v_1 = 0$ fizikalno je nemoguće jer kad bi to bilo rješenje, slijedilo bi da se brzina kuglice sa središtem u S_1 nakon sudara nije promijenila, a to nije moguće. Zaključuje se stoga $v_1 = v_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$. Uvrštavanjem v_1 u (6) dobiva se $v_3 = -\frac{v_0}{5}$ pri čemu negativan predznak upućuje na to da se kuglica sa središtem u S_3, nakon sudara giba u suprotnom smjeru u odnosu na gibanje te kuglice prije sudara.

Iz prethodnih razmatranja zaključuje se da se nakon sudara kuglica 12, 5 i 3 sa slike 1 kuglica 12 giba brzinom $\frac{v_0}{5}$ u suprotnom smjeru od gibanja bijele kuglice prije svih sudara, a kuglice 5 i 3 gibaju se brzinama $\frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$ pod kutom od 30° u odnosu na vektor brzine bijele kuglice prije svih sudara.

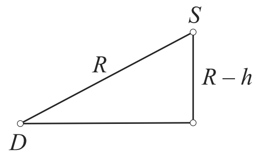
Budući da je vektor brzine kuglica 5 i 3 paralelan sa stranicom velikog trokuta u kojemu se nalaze sve kuglice, dogodit će se niz centralnih sudara kuglica 3 i 11, zatim kuglica 11 i 2 i konačno kuglica 2 i 9 (analogno i centralni sudari kuglica 5 i 13, zatim 13 i 6 i konačno 6 i 10), dok će ostale kuglice mirovati. Centralni je sudar već riješen za kuglice jednakih masa pa će na kraju kuglica 10 imati istu brzinu kao i kuglica 5 neposredno nakon sudara s kuglicom 12, a kuglica 9 imat će istu brzinu kao i kuglica 3 neposredno nakon sudara s kuglicom 12. Primijetimo još da se nakon sudara kuglica 12, 3 i 5 kuglica 12 centralno sudara s bijelom kuglicom nakon čega bijela dobiva brzinu kuglice 12 prije sudara, a kuglica 12 nakon sudara miruje. Dakle, u idealnom razbijanju trokuta sa slike 1 kuglice 10 i 9 će imati brzinu $\frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$, a smjer brzine svake kuglice paralelan je s onom stranicom trokuta koja se razbija, a koju kuglica dodiruje. Bijela kuglica imat će brzinu $\frac{v_0}{5}$ istog smjera i suprotne orijentacije od brzine koju je bijela kuglica imala prije svih sudara. Sve ostale kuglice ostat će mirovati na svojim početnim položajima.

Ovakav ishod obično se ne opaža prilikom razbijanja trokuta na početku igre jer ili sudar bijele kuglice i kuglice označene brojem 12 nije centralan ili se sve kuglice unutar trokuta međusobno ne dodiruju svaka sa sebi susjednima.

Udarac kuglice štapom

Biljarska kuglica udari se štapom (koji se naziva *ke*) tako da je točka dodira štapa i kuglice na visini $h \leq R$ od točke dodira stola i kuglice. Horizontalna brzina translacije kuglice neposredno nakon sudara jednaka je v_0. Cilj je odrediti put s koji kuglica prijeđe prije početka kotrljanja bez proklizavanja. Faktor trenja klizanja jednak je μ. Pretpostavlja se da je biljarska kuglica puna i homogena pa je stoga moment inercije biljarske kuglice oko središta jednak $I = \frac{2}{5}mR^2$ gdje je R polumjer biljarske kuglice i m njezina masa.

Neka štap dira kuglicu u točki D i neka je središte kuglice u točki S. Na slici 3 prikazan je pravokutan trokut s hipotenuzom R čiji su vrhovi te točke i katetom $R - h$.



Slika 3. Geometrija problema prilikom udarca štapa.

