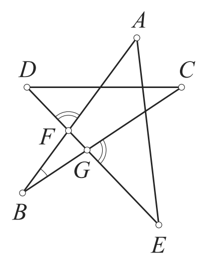
Školsko natjecanje iz matematike, 17. veljače 2021.

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja su održana diljem Hrvatske 17. veljače 2021. Svi učenici rješavali su po sedam zadataka. Prvih pet su lakši i svaki se bodovao s po 6 bodova, a zadnja dva su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike srednjih škola natjecanje je trajalo tri sata.

Zadatci – A varijanta

I. razred

1. Put koji povezuje mjesto A s mjestom B u prvom je dijelu ravan, a ostatak je nizbrdica. Biciklist je iz mjesta A u mjesto B stigao za 1 sat i 15 minuta. Pri povratku mu je trebalo pola sata više. Na ravnome dijelu ceste vozio je brzinom za 4 km/h većom od brzine na uzbrdici. Vozeći nizbrdo dvostruko je brži nego kad ide uzbrdo i za 50 % brži nego na ravnom dijelu ceste. Kolika je udaljenost mjesta A i B?



2. Točke A, B, C, D i E povezane su dužinama kao na slici. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku dužinu $\overline{DE}$ redom u točkama F i G. Ako je $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ i ako je $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$, odredi $\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA$.

3. Svaki od trojice prijatelja popisao je svojih deset omiljenih računalnih igara. Na sva tri popisa zajedno našlo se 15 različitih igara. Uspoređujući svoje popise uočili su da svaka dvojica imaju po 6 istih igara na popisu.
Koliko se igara nalazi na sva tri popisa?

4. Na ploči su napisani brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2021$. Je li moguće brojeve brisati jednog po jednog sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj, tako da nakon svakog brisanja zbroj svih preostalih brojeva bude složen broj?

5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 3 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 2, 4, 6 ni 9?

6. U koordinatnom sustavu u ravnini dana su dva pravca koja se sijeku pod pravim kutom u točki $A(6, 8)$. Sjecišta P i Q tih pravaca s osi y su simetrična u odnosu na ishodište. Odredi površinu trokuta APQ.

7. Odredi sve prirodne brojeve n za koje su među brojevima n, $4^n + 1$ i $n^2 + 2$ barem dva prosta broja.

II. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p takve da je
$$6n^2-(2p+9)n+p+3=0.$$

2. Zapisan je 2021-znamenkasti broj. Svaki dvoznamenkasti broj koji čine dvije uzastopne znamenke tog broja (bez promjene poretka) djeljiv je sa 17 ili s 23. Znamenka jedinica danog broja je 7. Koja je njegova prva znamenka?

3. Dana je žica duljine 10 m koju treba presjeći na dva dijela, te od jednog dijela napraviti kvadrat, a od drugog jednakostranični trokut. Na kojem mjestu treba presjeći žicu da bi ukupna površina kvadrata i jednakostraničnog trokuta bila što manja?

4. U svako polje tablice 10×10 upisan je po jedan prirodni broj, a svih 20 zbrojeva brojeva u njezinim retcima i stupcima međusobno su različiti. Koliko iznosi najmanji mogući zbroj svih brojeva u tako popunjenoj tablici?

5. Odredi sve parove $\{a,b\}$ različitih realnih brojeva takve da jednadžbe
$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{i} \qquad x^2+bx+a=0$$
imaju barem jedno zajedničko rješenje u skupu realnih brojeva.

6. Neka je $ABCD$ pravokutnik u kojem je $|AB|=1$ i $|BC|=\sqrt{3}$. Upisane kružnice trokuta ABC i ACD diraju dužinu $\overline{AC}$ u točkama M i N. Odredi $|MN|$.

7. Odredi pozitivne racionalne brojeve x i y za koje su $x+\dfrac{1}{y}$ i $y+\dfrac{1}{x}$ prirodni brojevi.

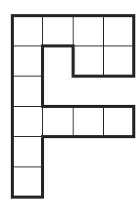
III. razred

1. Ako je $2\sin x-3\cos y=a$ i $2\cos x+3\sin y=b$, koliko je $\sin(x-y)$?

2. Ako za pozitivne realne brojeve x, y i z vrijedi
$$4^{x+y}=z, \qquad z^{1/x}\cdot z^{1/y}=1024,$$
odredi vrijednost izraza $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3. Sve točke prostora čija udaljenost od dužine $\overline{AB}$ iznosi najviše 3 čine tijelo obujma 216π. Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.

