



Eksperimenti s gitarom¹

Antonio Svedružić², Danijel Ptičar³

Ljudi uživaju u glazbi, jedni ju stvaraju i izvode, a drugi slušaju. Glazba je oblik umjetnosti u kojoj se pravilnom kombinacijom zvukova kod slušatelja nastoji potaknuti emocionalna reakcija. S druge strane, znanost se može opisati kao proučavanje i analiziranje prirode u pokušaju razumijevanja njene strukture i ponašanja. S pravom se može reći da je danas naša svakodnevnica prožeta znanošću i glazbom. Međutim, postoji li povezanost između glazbe, glazbenih instrumenata i znanosti? Možda se čini da glazbena umjetnost nema dodirnih točaka sa znanosti, ali su zapravo povezane na mnoge zanimljive načine. Tako se u ovom radu opisuju jednostavni eksperimenti koji povezuju fiziku i glazbeni instrument gitaru, a koje je moguće realizirati u školskoj nastavi fizike [1].

Određivanje frekvencije žice gitare pomoću kamere

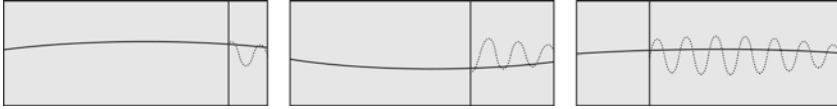
Za određivanje frekvencije žice koristi se kamera mobilnog telefona s CMOS (eng. *Complementary metal-oxide-semiconductor*) senzorom [2]. Uloga senzora je da svjetlosnu energiju osvijetljenog predmeta pretvori u električni napon koji se potom pomoću analognog-digitalnog pretvarača oblikuje u digitalni zapis pogodan za bilježenje slike. Posebnost ovog tipa senzora je da za stvaranje slike ne koristi istovremeno cijelu senzorsku površinu već se njezini dijelovi izlažu svjetlosti u različito vrijeme. Zbog toga senzor trenutno ne "hvata" cijelu sliku osvijetljenog predmeta nego je stvara osvjetljavanjem liniju po liniju površine senzora. Takav način hvatanja svjetlosne informacije naziva se *rolling shutter* ili kotrljajući zatvarač. Slika koja se dobije CMOS senzorom ne razlikuje se od stvarne sve dok su fotografirani predmeti statični ili se gibaju relativno malim brzinama. Međutim, za tijela koja se gibaju velikim brzinama ili kamera brzo oscilira slika je izobličena što uzrokuje tzv. *rolling shutter* efekt. S druge strane, postoji CCD (eng. *Charge-Coupled Device*) tip senzora koji hvata cijelu sliku odjednom (tzv. *global shutter*) pa dobivena fotografija nije izobličena. Za određivanje frekvencije brzo titrajuće žice koristi se izobličena ili distorzirana slika dobivena kamerom s CMOS senzorom. S obzirom na to da je opseg perioda titranja žica standardne gitare od 3 do 12 ms, pojavit će se izobličenje slike zbog vremenskog kašnjenja od 10 ms u očitavanju linija na površini senzora. Dobiven efekt prikazan je modelom na slici 1 kreiran u programu *GeoGebra*. Za postizanje opisanog efekta potrebno je da kamera bude postavljena okomito na žice, da se smanji vrijeme otvora

¹ Dio rezultata u radu prikazan je i nagrađen na državnoj smotri eksperimentalnih radova iz fizike 2015. godine.

² Autor je profesor fizike, savjetnik, u OŠ Ljudevita Gaja, Zaprešić; e-pošta: antonio.svedruzic@skole.hr

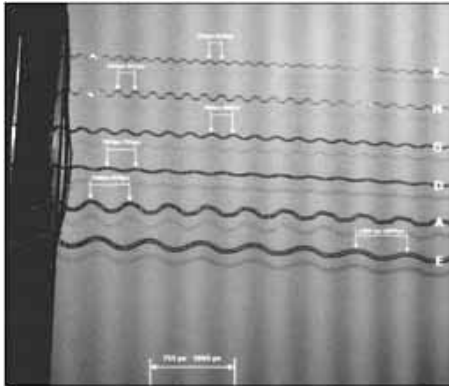
³ Autor je profesor matematike i informatike, savjetnik, u SŠ bana Josipa Jelačića, Zaprešić; e-pošta: pticar.danijel@gmail.com

blende te da se žice dodatno osvijetle. Za određivanje frekvencije (f/s^{-1}) titranja žice potrebno je odrediti valnu duljinu valova dobivenu efektom izobličenja koju je moguće odrediti u nekom računalnom programu za uređenje slika (λ/px) i brzinu očitavanja linija po sekundi (k/pxs^{-1}). Za određivanje k mjere, žice se osvjetljavaju fluorescentnom lampom priključenom na izvor izmjenične struje.