Budući da tijekom sudara štapa i kuglice rezultanta sila postoji jedino u točki D (težinu uravnotežuje reakcija podloge!), slijedi da je moment količine gibanja kuglice s obzirom na točku D očuvan. Prije sudara kuglica miruje pa je moment količine gibanja jednak 0, a neposredno nakon sudara kuglica se giba horizontalnom brzinom $\vec{v}_0$ i rotira nekom kutnom brzinom $\vec{\omega}_0$. Moment količine gibanja neke čestice mase Δm koja se giba nekom brzinom $\vec{v}$ s obzirom na neku točku jednak je

$$\vec{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{\Delta m v} = \overrightarrow{\Delta m r} \times \vec{v}. \tag{8}$$

Za kruto tijelo moment količine gibanja moguće je naći sumiranjem izraza (8) za svaku česticu mase Δm_i po svim i koja se giba translacijski brzinom $\vec{v}$

$$\vec{L}_{\text{kruto tijelo}} = \sum_i \overrightarrow{\Delta m_i r_i} \times \vec{v} = \left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}. \tag{9}$$

Centar mase krutog tijela definiran je izrazom

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{10}$$

gdje je m masa krutog tijela, a $\vec{r}_{cm}$ radijvektor centra mase krutog tijela s obzirom na točku oko koje se računa moment količine gibanja. Eliminacijom člana $\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i$ iz (9) i (10) slijedi

$$\vec{L}_{\text{kruto tijelo}} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{v}. \tag{11}$$

Primjenom (11) i uvažavanjem da rotacija kutnom brzinom ω_0 pridonosi ukupnom momentu količine gibanja za član $I\vec{\omega}_0$ može se primijeniti zakon očuvanja momenta količine gibanja oko točke D

$$\vec{0} = I\vec{\omega}_0 + m\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_0 \tag{12}$$

Kuglica će zbog simetrije rotirati oko središta pa je $I = \dfrac{2}{5}mR^2$. Sa slike 3 vidi se da je $\sin\left(\sphericalangle \vec{r}_{cm}, \vec{v}_0\right) = \dfrac{R-h}{R}$ pa slijedi da je iznos vektorskog produkta jednak

$$|\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_0| = |\vec{r}_{cm}||\vec{v}_0| \sin\left(\sphericalangle \vec{r}_{cm}, \vec{v}_0\right) = Rv_0 \frac{R-h}{R} = v_0\left(R-h\right). \tag{13}$$

Uvrštavanjem izraza za moment inercije i (18) u (17) slijedi iznos kutne brzine rotacije

$$|\vec{\omega}_0| = \frac{5v_0\left(R-h\right)}{2R^2}. \tag{14}$$

Po pravilu desne ruke za vektorski produkt iz jednadžbe (13), orijentacija vektora $\vec{\omega}_0$ je takva da se translacijska i obodna brzina rotacije zbrajaju u točki dodira biljarskog stola i kuglice. Da bi se mogao odrediti put s valja odrediti kutnu brzinu kotrljanja kuglice bez proklizavanja ω_k. Uvjet da se kuglica kotrlja bez proklizavanja implicira $v_k = \omega_k R$ pri čemu valja voditi računa da je $\vec{\omega}_k$ suprotne orijentacije od $\vec{\omega}_0$. U svrhu izračuna konačne translacijske brzine v_k treba primijeniti zakon očuvanja momenta količine gibanja oko točke dodira kuglice i stola (tada trenje nema utjecaja)

$$mRv_0 - \frac{2}{5}mR^2|\vec{\omega}_0| = mRv_k + \frac{2}{5}mR^2\omega_k. \tag{15}$$

Uvrštavanjem (14) u (15) i uvažavanjem $v_k = \omega_k R$ dobiva se

$$v_0 - \frac{v_0\,(R-h)}{R} = v_k + \frac{2}{5}v_k \iff v_k = \frac{5}{7}v_0\left(1 - \frac{R-h}{R}\right) = \frac{5h}{7R}v_0. \tag{16}$$

Put s sada se izračuna iz kinematičke jednadžbe za jednoliko usporeno gibanje akceleracijom $-\mu g$ (jer je po II. Newtonovom zakonu $ma = -\mu mg$) na način

$$v_k^2 = v_0^2 - 2\mu gs \iff s = \frac{v_0^2 - v_k^2}{2\mu g}. \tag{17}$$

Uvrštavanjem (16) u (17) i sređivanjem dobiva se

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}\left(1 - \frac{25h^2}{49R^2}\right).$$

Nakon što otpočne kotrljanje bez proklizavanja prestaje djelovanje sile trenja klizanja i kuglica se u realnim uvjetima nakon nekog vremena zaustavlja zbog otpora zraka i trenja kotrljanja pa se pri zaustavljanju kuglice ne smije koristiti ovakav matematički model.

