ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2021. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $2/286$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadatci iz matematike

3805. Dokaži da je $2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljivo sa 7.

3806. Dani su pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da je $x+y+z = 3$. Odredi maksimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{2x+13} + \sqrt[3]{3y+5} + \sqrt[4]{8z+12}.$$

3807. Nađi sve parove cijelih brojeva (x, y) takve da vrijedi

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

3808. Riješi sustav jednadžbi

$$64^{2x} + 64^{2y} = 12$$
$$64^{x+y} = 4\sqrt{2}.$$

3809. Odredi jednadžbu kružnice opisane trokutu čije stranice leže na pravcima $x+y-1 = 0$, $x - 2y + 8 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

3810. Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $ab + bc + ca = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a^2+5} + \frac{1}{b^2+5} + \frac{1}{c^2+5} \leq \frac{1}{2}.$$

3811. Tri strane OAB, OBC, OCA tetraedra $OABC$ su pravokutni trokuti s pravim kutovima u točki O. Ako je $|OA| = 7$, $|OB| = 2$, $|OC| = 6$, koliko je

$$P^2_{OAB} + P^2_{OBC} + P^2_{OCA} + P^2_{ABC}?$$

3812. Kružnice k_1 i k_2 polumjera 10 i 8 su tangencijalne iznutra i dodiruju se u točki A. Promjer od k_1 je $\overline{AD}$, a P i M su točke na k_1 i k_2 tako da je PM tangenta na k_2. Ako je $|PM| = \sqrt{20}$, koliki je kut $\sphericalangle PAD$?

3813. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ s njegove vanjske strane konstruirana je polukružnica. Na njoj je izabrana točka M čije spojnice s vrhovima D i C sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama E i F. Dokaži $|EF|^2 = |AE| \cdot |BF|$.

3814. U paralelogramu $ABCD$ dijagonale se sijeku u točki O. Točke L i M na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ su ortogonalne projekcije točke O na te dvije stranice. Dokaži

$$|AB| \cdot |AL| + |AD| \cdot |AM| = 2|AO|^2.$$

3815. Ako je visina uspravnog stošca H, a kut između izvodnice i ravnine baze jednak α, kolika mu je površina upisane sfere.

3816. Ako u trokutu ABC vrijedi $\alpha = 2\beta$, dokaži

$$|BC|^2 = (|AC| + |AB|)|AC|.$$

3817. Dokaži da je umnožak

$$P_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n$$

djeljiv s 2^n. Koliko je $\dfrac{P_n}{2^n}$?

3818. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 486. Uzgon je sila koja djeluje na tijela uronjena u tekućinu. Može se izračunati po formuli $F_u = \rho \cdot g \cdot V$, ρ je gustoća tekućine, a V je obujam tijela. Uzgon djeluje prema gore pa su zbog toga tijela uronjena u tekućinu prividno lakša. Leon je mjerio koliko dugo pada kuglica mase 13.5 g kroz vodu u menzuri visokoj 40 cm. Izmjereno vrijeme iznosilo je 0.34 s. Kolika je gustoća kuglice? Gustoća vode je 1000 kg/m^3, a ubrzanje sile teže je 10 m/s^2.

OŠ – 487. Odredite gustoću svojeg trokuta. Navedite od kojeg je materijala napravljen.

OŠ – 488. Petra je postavila ravnalo mase 50 g i duljine 40 cm tako da dvije petine ravnala vire izvan stola. Na taj kraći kraj stavila je gumicu i pomičući ju prema rubu ravnala uočila je da se ravnalo prevrne ako je težište gumice manje od 6 cm udaljeno od ruba ravnala. Izračunajte masu gumice.

OŠ – 489. Na satu fizike učenici su pomiješali 50 cm^3 vode temperature 36 °C i 50 cm^3 alkohola temperature 20 °C te dobili 95 cm^3 mješavine temperature 31 °C. Koliku su temperaturu učenici očekivali dobiti? Zbog čega je temperatura veća od očekivane? Gustoća vode je 1000 $\mathrm{kg/m^3}$, gustoća alkohola je 800 $\mathrm{kg/m^3}$, specifični toplinski kapacitet vode je 4200 J/kgK, a specifični toplinski kapacitet alkohola je 2500 J/kgK.

1756. Lijevo do konvergentne leće nalazi se predmet, a desno realna oštra slika predmeta. Predmet se nalazi 10 cm ispred (lijevo od) lijevog fokusa leće, a slika je 2.5 cm iza (desno od) desnog fokusa leće. Odredi jačinu leće i uvećanje.

1757. U trenutku presijecanja Zemljine putanje oko Sunca (na udaljenosti 1 a.j. od Sunca), asteroid ima 15 % veću brzinu u odnosu na Sunce od brzine kruženja Zemlje. Odredi ophodno vrijeme asteroida u godinama.