Slika 1. Model titranja žice i način rada kotrljajućeg zatvarača kamere.

U pozadini fotografije na slici 2 nalaze se svijetle i tamne pruge kao posljedica treptanja lampe koje bilježi kamera. Poznavanje učestalosti titranja žarulje koju određuje frekvencija izmjenične struje i mjerenjem udaljenosti tamnih pruga moguće je odrediti brzinu očitavanja linija u vremenskom intervalu od jedne sekunde. Iz izraza $f = k/\lambda$ moguće je odrediti frekvenciju žice gitare iz dobivene fotografije. Iz fotografije prikazane na slici 2 za broj linija po sekundi dobije se $k = 15\,500\text{ pxs}^{-1}$ što daje frekvenciju žice E_6 od $f = 82.9\text{ Hz}$.



Slika 2. Fotografija titrajućih žica gitare dobivena CMOS kamerom.

Određivanje ovisnosti frekvencije žice o duljini žice, sili napetosti i debljini žice

Prva istraživanja o titrajućim žicama provodio je grčki matematičar Pitagora, a francuski znanstvenik Mersenne je u 17. st. postavio sljedeća pravila:

1. Povećanje duljine žice uz stalnu silu napetosti uzrokuje smanjivanje visine tona i frekvencije $f \propto \frac{1}{L}$.
2. Povećanje sile napetosti uz istu duljinu žice uzrokuje porast visine tona i frekvencije $f \propto \sqrt{F}$.
3. Povećanje mase žice po duljini, uz stalnu silu uzrokuje smanjenje visine tona i frekvencije $f \propto \sqrt{\frac{1}{\rho}}$.

Povlačenjem napete žice duž nje se šalju valovi koji se odbijaju od čvrstog kraja i preklapaju, a visina nastalog tona zavisi o brzini vala i udaljenosti. Brzina vala kroz napetu žicu prikazana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (1)$$

gdje je F napetost žice, ρ masa po jedinici duljine u kgm^{-1} . Udaljenost koju val prođe za jednu valnu duljinu je $2L$, gdje je L duljina žice, pa se osnovna frekvencija može prikazati kao

$$f = \frac{v}{2L}. \quad (2)$$

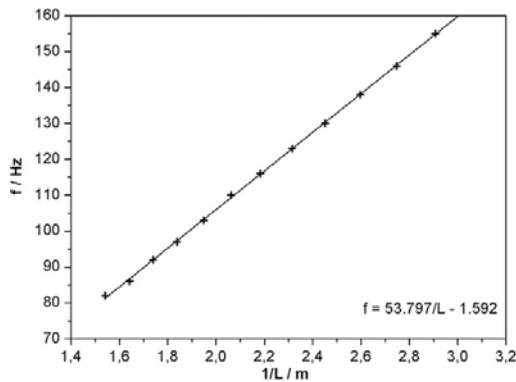
Uvrstimo li izraz (1) u (2) dobije se

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}}. \quad (3)$$

Izraz (3) uključuje sve veličine koje određuju osnovnu frekvenciju titrajuće žice.

Za predloženi eksperiment koristi se gitara, slušalice mobilnog telefona kao mikrofoni i program za obradu zvuka (npr. *Audacity*).

Sila napetosti žice određuje se iz grafa ovisnosti frekvencije o recipročnoj vrijednosti duljine žice. Računalni program za crtanje grafova omogućuje izravno određivanje jednadžbe i koeficijenta smjera pravca iz izraza (2), a time i brzinu vala na žici. Iz izraza (1) i određene linearne gustoće žice, mjerenjem mase i duljine žice može se odrediti sila napetosti žice. Na slici 3 je prikazan $f - 1/L$ graf iz kojeg je određen koeficijent $a = 53.8$ (uz djelovanje stalne sile na identičnu žicu). Iz izraza (2) dobije se brzina valova kroz žicu $v = 107.6 \text{ m/s}$, dok se za linearnu gustoću prema (4) dobije $\rho = 7.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}$. Iz izraza (1) proizlazi da je napetost E_4 žice $F = 85.7 \text{ N}$.



Slika 3. Ovisnost frekvencije titrajuće žice o $\frac{1}{L}$ duljini žice.