Čitatelju je prepušteno da riješi isti problem za slučaj kada je $2R > h > R$.

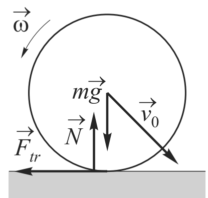
Potkopavanje kuglice

Posljednji problem tiče se takozvanog potkopavanja. Potkopavanje je udarac kuglice štapom uslijed kojega kuglica dobiva i vertikalnu i horizontalnu brzinu, odnosno kuglica vrši kosi hitac. Takvi su udarci u biljaru najčešće neželjeni, no znaju se koristiti ako treba preskočiti neku drugu kuglicu.

Biljarska kuglica udarena je tehnikom potkopavanja. Štap je kuglici dao neku brzinu v_0 pod kutom θ prema horizontali. Neposredno nakon udara kuglice o stol ona počinje mirovati. Prvo treba dokazati da kuglica mora rotirati nekom kutnom brzinom iznosa ω oko središta neposredno prije udara o stol kako bi se ovaj efekt mogao opaziti, a zatim valja i odrediti ω. Potrebno je pronaći i uvjet koji mora zadovoljiti faktor trenja μ kako bi se ova pojava mogla opaziti.

Rješenje. Na kuglicu u trenutku udara o stol djeluju sila reakcije podloge $\vec{N}$ i sila dinamičkog trenja[2] $\vec{F_{tr}}$ s hvatištem u točki dodira kuglice i stola te težina $m\vec{g}$ s hvatištem u središtu kuglice. Da bi mirovanje neposredno nakon udara kuglice o stol bilo moguće, mora postojati rotacija kutnom brzinom iznosa ω u smjeru takvom da je obodna brzina točke dodira kuglice i stola uzrokovana rotacijom suprotno usmjerena od sile trenja jer bi se u protivnom uslijed djelovanja trenja neprestano povećavala kutna brzina rotacije kuglice oko središta i mirovanje ne bi bilo moguće. Na temelju tih zaključaka dijagram na slici 4 prikazuje sve sile na kuglicu s njihovim hvatištima i sva gibanja kuglice.

[2] Nikako nije moguće opaziti djelovanje sile statičkog trenja na kuglicu jer ne postoji niti jedna druga sila koja ima horizontalnu komponentu.



Slika 4. Dijagram sila i gibanja.[3]

Sada valja postaviti dinamiku problema. Pretpostavimo da se mirovanje uspostavlja nakon vremena Δt od udara kuglice o stol. Neka je $N(t)$ ovisnost reakcije podloge o vremenu i neka je $F_{tr}(t)$ ovisnost sile trenja o vremenu. Po II. Newtonovom zakonu može se pisati

$$F_{tr}(t) = m\frac{dv_h}{dt} \tag{18}$$

$$N(t) - mg = m\frac{dv_v}{dt}. \tag{19}$$

U vremenskom intervalu Δt horizontalna komponenta translacijske brzine promijenila se od $-v_0\cos(\theta)$ do 0 u uzetom referentnom sustavu, a vertikalna se komponenta u istom vremenskom intervalu promijenila od $-v_0\sin(\theta)$ do 0. Integriranjem (18) i (19) dobiva se

$$\int_0^{\Delta t} F_{tr}(t)dt = m\int_{-v_0\cos(\theta)}^{0} dv = mv_0\cos(\theta) \tag{20}$$

$$\int_0^{\Delta t} N(t)dt - mg\int_0^{\Delta t} dt = \int_0^{\Delta t} N(t)dt - mg\Delta t = m\int_{-v_0\sin(\theta)}^{0} dv = mv_0\sin(\theta). \tag{21}$$