1758. U kalorimetru se nalazi 5.5 dl vode, temperature 5 °C. Nakon ulijevanja jednakog volumena etilnog alkohola, ravnotežna temperatura se uspostavi na 24 °C. Odredi početnu temperaturu alkohola i porast entropije. Specifični toplinski kapacitet alkohola je 2500 J/kgK, a gustoća 790 $\mathrm{kg/m^3}$. Gubitke topline i isparavanje alkohola zanemari.

1759. Mješavina vodika i dušika ima gustoću 31 % manju od gustoće zraka pri istoj temperaturi i tlaku. Odredi volumni udio vodika u mješavini. Odredi brzinu zvuka u mješavini pri temperaturi 310 K. Vodik i dušik su dvoatomni plinovi, atomske mase 1 i 14 g/mol.

1760. U trenutku prolaza kroz ravnotežni položaj, brzina njihala je 35 cm/s, a 0.2 s kasnije brzina iznosi 22 cm/s. Odredi period njihanja, duljinu njihala i kut maksimalnog otklona.

1761. Odredi prosječnu gustoću planeta koji ima 10 puta manju masu od Zemlje, uz 45 % slabije ubrzanje sile teže na površini. Prosječna gustoća Zemlje iznosi 5520 $\mathrm{kg/m^3}$.

1762. Laser emitira monokromatsku svjetlost valne duljine 594 nm. Ako mu je izlazna snaga 5 mW, koliko fotona emitira laser u jednoj sekundi?

C) Rješenja iz matematike

3777. *Dokaži da je broj*

$$\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$$

složen.

Rješenje. Stavimo li $a = 5^{25}$ imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a^5-1}{a-1} &= a^4+a^3+a^2+a+1\\
&= (a^4+9a^2+1+6a^3+2a^2+6a)\\
&\quad -(5a^3+10a^2+5a)\\
&= (a^2+3a+1)^2-5a(a+1)^2\\
&= (a^2+3a+1)^2-[5^{13}(a+1)]^2\\
&= [a^2+3a+1-5^{13}(a+1)]\\
&\quad \cdot [a^2+3a+1+5^{13}(a+1)].
\end{aligned}$$

Sada treba dokazati da su oba faktora u uglatim zagradama veći od 1. Desna zagrada je očito veća od 1, pa to treba provjeriti i za lijevu:

$$\begin{aligned}
& a^2+3a+1-5^{13}(a+1) > 1\\
\iff & a^2+3a-5^{13}a-5^{13} > 0\\
\iff & a^2-5^{13}a+a-5^{13}+2a > 0\\
\iff & a(a-5^{13})+(a-5^{13})+2a > 0.
\end{aligned}$$

Kako je $a = 5^{25} > 5^{13}$ tvrdnja očito vrijedi pa je i dokaz gotov.

Marko Dodig (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3778. *Koliko ima trojki nenegativnih cijelih brojeva* (x, y, z) *koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z = 2021?$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&xyz+xy+yz+zx+x+y+z = 2021\\
&(xyz+xy)+(yz+y)+(zx+x)+(z+1) = 2022\\
&xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+(z+1) = 2022\\
&(xy+y+x+1)(z+1) = 2022\\
&[y(x+1)+(x+1)](z+1) = 2022\\
&(x+1)(y+1)(z+1) = 2\cdot 3\cdot 337
\end{aligned}$$

Ako su svi brojevi x, y, z strogo pozitivni, brojevi $x+1$, $y+1$, $z+1$ su međusobno različiti pa ima $3 \cdot 2 = 6$ rješenja. Ako je samo jedan od x, y, z jednak nuli ima $3 \cdot 6 = 18$ rješenja. Ako su točno dva broja jednaka nuli imamo 3 rješenja. Ukupno ih ima $6 + 18 + 3 = 27$.

Marko Dodig (2), Zagreb

3779. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45.$$

Prvo rješenje.

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45, \quad x \neq 2$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{2x}{x-2} + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2x}{x-2} = 45$$

$$\left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{x-2} = 45$$

$$\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{x-2} - 45 = 0$$

Uvedemo li supstituciju $t = \dfrac{x^2}{x-2}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 4t - 45 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = -5$ i $t_2 = 9$.

1° Za $t = -5$ je

$$\frac{x^2}{x-2} = -5,$$

$$x^2 + 5x - 10 = 0$$

$$\Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

2° Za $t = 9$ je

$$\frac{x^2}{x-2} = 9,$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\Longrightarrow x_3 = 3 \text{ i } x_4 = 6.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

Drugo rješenje. Uz uvjet $x \neq 2$ jednadžbu pišemo u obliku:

$$(x-2)^2 x^2 + 4x^2 - 45(x-2)^2 = 0$$

tj.

$$x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 180x - 180 = 0.$$

Uočimo sljedeću faktorizaciju polinoma četvrtog stupanja na lijevoj strani jednadžbe:

$$\begin{aligned} &x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 180x - 180 \\ &= x^4 - 3x^3 - x^3 + 3x^2 - 40x^2 \\ &\quad + 120x + 60x - 180 \\ &= x^3(x-3) - x^2(x-3) - 40x(x-3) \\ &\quad + 60(x-3) \\ &= (x-3)(x^3 - x^2 - 40x + 60). \end{aligned}$$