4. Polja ploče dimenzija 300×300 iste su veličine kao i 14 kvadratića od kojih se sastoji lik prikazan na slici. Koliko je najviše takvih likova moguće postaviti na tu ploču bez preklapanja? Likove se može rotirati i prevrtati.



5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih sa 7 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 1, 2 ni 7?

6. Točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a T težište trokuta ABC. Ako je AMT jednakostraničan trokut stranice duljine 1, odredi duljine stranica trokuta ABC.

7. Odredi sve parove (a,b) prirodnih brojeva za koje vrijedi
$$a^b-b^a+2^a=17a^4-2b^2+52.$$

IV. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednakosti

$$|z+1| = 1 \qquad \text{i} \qquad |z^2+1| = 1.$$

2. Gumena lopta bačena je s visine od 200 metara. Svaki put nakon što se odbije od površine, dosegne $4/5$ prethodne visine: nakon prvog odbijanja popne se na 160 metara, nakon drugog odbijanja na 128 metara, itd. Koliko iznosi ukupna udaljenost koju lopta prijeđe dok se ne zaustavi?

3. Zadana je elipsa s jednadžbom $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ i hiperbola kojoj su žarišta u glavnim tjemenima te elipse, a tjemena u žarištima elipse. Odredi sjecišta hiperbole i elipse.

4. Rekurzivno je zadan niz:

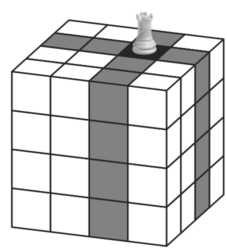
$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3,$$
$$a_n = (n+1)a_{n-1} - na_{n-2} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je a_n djeljivo s 9.

5. Odredi posljednje tri znamenke broja 21^{2021}.

6. Svaki član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva, počevši od drugog, jednak je aritmetičkoj sredini geometrijske i aritmetičke sredine dvaju njemu susjednih članova. Ako je $a_1 = \dfrac{1}{505}$ i $a_{505} = 505$, odredi a_{1010}.

7. *Figura* postavljena na oplošje kocke K_n dimenzija $n\times n\times n$ na strani na kojoj se nalazi napada sva polja u retku i stupcu u kojima se nalazi, poput šahovskog topa, ali i polja na ostalim stranama u produžetcima tih redaka/stupaca. (Na slici su označena vidljiva polja na kocki K_4 koja postavljena figura napada.) Koliko najviše figura možemo postaviti na oplošje kocke K_{50} tako da se međusobno ne napadaju?



Zadatci – B varijanta

I. razred

1. Odredite x^y ako je $\dfrac{x}{4\cdot 64^7}+\dfrac{1024^{-4}x}{16}=16$ i $y=\dfrac{3^{4+n}+5\cdot 3^n}{3^{3+n}-25\cdot 3^n}$.

2. Matko sakuplja sličice s portretima sportaša koje se prodaju u paketima po 5 sličica, a jedan paket košta 7 kuna. Mlađem je bratu poklonio 30 % svojih sličica, pa je mama Matku kupila još 4 paketa sličica. Nakon toga je Matko bratu darovao četvrtinu trenutnog broja sličica. Za 70 kuna koje su braća dobila od bake kupili su pakete sličica i međusobno raspodijelili na jednake dijelove. Koliko sad Matko ima sličica, ako ih ima dvije više nego na početku?

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2021 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 i koliko iznosi njihova aritmetička sredina?

4. Vidi zadatak 2 I. razreda – A varijante.

5. PIN Karlovog mobitela je četveroznamenkasti prirodni broj veći od 2021 te djeljiv s 5 i 6. Ako u tome broju zamijenimo mjesta prvoj i trećoj, te drugoj i četvrtoj znamenki, dobit ćemo broj koji je od njega veći za 3960. Odredite PIN Karlovog mobitela.

6. Sva slova jednakosti $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h) = 5005$ treba zamijeniti različitim brojevima od 1 do 8 tako da jednakost bude točna. Na koliko je načina to moguće napraviti?

7. U trokutu ABC točka D nalazi se na stranici $\overline{BC}$, a točka E na stranici $\overline{AC}$. Dužine $\overline{BE}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki F, a dužina $\overline{BF}$ dijeli površinu trokuta ABD na dva jednaka dijela. Ako je površina trokuta AFE jednaka 7, a površina trokuta AFB 13, izračunajte površine trokuta CEF i CFD.

II. razred

1. Izračunajte:

$$\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{-2} \cdot \left(43^{-1}+47^{-1}\right) + \frac{2}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{43}} + \frac{1}{\sqrt{47}}\right).$$

2. Odredite sve realne brojeve p tako da za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$x(2x-3p) - 3p(x-3p) = x - 1$$

vrijedi $\left|x_1^2 + x_2^2\right| > 1$.

