Županijsko natjecanje iz matematike, 29. ožujka 2021.

Na temelju rezultata školskog natjecanja, najbolji učenici u svakoj županiji se pozivaju na županijsko natjecanje. Ona su održana 29. ožujka 2021. Na županijskom natjecanju učenici A varijante srednje škole rješavali su po pet zadataka (svaki vrijedi po 10 bodova), dok su učenici B varijante rješavali po pet lakših zadataka od kojih svaki vrijedi po 6 bodova, te dva teža, svaki po 10 bodova.

Zadatci – A varijanta

I. razred

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$m(m-n)^2(m+n) = m^4 + mn^3 - 99n.$$

2. Izabela je sedam dana zaredom rješavala po jedan matematički test. Na svakom je testu ostvarila različit broj bodova – najmanje 91, a najviše 100. Nakon svakog testa prosjek njezinih dotadašnjih rezultata bio je prirodan broj, a na sedmom testu je ostvarila 95 bodova. Koliko je ukupno bodova Izabela ostvarila na svih sedam testova? Koliko je bodova ostvarila na šestom testu?

3. Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 20^3x_1 + 21^3x_2 + \cdots + 49^3x_{30} &= 13 \\ 21^3x_1 + 22^3x_2 + \cdots + 50^3x_{30} &= 1 \\ 22^3x_1 + 23^3x_2 + \cdots + 51^3x_{30} &= 19. \end{aligned}$$

Koliko iznosi $21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30}$?

4. Točka M na stranici $\overline{BC}$ i točka N na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su tako da vrijedi $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle NCB$. Dokaži da je

$$|AM|^2 = |AC| \cdot |AN| + |MC|^2.$$

5. Svakom od 12 bridova kocke Martin pridružuje po jedan od brojeva 1 ili -1. Zatim svakoj od šest strana te kocke pridružuje umnožak 4 broja na bridovima te strane. Na kraju Martin zbraja svih 18 brojeva pridruženih bridovima i stranama kocke. Koliki je najmanji zbroj koji Martin može postići?

II. razred

1. Odredi sve parove realnih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 25 \\ 3(a+b) - ab &= 15. \end{aligned}$$

2. Odredi sve trojke prostih brojeva čiji je zbroj kvadrata umanjen za 1 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

3. Dane su dvije kvadratne funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$. Funkcija $f_1(x)$ postiže najmanju vrijednost za $x = -1$, a jedna nultočka joj je $x = 3$. Funkcija $f_2(x)$ postiže najveću vrijednost za $x = 3$, a jedna nultočka joj je $x = -1$. Odredi sve vrijednosti x za koje umnožak $f_1(x)f_2(x)$ postiže najveću vrijednost.

4. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a D točka na luku $\overset{\frown}{CA}$ tom trokutu opisane kružnice koji ne sadrži točku B. Neka je E točka takva da je D polovište dužine $\overline{AE}$. Ako je $\sphericalangle ECA = 90^\circ$ i $\sphericalangle IEC = 40^\circ$, odredi $\sphericalangle BAC$.

5. Neka je n prirodni broj. Ako pravilan n-terokut podijelimo na $n-2$ trokuta povlačenjem $n-3$ dijagonala koje nemaju zajedničkih unutarnjih točaka kažemo da smo dobili *triangulaciju*. Triangulacija n-terokuta kojem su neki od vrhova crveni je *dobra* ako svaki od tih $n-2$ trokuta ima barem dva crvena vrha. Odredi najmanji prirodni broj k, u ovisnosti o n, takav da možemo obojiti k vrhova pravilnog n-terokuta crveno tako da postoji barem jedna dobra triangulacija.

III. razred

1. Dokaži da ortocentar šiljastokutnog trokuta s kutovima α, β i γ dijeli visinu iz vrha kuta mjere α u omjeru $\cos\alpha : (\cos\beta\cos\gamma)$.

2. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu
$$(4^x + 1)(9^y + 1) + 70 = 10(2^x + 1)(3^y + 1).$$

3. Središte I upisane kružnice i središte O opisane kružnice trokuta ABC su osnosimetrične točke u odnosu na pravac AB. Točka D je drugo sjecište pravca AO i opisane kružnice trokuta ABC. Dokaži da vrijedi $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AO|$.

4. Odredi sve prirodne brojeve m za koje je $2^m - 63$ kub nekog cijelog broja.

5. U nekom arhipelagu je n otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag *uredno povezan* ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija. Za koje prirodne brojeve n svaki uredno povezan arhipelag s n otoka ima paran broj avionskih linija?

IV. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve m za koje je $m! + 8$ potencija nekog prostog broja.

2. Neka je $w = \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Odredi najveći broj $n \in \mathbb{N}_0$ za koji postoje kompleksni brojevi a, b, c tako da za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi $a + bw^k + cw^{2k} = k$. Za tako određeni n nađi sve trojke (a, b, c) koje zadovoljavaju gornje jednakosti.

3. Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 1$. Neka je
$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

   a) Ako su x, y i z pozitivni brojevi, dokaži da je $S < 1$.
   b) Dokaži da je $S < 1$ ako i samo ako su brojevi x, y i z istog predznaka.

4. U nogometnom klubu je n igrača koji imaju dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na kraju sezone igrač s brojem 1 završava karijeru. Uprava bira jednog od ostalih igrača kojeg prodaje nekom drugom klubu, dok svih preostalih $n-2$ igrača dobiva dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na koliko načina uprava može odabrati igrača za prodaju i preostalima dati brojeve tako da nijedan igrač nema veći broj od onog koji je imao ove sezone?