Početna jednadžba poprima oblik

$$(x-3)(x^3 - x^2 - 40x + 60) = 0.$$

Odavde vidimo $x_1 = 3$ i nastavljamo dalje rješavati jednadžbu trećeg stupnja

$$x^3 - x^2 - 40x + 60 = 0.$$

Ponovno uočavamo faktorizaciju:

$$\begin{aligned} &x^3 - x^2 - 40x + 60 \\ &= x^3 - 6x^2 + 5x^2 - 30x - 10x + 60 \\ &= x^2(x-6) + 5x(x-6) - 10(x-6) \\ &= (x-6)(x^2 + 5x - 10). \end{aligned}$$

Sada dobivamo jednadžbu:

$$(x-6)(x^2 + 5x - 10) = 0$$

iz koje je $x_2 = 6$. Preostaje riješiti kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 + 5x - 10 = 0,$$

a njena rješenja su

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

Kako sva rješenja zadovoljavaju uvjet $x \neq 2$, sva su rješenja početne jednadžbe:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 6,$$

$$x_3 = \frac{-5 + \sqrt{65}}{2}, \quad x_4 = \frac{-5 - \sqrt{65}}{2}.$$

Filip Vučić (2),
I. gimnazija, Zagreb

3780. *Riješi jednadžbu*

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$$

Rješenje. Početnu jednadžbu zapišimo u obliku

$$\frac{1}{5}(5^x)^2 + 5 \cdot 5^x = 250.$$

Uvođenjem supstitucije $u = 5^x$ dobiva se kvadratna jednadžba

$$u^2 + 25u - 1250 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su:

$$u_{1,2} = \frac{-25 \pm 75}{2},$$

odnosno $u_1 = 25$, $u_2 = -50$. Vraćanjem supstitucije dobivaju se jednadžbe:

$$5^x = 25$$
$$5^x = -50.$$

Rješenje prve jednadžbe je $x = 2$, a kako je za svaki realan broj x broj 5^x pozitivan, druga jednadžba nema rješenja u skupu realnih brojeva pa je $x = 2$ jedino rješenje početne jednadžbe.

Filip Vučić (2), Zagreb

3781. *Nađi realne brojeve* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *za koje vrijedi*

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Rješenje.

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \ / \ \cdot 2$$

$$x_1 - 2\sqrt{x_1 - 1^2} + x_2 - 2 \cdot 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + x_n - 2n\sqrt{x_n - n^2} = 0$$

$$\left(x_1 - 1^2 - 2\sqrt{x_1 - 1^2} + 1^2\right) + \left(x_2 - 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x_2 - 2^2} + 2^2\right) + \ldots + \left(x_n - n^2 - 2n\sqrt{x_n - n^2} + n^2\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{x_1 - 1^2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2 - 2^2} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{x_n - n^2} - n\right)^2 = 0$$

Vidimo da svaki broj u zagradi mora biti jednak nuli, pa dobivamo rješenja:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2 \cdot 2^2, \ldots, x_n = 2n^2.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3782. *Neka su* a, b, c *pozitivni brojevi takvi da je* $a^2+b^2+c^2 = 5$. *Dokaži nejednakost*

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} \geq 1.$$

Rješenje. Iz odnosa aritmetičke i geometrijske sredine imamo:

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{(2b+3c)a}{25} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{2b+3c} \cdot \frac{(2b+3c)a}{25}} = \frac{2}{5}a^2,$$

$$\frac{b^3}{2c+3a} + \frac{(2c+3a)b}{25} \geqslant 2\sqrt{\frac{b^3}{2c+3a} \cdot \frac{(2c+3a)b}{25}} = \frac{2}{5}b^2,$$

$$\frac{c^3}{2a+3b} + \frac{(2a+3b)c}{25} \geqslant 2\sqrt{\frac{c^3}{2a+3b} \cdot \frac{(2a+3b)c}{25}} = \frac{2}{5}c^2.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti je:

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} + \frac{5(ab+ac+bc)}{25} \geqslant \frac{2}{5}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} \geqslant 2 - \frac{ab+ac+bc}{5}.$$

Na kraju iskoristimo nejednakost $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$ pa je:

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} \geqslant 2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{5} = 2 - 1 = 1.$$

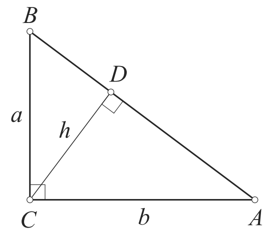
Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a = b = c = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3783. *U pravokutnom trokutu ABC vrijedi* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h} = 1$, *gdje su* a *i* b *duljine kateta i* h *duljina visine na hipotenuzu, prirodni brojevi. Kolike su duljine stranica tog trokuta?*

Rješenje. Iz sličnosti trokuta CBD i ABC dobivamo za visinu h izraz
$$\frac{h}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