Izračunata sila napetosti koristi se za određivanje ovisnosti frekvencije titranja o sili napetosti žice. Kako na spravama za ugađanje gitare ne postoji mjera za silu potrebno je, prije svega, odrediti kolika je promjena u sili napetosti kad poluga sprave za ugađanje načini puni krug. Silu napetosti moguće je odrediti izravno iz formule (3).

Za određivanje ovisnosti frekvencije o debljini žice potrebno je odrediti linearnu gustoću žice prema

$$\rho = \frac{m}{L}, \quad (4)$$

gdje je m masa i L duljina žice. Stalna sila može se držati stalnom tako da se žica preko koloture veže za uteg koji slobodno visi, a duljina žice spravom koju glazbenici zovu kapodaster. Duljina žice je skraćena budući da za frekvencije < 80 Hz slušalice mobilnog telefona ne mogu zabilježiti zvuk.

Nadalje, postavlja se pitanje što određuje položaj metalnih pragova na gitari. Za odgovor dovoljno je ispitati kako se frekvencija, odnosno visina tona, mijenja u ovisnosti o udjelu žice pobuđene na titranje. Potrebno je izračunati intervale ili omjere frekvencija susjednih tonova. Kod gitare i većine suvremenih glazbenih instrumenata oktava je podijeljena na 12 jednakih dijelova (tzv. temperirana ljestvica). Za bilo koja dva uzastopna tona tada vrijedi

$$\frac{f_{n+1}}{f_1} = r. \quad (5)$$

Za $n = 1$, $f_2 = f_1 r$, za $n = 2$, $f_3 = f_1 r^2$ ili:

$$\frac{f_n}{f_1} = r^{n-1}. \quad (6)$$

Kako je oktava podijeljena na 12 jednakih dijelova čine je 13 tonova za koje vrijedi omjer $2 : 1$, pa imamo:

$$2 = r^{12}, \quad r = 2^{\frac{1}{12}}, \quad \frac{f_n}{f_0} = 2^{\frac{n}{12}} (= 1.05946^n). \quad (7)$$

Za očekivati je da će omjeri frekvencija dva susjedna tona pokazati gotovo jednake vrijednosti iz izraza (7) odnosno da dva susjedna metalna praga skraćuju žicu za približno 6 % čime povisuju ton odnosno frekvenciju žice za isti iznos. Dakle, fizika stojnih transversalnih valova i temperirana glazbena ljestvica određuju položaj pragova na vratu gitare.

Pojavnost harmonika kod žica gitare

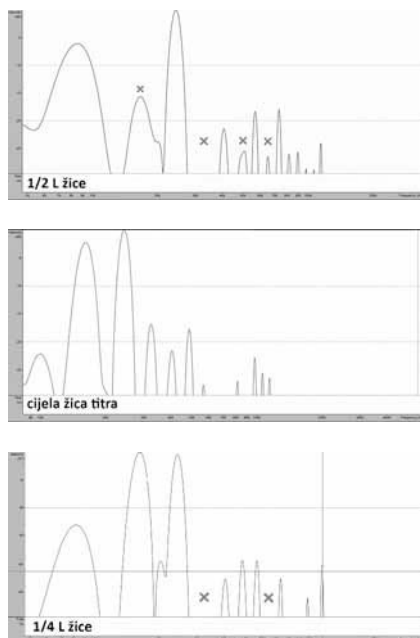
Svaki ton proizveden gitarom određuje kombinacija više frekvencija. Najniža frekvencija tona je osnovna frekvencija, a ostale više su prizvuci ili alikvotni tonovi. U slučaju kada su frekvencije prizvuka višekratnici osnovne frekvencije zovu se harmonici. Ako je osnovna frekvencija f_0 , tada viši harmonici imaju frekvencije:

$$f_n = (n + 1)f_0 \quad (8)$$

gdje je f_0 osnovna frekvencija i n prirodan broj.

Za spektralni prikaz tona i određivanje pojavnosti harmonika u ovisnosti o mjestu povlačenja žice može se koristiti računalni besplatni program *Overtone Analyser* ili *Visual Analyser*, a za snimanje zvuka koriste se slušalice kao mikrofoni postavljeni iznad žice gitare. Zanimljivo je ispitati pojavnost harmonika povlačenjem žice na udaljenostima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i ostalim duljinama žice ili jednostavno skraćivanjem duljine same žice.