Budući da je interval Δt vrlo malen, a vrijedi $N(t) \gg mg$, izraz (21) poprima približan oblik:

$$\int_0^{\Delta t} N(t)dt = mv_0\sin(\theta). \tag{22}$$

Po II. Newtonovom zakonu za rotaciju vrijedi

$$\int_0^{\Delta t} RF_{tr}(t)dt = R\int_0^{\Delta t} F_{tr}(t)dt = \frac{2}{5}mR^2\omega. \tag{23}$$

Sređivanjem (23) i prepisivanjem (20) i (22) dobiva se sustav

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{\Delta t} F_{tr}(t)dt = mv_0\cos(\theta) \\ \int_0^{\Delta t} N(t)dt = mv_0\sin(\theta) \\ \int_0^{\Delta t} F_{tr}(t)dt = \frac{2}{5}mR\omega \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Eliminacijom impulsa $\int_0^{\Delta t} F_{tr}(t)dt$ iz prve i treće jednadžbe u sustavu (24) dobiva se

$$mv_0\cos(\theta) = \frac{2}{5}mR\omega \iff \omega = \frac{5v_0\cos(\theta)}{2}. \tag{25}$$

[3] Sila reakcije podloge i težina kuglice djeluju na istom pravcu, ali su ucrtani na paralelnim pravcima jer se ne mogu prikazati obje sile na istom pravcu, a da se zorno vide.

Kako se radi o dinamičkom trenju vrijedi izraz $F_{tr}(t) = \mu N(t)$ pa to prva jednadžba u sustavu (24) poprima oblik

$$\mu \int_0^{\Delta t} N(t)dt = mv_0 \cos(\theta). \tag{26}$$

Eliminacijom impulsa $\int_0^{\Delta t} N(t)dt$ iz (21) i druge jednadžbe u sustavu (24) slijedi

$$\mu mv_0 \sin(\theta) = mv_0 \cos(\theta) \iff \mu = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \mathrm{ctg}(\theta) \tag{27}$$

Izraz (27) određuje minimalnu vrijednost faktora dinamičkog trenja da bi se ova pojava mogla opaziti jer je jasno da će uz veći faktor dinamičkog trenja i sila trenja biti veća, a veća sila trenja utječe jedino na to da se prije uspostavi mirovanje. Matematički bi to utjecalo na promjenu gornjih granica integracije u jednadžbama u izrazu (24). Prva i treća jednadžba imale bi iste granice integracije, a druga jednadžba imala bi gornju granicu integracije veću nego u prvoj i trećoj jednadžbi. Stoga po izrazu (27) za faktor trenja μ mora vrijediti

$$\mu \geq \mathrm{ctg}(\theta),$$

odnosno

$$\theta \geq \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Očito vrijedi

$$\lim_{\mu \to 0} \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad} = 90^\circ,$$

tj., kako se faktor trenja približava 0, tako se minimalni kut izbačaja približava pravom kutu. Upravo je to razlog zašto se ovaj efekt ne opaža prilikom igranja biljara – niti jedan igrač ne ispaljuje kuglicu pod kutom čija je veličina približno jednaka pravom kutu.

Zaključak

Kroz četiri riješena problema iz klasične mehanike fizikalno su rastumačeni efekti koje može opaziti svaki igrač biljara. Dva od četiri promatrana efekta gotovo je nemoguće opaziti, no problem o sudaru dviju kuglica i udaru kuglice štapom mogu biti od koristi svakom igraču biljara u procjenama koju kuglicu treba udariti i kako. Na kraju, jedan citat o ovoj nadaleko poznatoj igri.

Biljar je najsuptilnija igra perfekcije i logičnosti,
satkana od šahovske kombinatorike, zakona fizike
i izvanredne povezanosti čovječjeg uma i tjelesne motorike.
Nikola Tesla

Literatura

[1] biljar, *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020., `http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=7669`

[2] Ivan Supek, *Teorijska fizika i struktura materije I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.