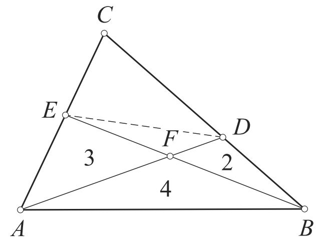


Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobiva se
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\frac{1}{b} = 1.$$
Pomnožimo dobivenu jednadžbu s ab:
$$a + b + \sqrt{a^2+b^2} = ab.$$
Kvadriranjem se dobiva
$$a^2 + b^2 = (ab)^2 - 2ab(a+b) + (a+b)^2$$
tj.
$$0 = (ab)^2 - 2ab(a+b) + 2ab.$$
Prethodnu jednadžbu možemo kratiti s ab
$$ab - 2(a+b) + 2 = 0$$
tj.
$$a = \frac{2b-2}{b-2} = \frac{2b-4+2}{b-2} = 2 + \frac{2}{b-2}.$$
Budući da je a prirodan broj, zaključujemo $(b-2) \in \{-2,-1,1,2\}$, odnosno $b \in \{0,1,3,4\}$. Iz ispitivanja odmah možemo izbaciti slučaj $b=0$ i suziti skup mogućnosti za b na oblik $b \in \{1,3,4\}$. Uvrštavanjem $b=1$ dobiva se $a=0$ pa se taj slučaj izbacuje, a za $b=3$ dobiva se $a=4$ i obrnuto za $b=4$ dobiva se $a=3$ pa su to isti trokuti. Stoga neka je $a=3$ i $b=4$. No, kod ovog je trokuta $h=\frac{12}{5}$ pa čak niti taj trokut ne zadovoljava sve uvjete zadatka, no kad bi samo stranice trokuta morali biti prirodni brojevi, onda bi jednadžbu ispunjavao jedino egipatski trokut s katetama duljine 3 i 4 te hipotenuzom duljine 5.

Filip Vučić (2), Zagreb

3784. *Dan je trokut ABC i dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ (D i E su na $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$) koje se sijeku u točki F. Površine trokuta BDF, AFE, ABF su redom jednake 2, 3, 4. Kolika je površina četverokuta $CEFD$?*

Rješenje. Ako dva trokuta imaju zajedničku visinu, onda je omjer njihovih površina jednak omjeru stranica na koje su te visine spuštene. Označimo $P_{CDFE} = x$.

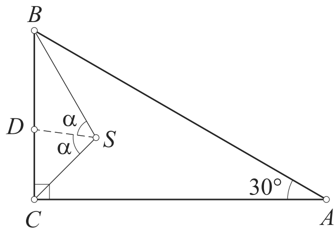


$$\frac{2}{4} = \frac{P(FBD)}{P(ABF)} = \frac{|FD|}{|AF|}$$
$$= \frac{P(FDE)}{P(AFE)} = \frac{P(FDE)}{3}$$
$$\Longrightarrow P(FDE) = \frac{3}{2}.$$
Isto tako je:
$$\frac{7}{x+2} = \frac{P(AEB)}{P(BCE)} = \frac{|AE|}{|EC|}$$
$$= \frac{P(ADE)}{P(CDE)} = \frac{\frac{3}{2}+3}{x-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{9}{2x-3}$$
$$9x + 18 = 14x - 21$$
$$x = 7\frac{4}{5}.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3785. *U pravokutnom trokutu ABC jedinične duljine hipotenuze $\overline{AB}$, kut uz vrh A je jednak 30°. Središte upisane mu kružnice je točka S. Simetrala kuta $\sphericalangle CSB$ dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dva dijela. Izračunaj njihove duljine.*

Rješenje. Budući da je ABC trokut s jednim kutom od 30°, imamo $|AB| = 1$, $|BC| = \frac{1}{2}$, $|AC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Budući da se točka S nalazi na sjecištu simetrala kutova trokuta ABC, dobivamo

$$\sphericalangle BCS = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$
$$\sphericalangle CBS = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Neka simetrala kuta $\sphericalangle CSB$ siječe $\overline{BC}$ u točki D. Tada je $\sphericalangle CSD = \sphericalangle BSD = \alpha$ pa po poučku o sinusima primijenjenom na trokute CSD i BSD redom dobivamo:

$$\frac{|SD|}{\sin(\sphericalangle BCS)} = \frac{|CD|}{\sin\alpha}$$
$$\frac{|SD|}{\sin(\sphericalangle CBS)} = \frac{|BD|}{\sin\alpha}.$$

Dijeljenjem prethodnih dviju jednadžbi i uvrštavanjem mjera kutova dobiva se

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{\sin(\sphericalangle CBS)}{\sin(\sphericalangle BCS)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Znajući da je $|BC| = \frac{1}{2} = |BD| + |CD|$, imamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice čije je rješenje $|CD| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $|BD| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Filip Vučić (2), Zagreb