Na slici 4 prikazan je zvučni zapis pobuđene E_2 (82 Hz) žice na $\frac{1}{2}$ duljine koji ukazuje na slab intenzitet ili izostanak harmonika višekratnika osnovne frekvencije (164 Hz, 328 Hz, 492 Hz i 656 Hz), a za $\frac{1}{4}$ duljine žice može se očekivati izostanak 4 i 8 harmonika. Općenito, viši harmonik će izostati ako je čvor u točki povlačenja žice. Broj frekvencija žice koje su bliže osnovnoj frekvenciji bit će veći što se pobuđivanje žice odvija bliže njezinom kraju. Pobuđivanje žice bliže konjicu gitare dat će “puniji” ton. Pored toga, zapisi zvuka pokazuju da osnovna frekvencija po intenzitetu dominira u odnosu na ostala viša titranja pa se postavlja pitanje doprinosi li navedena činjenica kvaliteti glazbenog instrumenta.



Slika 4. Zvučni zapisi titrajuće žice E_2 povlačene na $\frac{1}{2}L$, $\frac{1}{4}L$ žice u titranju.

Na slici 4 prikazan je zvučni zapis i pojavnost viših harmonika u ovisnosti o duljini žice. Slika pokazuje izostanak viših frekvencija s porastom duljine žice. Za eksperiment je nužno da se žica pokrene istom silom za svaku duljinu, a predana energija dovoljna je za stvaranje raznih načina titranja. Kod duže žice dostupna energija predana je velikom broju načina titranja dok je kod kratke žice gotovo sva energija uložena u osnovnu frekvenciju titranja. To uzrokuje dva do tri viša harmonika mjerljivog intenziteta za žicu koja titra $\frac{1}{4}$ duljine. Radi izbjegavanja povlačenja žice različitom silom, pomak žice u titranje trebalo bi izvoditi uređajem koji daje uvijek istu silu pomaka. Mogućnost je plastična trzalica pokretana elektromotorom.

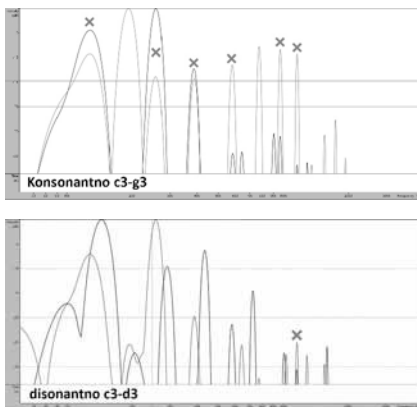
Harmonija tonova

Glazbenici se u pravilu koriste subjektivnim opisom zvuka. Tako na primjer glazbeni ton opisuju kao: svijetao, taman, šuplji, nazalan, grub, čist, bogat, tanak, promukao. Kako je glazba osjetilno iskustvo navedeni opis prikladan je za uho glazbenika, no često je dvosmislen. Zato je važno objektivno opisati glazbeno iskustvo. Tako se glasnoća zvuka opisuje jedinicama intenziteta, a ton frekvencijom titranja. Ipak, i objektivnim veličinama nije moguće uvijek opisati subjektivni doživljaj. Tako glasnoću zvuka povežujemo s intenzitetom, no ako je frekvencija dovoljno visoka, zvuk se neće čuti.

Prijedlog za naredni eksperiment je utvrditi zašto su neki tonovi ugodni našem mozgu, a drugi nisu. Obično se ugodne kombinacije tonova zovu konsonantni, a neugodne disonantni tonovi. Kombinacije dvaju ili više tonova zovu se akordi pa je akord kojeg čine tonovi C_3 i G_3 konsonantan dok je ton C_3 i H_3 izrazito disonantan. Za provjeru koliko su dva tona konsonantna odnosno disonantna potrebno je odrediti frekvencije tonova i vrijednost njihove udarne frekvencije za što je potreban gore naveden računalni program za analizu zvuka. Ako dva izvora različite frekvencije istodobno proizvode zvuk i pritom nisu u fazi, stvaraju se periodične promjene u glasnoći. Dva tona neznatne razlike u visini koji istovremeno proizvode zvuk stvaraju udare. Frekvencija promjene u intenzitetu zvuka uzrokovana udarima zove se udarna frekvencija f_u :

$$f_u = f_2 - f_1, \quad (9)$$

gdje su f_2 i f_1 frekvencije izvora. Kad je udarna frekvencija između 1 i 6 Hz čuje se periodična promjena u glasnoći dok se za razlike u frekvenciji ≥ 15 Hz udari ne čuju. Smatra se da konsonantni tonovi sadrže veći broj zajedničkih harmonika za razliku od disonantnih tonova. Osjećaj zvučne neugodnosti povezuje se s frekvencijom udara.