3. U pravokutnom je trokutu omjer visine i težišnice povučene iz vrha pravoga kuta jednak $\frac{12}{37}$. Odredite omjer duljina kateta toga trokuta.

4. Stigavši kući, profesor Matko je ustanovio da je zaboravio kišobran na jednom od četiriju mjesta koja je toga dana posjetio: banku, poštu, ljekarnu i trgovinu. Ljekarnik je uočio kišobran u ljekarni i poznavajući profesora, znao je da će on odmah krenuti u potragu za kišobranom. Pitao se na koliko različitih načina profesor može obići ta četiri mjesta, uz pretpostavku da se odmah nakon pronalaska kišobrana vrati kući. O kojem se broju obilazaka radi?

5. Duljine stranica trokuta ABC su $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ i $|AC| = 15$. Izračunajte opseg kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a središte joj je na pravcu BC.

6. Za koje realne brojeve a jednadžba $\sqrt{x^2 - 100} = a + x$ ima rješenje u skupu realnih brojeva?

7. Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima tjeme u točki (t,t) i prolazi točkom $(-t,-t)$. Odredite sve vrijednosti realnog broja t, $t \neq 0$ tako da je $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{33}{16}$.

III. razred

1. Riješite jednadžbu $x^2 - 6x + \frac{17}{2} = \left|\sin\frac{(2021+18k)\pi}{6}\right|$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

2. U valjak je upisan uspravni stožac tako da se njegova osnovka podudara s jednom osnovkom valjka. Vrh stošca nalazi se u središtu druge osnovke valjka. Ako mjera središnjeg kuta plašta stošca iznosi 120°, odredite u kojem su omjeru oplošja stošca i valjka.

3. Za koje je prirodne brojeve n vrijednost izraza $\dfrac{n^2-4n+4}{n+1}$ cijeli broj?

4. Ako je $\dfrac{3}{1-\sin x-\cos x}=4$, odredite čemu je jednako $\cos 4x$.

5. Na tri hrpe nalaze se žetoni: na jednoj je hrpi 5 žetona, na drugoj 10 žetona i na trećoj 15 žetona. Dva igrača igraju igru. Jednim je potezom dozvoljeno jednu hrpu žetona podijeliti na dvije manje, ne nužno jednake hrpe. Igrač koji nema potez gubi. Koji će igrač pobijediti, onaj koji prvi igra ili koji igra drugi?

6. Riješite nejednadžbu $\log_{|x-1|} 2x \geq 1$ u skupu realnih brojeva.

7. Dan je paralelogram $ABCD$ površine $75\sqrt{3}$ u kojem vrijedi $|AB|=10$ i $\sphericalangle ABC=120^\circ$. Na stranici $\overline{AD}$ dana je točka E, a na stranici $\overline{BC}$ točka F tako da je dužina $\overline{EF}$ paralelna sa stranicom $\overline{AB}$, a površina paralelograma $ABFE$ dvostruko veća od površine paralelograma $CDEF$. Odredite mjere kutova $\sphericalangle FAB$ i $\sphericalangle EFD$.

IV. razred

1. Odredite najmanje prirodne brojeve x i y za koje vrijedi $123_{(x)}=73_{(y)}$, pri čemu $n_{(b)}$ označava zapis broja u bazi b.

2. Odredite rješenja jednadžbe

$$\log_4(\cos^2 x)-\log_2\left(\frac{\sin x}{4}\right)=2$$

u intervalu $[0,2\pi]$.

3. Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)^{2021}?$$

4. Točke A, B i C vrhovi su trokuta. Na stranici $\overline{AB}$ označeno je 6 točaka, na stranici $\overline{BC}$ označeno je 7 točaka i na stranici $\overline{CA}$ označeno je 8 točaka. Vrhovi trokuta nisu među označenim točkama. Koliko različitih četverokuta možemo odrediti čiji su vrhovi označene točke?

5. Ako prirodni broj n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2, koliki ostatak pri dijeljenju s 5 daje n^7?

6. Zadane su elipsa s jednadžbom $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ i hiperbola kojoj su žarišta u tjemenima elipse na velikoj osi, a tjemena u žarištima elipse. Kolika je površina šesterokuta kojemu su vrhovi tjemena elipse na maloj osi i sjecišta zadanih krivulja?

7. Odredite modul i argument kompleksnog broja $z^4 : w^{12}$, gdje je

$$z=-2\sin\frac{5\pi}{8}-2i\cos\frac{13\pi}{8},$$
$$w=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{16}-i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{16}.$$

Ivan Kokan