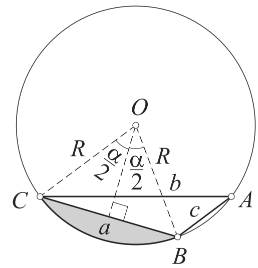
3786. *Oko trokuta kojemu su duljine stranica $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 7$ cm, opisana je kružnica. Izračunaj površinu odsječka kružnice kojemu je a tetiva.*

Rješenje. Najprije po Heronovoj formuli izračunamo površinu danog trokuta:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} = 42.$$

Polumjer opisane kružnice računamo po formuli

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ cm}.$$



Sada je

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{5}$$
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{24}{25}$$
$$\Longrightarrow \alpha = 73^\circ 44' 23''.$$

Izračunamo i

$$P_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{24}{25}$$
$$= 75 \text{ cm}^2.$$

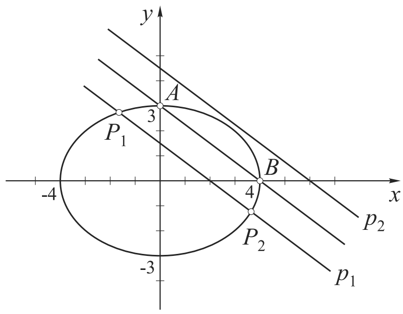
Površina kružnog odsječka jednaka je

$$P = P_{\text{isječka}} - P_{\triangle OCB}$$
$$= \frac{R^2\pi}{360^\circ}\alpha - 75 \text{ cm}^2$$
$$\approx 25.547 \text{ cm}^2.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3787. *Pravac $3x + 4y = 12$ siječe elipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$ u točkama A i B. Koliko na elipsi ima točaka P takvih da je površina trokuta PAB jednaka 3?*

Rješenje. Kako je $A(0,3)$ i $B(4,0)$ po Pitagorinu poučku $d(A,B) = 5 = a$. Kako površina trokuta mora iznositi 3, iz formule $P = \frac{a \cdot h}{2}$ slijedi $h = \frac{6}{5}$.



Sada tražimo pravce koji su od danog pravca $3x+4y-12=0$ udaljeni za $\frac{6}{5}$ i s njim su paralelni. Njih ćemo naći tako da na osi apscisa nađemo točke koje su na toj udaljenosti od danog pravca i kroz njih povučemo pravce paralelne zadanom. Uzmemo li $T(x_0,0)$, prema formuli je:

$$\frac{6}{5}=\frac{|Ax_0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \implies |3x_0-12|=6,$$

pa imamo točke $T_1(2,0)$ i $T_2(6,0)$. Pravci koji prolaze tim točkama i paralelni su danom pravcu $y=-\frac{3}{4}x+3$ su

$$p_1\ldots y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$
$$p_2\ldots y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}.$$

Tražene točke su točke presjeka ovih pravaca s elipsom. Rješavamo sustave:

1.
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$
$$9x^2+16y^2=144$$

Rješavanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2-2x-6=0$ čija su rješenja $x_{1,2}=1\pm\sqrt{7}$. Dobili smo točke

$$P_1\left(1-\sqrt{7},\frac{3}{4}(1+\sqrt{7})\right) \quad \text{i}$$
$$P_2\left(1+\sqrt{7},\frac{3}{4}(1-\sqrt{7})\right).$$

2.
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$$
$$9x^2+16y^2=144$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2-6x+10=0$ čija rješenja nisu realna. Dakle, u ovom slučaju pravac ne siječe elipsu.

Znači, P_1 i P_2 su jedine dvije točke na danoj elipsi takve da je površina trokuta PAB jednaka 3.

Marko Dodig (2), Zagreb

3788. *Zadan je niz* $a_0=a_1=1$ *i za* $n\geq 1$

$$a_{n+1}=\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_1}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}}.$$

Odredi opći član niza.

Rješenje. Učinimo zadanu rekurziju pogodnijom za iteracije prepoznavanjem:

$$a_n=\frac{{a_1}^2}{a_0}+\frac{{a_2}^2}{a_1}+\ldots+\frac{{a_{n-1}}^2}{a_{n-2}}.$$

Time dobivamo rekurziju:

$$a_{n+1}=a_n+\frac{{a_n}^2}{a_{n-1}}. \qquad (1)$$

Ta je rekurzija pogodnija za iteriranje. Naime, odredimo članove niza za male n i pokušajmo naslutiti opći član niza nakon čega treba dokazati tu slutnju.

Izračunajmo prvih sedam članova:

$$a_0=a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6,$$
$$a_4=24,\ a_5=120,\ a_6=720.$$

Uočavamo niz faktorijela prirodnih brojeva pa naslućujemo da je opći član niza $a_n=n!$. Tu slutnju sada treba i dokazati. Uvrštavanjem u (1) dobiva se:

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=n!+\frac{n!\cdot n!}{(n-1)!}\\ &=n!+n\cdot n!\\ &=n!(n+1)=(n+1)!. \end{aligned}$$

Zato je $a_n=n!$ opći član zadanog niza.