Slika 5. Zvučni zapis konsonantnog C_3-G_3 i disonantnog C_3-D_3 tona.

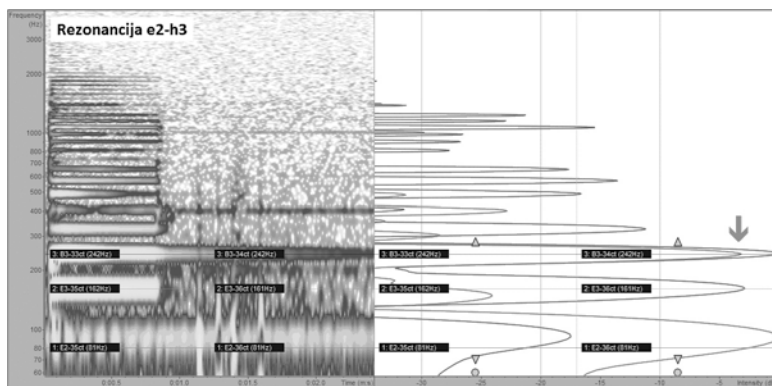
Za tonove C_3 i D_3 za koje se smatra da su izrazito disonantni može se odrediti frekvencija udara prema izrazu (9). Isto tako, na temelju snimljenog zvuka mogu se odrediti frekvencije udara za osnovnu frekvenciju i prva dva najintenzivnija harmonika. Pokazuje se da je srednja frekvencija udara za prva tri harmonika C_3 i D_3 , 33 Hz i za G_3 i Gis , 28 Hz. Kad se rezultat usporedi sa srednjom frekvencijom udara za konsonantni C_3 i G_3 ton koja je za sve više harmonike > 100 Hz može se reći da su

dva tona neugodna ili disonantna kad imaju frekvenciju udara $20 \text{ Hz} < f_u < 40 \text{ Hz}$. Za tonove koji se smatraju konsonantnima i koji se čine harmonični vidi se da posjeduju veliki broj zajedničkih harmonika što predočuje oznaka X na slici 5. Disonantni tonovi imaju samo jedno frekvencijsko poklapanje ili jedan zajednički harmonik za snimljeni spektar. Ipak, s glazbene strane konsonantno ili ugodno ne možemo smatrati “dobrom” kombinacijom tonova odnosno disonantno “lošom” kombinacijom već samo ono što kod slušatelja može stvoriti određenu emocionalnu reakciju.

Rezonancija na gitari

Ako se dva izvora zvuka iste osnovne frekvencije nalaze na nekoj udaljenosti, a samo jedan od njih proizvodi zvuk, drugi će apsorbirati energiju valova i započeti titrati istom frekvencijom. Opisana pojava zove se rezonancija.

Rezonancija na žicama gitare može se istražiti na jednoj ili dvije gitare. Za spektralni prikaz tona može se koristiti gore naveden računalni program za analizu zvuka. Slika 6 prikazuje snimku zvuka koju proizvodi žica E_2 kad slobodno titra u vremenu 1 sekunde. Titranje žice naglo se zaustavlja dok se zvuk i dalje snima. Snimka pokazuje da i nakon zaustavljanja žice postoji titranje koje stvara zvuk. Taj zvuk zabilježen je strelicom na slici 6. Opažena pojava se može objasniti kao rezonancija. Žica E_2 proizvodi zvuk frekvencije 81 Hz čiji je treći viši harmonik prema izrazu (8) frekvencije 243 Hz. Kako je gledajući odozdo prema gore druga žica na gitari žica H_3 frekvencije 243 Hz ona započinje titrati zajedno sa žicom E_2 te dalje proizvodi zvuk nakon zaustavljanja žice E_2 . Dakle, žica H_3 preuzela je energiju žice E_2 i nastavlja stvarati zvuk bez obzira na to što nije pokrenuta djelovanjem vanjske sile. Jednako se može provjeriti koja žica će biti u rezonanciji kada se pobudi na primjer ton D_3 frekvencije 147 Hz.



Slika 6. Rezonancija E_2 i H_3 žice.

Literatura

- [1] H. E. WHITE, D. H. WHITE, *Physics and Music: The Science of Musical Sound*, Dover Publications, New York, 1980.
- [2] D. CUNNAH, *Wobbly strings: calculating the capture rate of webcam using the rolling shutter effect in a guitar*, *Physics Education* 49 (4), 2014.