Filip Vučić (2), Zagreb

3789. *Grupa turista je posjetila izložbu na kojoj je bilo 200 slika. Nijedan od posjetitelja nije vidio sve slike, ali je svaku od njih vidio barem jedan od njih. Dokaži da postoji par posjetitelja* A, B *i par slika* α, β *tako da je* A *vidio* α *ali ne i* β, *dok je* B *vidio* β *ali ne i* α.

Rješenje. Označimo s A posjetitelja koji je vidio najveći broj slika (ili jednog od njih). Postoji bar jedna slike, recimo β, koju A

nije vidio. Barem jedan posjetitelj (recimo B) vidio je β. B nije vidio sve slike koje je vidio A. Označimo s α jednu od onih koje nije vidio. Dakle, A, B i α, β su traženi parovi.

Filip Vučić (2), Zagreb

3790. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokaži jednakost*

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \sin^2\gamma.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta\\
&\quad - 2\sin\alpha\sin\beta\cos[\pi - (\alpha+\beta)]\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta\\
&\quad + 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&\quad - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&= (\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta)\\
&\quad + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)\\
&\quad + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha\\
&\quad + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&= (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2\\
&= \sin^2(\alpha+\beta)\\
&= \sin^2[\pi - (\alpha+\beta)]\\
&= \sin^2\gamma.
\end{aligned}$$

Marko Dodig (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 478. *U menzuri kojoj je unutarnja površina dna 5 cm^2 je voda. Razina vode je udaljena 45 mm od gornjeg ruba menzure. Učenik ima staklene kuglice mase 5 g. Koliko takvih kuglica može staviti u menzuru prije nego se voda počne prelijevati? Gustoća stakla je 2500 kg/m^3.*

Rješenje.

$A = 5\ \text{cm}^2$

$h = 45\ \text{mm}$

$m_1 = 5\ \text{g}$

$\underline{\rho_{\text{stakla}} = 2500\ \text{kg/m}^3 = 2.5\ \text{g/cm}^3}$

$n = ?$

$V = Ah = 5\ \text{cm}^2 \cdot 4.5\ \text{cm} = 22.5\ \text{cm}^3$

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho} = \frac{5\ \text{g}}{2.5\ \text{g/cm}^3} = 2\ \text{cm}^3$$

$$n = \frac{V}{V_1} = \frac{22.5\ \text{cm}^3}{2\ \text{cm}^3} = 11.25$$

Može se staviti 11 kuglica.

Petra Jurković (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 479. *Opruga je u neopterećenom stanju dugačka 15 cm. Kad se pomoću nje vuče drveni kvadar po suhom stolu njena je duljina 19 cm, a kad se taj isti kvadar vuče po mokrom stolu duljina je opruge 18 cm. Usporedite koeficijente trenja po mokrom i suhom stolu. Koliko je u postotcima voda smanjila koeficijent trenja?*

Rješenje.

$l_0 = 15\ \text{cm}$

$l_1 = 19\ \text{cm}$

$\underline{l_2 = 18\ \text{cm}}$

$\dfrac{\mu_2}{\mu_1} = ?$

$\Delta l_1 = 4\ \text{cm}$

$\Delta l_2 = 3\ \text{cm}$

$\mu G = k\Delta l$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{k\cdot\dfrac{\Delta l_2}{G}}{k\cdot\dfrac{\Delta l_1}{G}} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{3\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 0.75.$$

Voda je smanjila koeficijent trenja 25 posto.

Marin Lakoš (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 480. *Ploča električnog štednjaka ima dvije spirale. Kad je uključena samo prva, litra vode zakuha za 5 minuta, a kad je uključena samo druga spirala, litra* *vode zakuha za 7 minuta. Koliko će vremena trebati da ista količina vode zakuha kad se uključe obje spirale? Jesu li one spojene serijski ili paralelno? Zanemarite zagrijavanje posude. Specifični toplinski kapacitet vode je* 4200 J/kgK, *njena je gustoća* 1000 kg/m^3, *napon električne mreže je 230 V.*

Rješenje.

$$t_1 = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$$
$$t_2 = 7 \text{ min} = 420 \text{ s}$$
$$V = 1 \text{ L}$$
$$m = 1 \text{ kg}$$
$$U = 230 \text{ V}$$
$$c = 4200 \text{ J/ kgK}$$
$$\underline{\rho = 1000 \text{ kg/ m}^3}$$
$$t_3 = ?$$
$$W_1 = W_2 = W_3$$
$$P_1 t_1 = P_2 t_2$$
$$P_1 \cdot 300 \text{ s} = P_2 \cdot 420 \text{ s}$$
$$P_1 = 1.4 P_2$$

Spirale su spojene paralelno i vrijedi:

$$P_3 = P_1 + P_2 = 2.4 P_2$$
$$W_2 = W_3$$
$$P_2 t_2 = P_3 t_3$$
$$P_2 \cdot 420 \text{ s} = 2.4 P_2 \cdot t_3$$
$$t_3 = \frac{420 \text{ s}}{2.4} = 175 \text{ s}.$$

Luka Krašnjak (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 481. *Lopta pri svakom udaru o tlo 40 posto svoje kinetičke energije pretvori u toplinu. Na koju će visinu odskočiti nakon drugog odskoka ako je ispuštena s visine 2 metra?*

Rješenje.

$$h = 2 \text{ m}$$
$$\underline{\eta = 0.6}$$
$$h_2 = ?$$

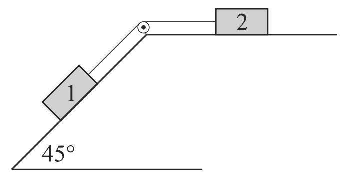
$$E_{gp_1} = 0.6 E_{gp}$$
$$E_{gp_2} = 0.6 E_{gp_1} = 0.36 E_{gp}$$

Visina i gravitacijska potencijalna energija su proporcionalne veličine pa vrijedi:

$$h_2 = 0.36 \cdot h = 0.36 \cdot 2 \text{ m}$$
$$= 0.72 \text{ m}.$$

Vito Martinović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1742. *Koliki najmanje mora biti koeficijent trenja* μ, *isti za oba tijela na slici, da se sistem tijela ne počne gibati? Masu niti i koloture zanemariti.* ($m_1 = 3.2$ *kg*, $m_2 = 1$ *kg*)



Rješenje. Sila koja vuče sistem prema dolje je:

$$F = m_1 g \sin 45^\circ.$$

Sila trenja koja se opire tom gibanju iznosi:

$$F_{tr} = \mu m_1 g \cos 45^\circ + \mu m_2 g.$$

Da bi sistem tijela mirovao mora biti:

$$F_{tr} \geq F,$$
$$\mu m_1 g \cos 45^\circ + \mu m_2 g \geq m_1 g \sin 45^\circ.$$

Odatle je

$$\mu \geq \frac{3.2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3.2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$$
$$\approx 0.6935.$$

Marko Dodig (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Borna Cesarec (3),
Srednja škola Krapina, Krapina

1743. *S koje smo visine pustili tijelo bez početne brzine, ako je u posljednjoj sekundi pada prevalilo* 36 % *ukupnog puta?* ($g = 9.81$ m/s^2, *otpor zraka zanemariti)*

Rješenje. Neka je τ vrijeme pada tijela, s početne visine H. Jednadžba gibanja slobodnog pada je

$$H = \frac{g}{2}\tau^2.$$

Put u posljednjoj sekundi $(0.36 \cdot H)$ jednak je

$$0.36H = \frac{g}{2}\tau^2 - \frac{g}{2}(\tau - 1)^2.$$

Eliminacijom τ iz oba izraza dobiva se

$$\begin{aligned}
0.36H &= H - \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - 1\right)^2 \\
0.36H &= H - \left(H - g\sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{g}{2}\right) \\
0.36H &= g\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{g}{2}.
\end{aligned}$$

Supstitucijom $u = \sqrt{H}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$0.36u^2 = 4.43u - 4.905.$$

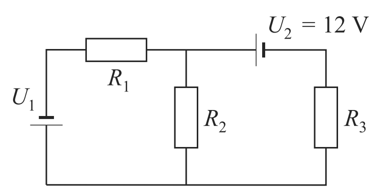
Njena su rješenja

$$\begin{aligned}
u_1 &= 11.075 \\
&\implies H = 122.66 \text{ m}, \\
u_2 &= 1.23 \\
&\implies \tau < 1, \quad \text{nije fizikalno.}
\end{aligned}$$

Rješenje je $H = 122.66$ m.

Filip Vučić (2),
I. gimnazija, Zagreb

1744. *Koliki je napon U_1 izvora na shemi ako kroz njega (i kroz otpornik R_1) teče struja 1.2 A? ($R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 7\ \Omega$)*



Rješenje. Drugi Kirchoffov zakon za lijevu petlju strujnog kruga kaže da je napon U_1 jednak sumi pada napona na otpornicima R_1 i R_2

$$U_1 = I_1R_1 + I_2R_2.$$

Analogno za desnu petlju dobivamo:

$$U_2 = -I_2R_2 + I_3R_3.$$

Prvi Kirchoffov zakon za čvor struja daje

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Uvrštavanjem zadanih veličina dobijemo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
U_1 &= 6 + 3I_2 \\
12 &= -3I_2 + 7I_3 \\
1.2 &= I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Rješavanjem donje dvije jednadžbe i uvrštavanjem $I_2 = 1.56$ A u prvu, dobivamo

$$U_1 = 4.92 \text{ V}.$$

Filip Vučić (2), Zagreb

1745. *Element lantan u prirodi ima dva izotopa, ^{139}La i ^{138}La, od kojih je potonji radioaktivan s vremenom poluraspada 105 milijardi godina. Ako je aktivnost 100 grama čistog lantana 81.56 bekerela (Bq), koliki su udjeli dvaju izotopa u lantanu?*

Rješenje. Zadana aktivnost A i vrijeme poluživota T daju za broj atoma radioizotopa ^{138}La:

$$\begin{aligned}
N(^{138}\text{La}) &= \frac{AT}{\ln 2} \\
&= \frac{81.56 \cdot 105 \cdot 10^9 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln 2} \\
&= 3.9 \cdot 10^{20}.
\end{aligned}$$

Ukupno je lantanovih atoma u 100 g (uz mali udio ^{138}La)

$$\begin{aligned}
N_u &= \frac{m}{M}N_A = \frac{100}{139} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \\
&= 4.332 \cdot 10^{23}.
\end{aligned}$$

Tada je udio ^{138}La

$$\begin{aligned}
x(^{138}\text{La}) &= \frac{N(^{138}\text{La})}{N_u} \\
&= 0.0009 = 0.09\ \%.
\end{aligned}$$

Ostatak otpada na stabilni izotop:

$$\begin{aligned}
x(^{139}\text{La}) &= 1 - x(^{138}\text{La}) \\
&= 0.9991 = 99.91\ \%.
\end{aligned}$$

Ur.

1746. *Zvijezde Castor i Pollux u zviježđu Blizanaca su redom 37 i 32 puta sjajnije od našeg Sunca. Na kojoj se udaljenosti od njih može očekivati planete jednako izložene toplini matične zvijezde kao Zemlja? Udaljenost Zemlje od Sunca je 149.6 milijuna km.*

Rješenje. Uz izloženost toplini proporcionalnoj sjaju na udaljenosti r od matične zvijezde, uz činjenicu da relativni sjaj opada s kvadratom udaljenosti imamo za Castor:

$$\frac{I(R)}{I_Z} = \frac{37}{R^2} \cdot \frac{R_Z^2}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} R_{Castor} &= R_Z \cdot \sqrt{37} \\ &= 910 \cdot 10^6 \text{ km}. \end{aligned}$$

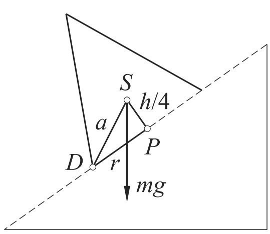
Analogno je

$$\begin{aligned} R_{Pollux} &= R_Z \cdot \sqrt{32} \\ &= 846.3 \cdot 10^6 \text{ km}. \end{aligned}$$

Ur.

1747. *Stožac visine h i radijusa osnovke r načinjen je od homogenog materijala i postavljen osnovkom na podlogu s kojom je koeficijent trenja μ. Podlogu polagano naginjemo tako da dobivamo kosinu kojoj se kut nagiba α polagano povećava. Uz koji će se uvjet stožac prevaliti prije nego proklizne na podlozi?*

Rješenje. Promotrimo stožac s oznakama na slici.



Stožac se neće prevaliti dok vektor težine (mg) s hvatištem u S ne prekorači donji rub stošca (D). To bi se dogodilo za kut kosine jednak $\alpha = \sphericalangle PSD$. Iz pravokutnog trokuta vidimo da je tangens tog kuta jednak $r/\frac{h}{4}$, tj.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4r}{h}.$$

Pritom smo koristili činjenicu da se težište S nalazi na četvrtini visine stošca. Stožac neće prokliznuti prije nego komponenta sile niz kosinu nadvlada silu trenja, tj.

$$mg \sin \alpha_2 = \mu mg \cos \alpha_2,$$

što daje

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu.$$

Dakle uvjet da se stožac prevali prije nego proklizne je

$$\operatorname{tg} \alpha_2 > \operatorname{tg} \alpha_1,$$

odnosno

$$\mu > \frac{4r}{h}.$$

Filip Vučić (2), Zagreb

1748. *Plemeniti plin ksenon (Xe) ima vrelište na $-108\,^\circ C$. Koliku će najveću gustoću postići plinovita faza ksenona pri uobičajenom tlaku (101 325 Pa), na temperaturi neposredno iznad vrelišta? Atomska masa ksenona je 131.3 g/mol.*

Rješenje. Iz jednadžbe stanja idealnog plina

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

dijeljenjem s V, uz $\rho = m/V$ dobivamo

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Gustoća je maksimalna neposredno iznad temperature vrelišta

$$\begin{aligned} \tau \cdot 10^6 \text{ km} &= -108\,^\circ\text{C} \\ &= 165.15 \text{ K}, \end{aligned}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{101\,325 \cdot 0.1313}{8.314 \cdot 165.15} \\ &\approx 9.7 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

Pritom je radi usklađenosti jedinica preračunato $M = 0.1313$ kg/mol.

Filip Vučić (2), Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

$F_{11} = 89$ – jedanaesti Fibonaccijev broj

$8^2 + 9^2 = 145$	$4^2 = 16$
$1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$	$1^2 + 6^2 = 37$
$4^2 + 2^2 = 20$	$3^2 + 7^2 = 58$
$2^2 + 0^2 = 4$	$5^2 + 8^2 = 89$