5. Neka je ABC trokut i O središte njegove opisane kružnice. Pravac p okomit je na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$, prolazi polovištem stranice $\overline{BC}$ te polovištem dužine $\overline{AO}$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle BAC$.

Zadatci – B varijanta

I. razred

1. Tena je zamislila jedan prirodni broj, pomnožila ga sa 17 i zapisala rezultat na ploču. Vito je obrisao zadnju znamenku, dobiveni broj pomnožio s 8 i zapisao rezultat na ploču. Tena je obrisala zadnju znamenku njegovog rezultata i na ploči je ostao zapisan broj 56. Koji je broj zamislila Tena?

2. Ako se od zbroja 10 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva oduzme jedan od tih brojeva, dobiva se broj 2021. Koji su to brojevi i koji smo broj oduzeli?

3. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Izračunajte razliku duljina odsječaka koje na srednjoj stranici po duljini odsijeca visina na tu stranicu.

4. U nekom kvizu sudjeluju Plavi, Crveni i Žuti tim. Prosjek bodova članova Plavog tima je 30, Crvenog tima 50, a Žutog 90, dok je prosjek bodova svih natjecatelja 60. Plavi je tim ukupno ostvario 360 bodova manje od Crvenog, a Žuti 6 puta više bodova od Plavog. Koliko je članova u pojedinom timu?

5. Tri prijateljice Marta, Iva i Ana jako vole putovati. Marta je posjetila 20 država, Iva 90 % država više nego Marta, a Ana 13 država manje nego Iva. Ana je posjetila 40 % država u kojima je bila Marta, a Iva je posjetila petinu država u kojima je bila Ana i polovinu država u kojima je bila Marta. Broj država koje su posjetile sve tri prijateljice 16 je puta manji od ukupnog broja država koje su posjetile. Koliko su ukupno država posjetile?

6. Odredite vrijednost realnog parametra a za koji svaka od jednadžbi

$$2a-1=\frac{3-3a}{x-1} \quad \text{i} \quad a^2(2x-4)-1=a(4-5x)-2x$$

ima jedinstveno rješenje i njihova rješenja su jednaka.

7. Četverokut $ABCD$ ima točno dva prava kuta, u vrhu A i u vrhu C. Na dijagonali $\overline{AC}$ točke E i F su nožišta okomica povučenih redom iz vrhova B i D na $\overline{AC}$. Ako je $|AE|=3$, $|BE|=5$ i $|CE|=7$, koliko je $|DF|$?

II. razred

1. Odredite sva realna rješenja jednadžbe $(x+3)(x+5)=4+\dfrac{2021}{(x+1)(x+7)}$.

2. Konačan niz brojeva je *izvrstan* ako je svaki sljedeći član niza, osim prvoga, veći od prethodnoga i ako je umnožak svih članova toga niza potpuni kvadrat. Primjerice, niz 2, 6, 27 je *izvrstan* niz. Odredite prirodne brojeve x i y tako da niz 28, x, y, 65 bude *izvrstan*.

3. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka E takva da je $|AE|=1$ i $|EB|=2$. Neka je točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je dužina $\overline{DE}$ paralelna s dužinom $\overline{BC}$, a točka F na stranici $\overline{BC}$ takva da je dužina $\overline{EF}$ paralelna s dužinom $\overline{AC}$. Izračunajte omjer površina četverokuta $CDEF$ i trokuta ABC.

4. Ako za kutove trokuta α, β i γ vrijedi da je $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\gamma$ i $\beta+\gamma=86^\circ$, odredite α, β i γ.

5. Pravilo pridruživanja funkcije f jest $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$. Odredite interval realnih brojeva na kojemu ova funkcija poprima konstantnu vrijednost.

6. Tjeme parabole je u točki $T(x, y)$, $y < 0$. Parabola siječe os x u točkama $A(2, 0)$ i $B(8, 0)$. Ako su brojčani iznosi opsega i površine trokuta ABT u omjeru $4 : 3$, odredite jednadžbu parabole i koordinate tjemena parabole.

7. Učenici neke škole sudjelovali su na stolnoteniskom turniru. Pravilima je predviđeno da svaka dva natjecatelja odigraju točno jednu partiju. Tijekom turnira učenici A, B i C su odustali od daljnjeg natjecanja. Učenik A je odustao nakon što je odigrao dvije partije, B nakon tri, a C nakon pet odigranih partija. Ostali su natjecatelji odigrali turnir do kraja. Ako je na turniru odigrano 197 partija, koliko je učenika sudjelovalo na turniru?

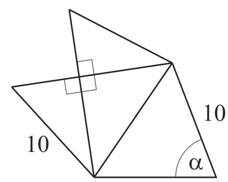
III. razred

1. Izraz $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 2\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ ima istu vrijednost za sve realne brojeve x. Izračunajte tu vrijednost.

2. Neka je $A = 1202^2 + 2^{2021}$. Odredite znamenku jedinica broja A^{2021}.

3. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi $3^{\frac{1}{\log x}} - 2 \cdot 3^{\frac{\log 10x^2}{\log x^2}} = 27$.

4. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva djeljivih sa 75 kojima su sve znamenke različite, a znamenka stotica je 7?



5. Na slici je prikazana mreža piramide. Izračunajte obujam te piramide ako je $\cos\alpha = \frac{9}{25}$.

6. Odredite sve realne brojeve x iz intervala $[0, 1]$ za koje je $\operatorname{tg}\left(2\pi \sin^2(2\pi x)\right) = 0$.

7. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = 3$, $|CD| = 1$, $\sphericalangle DAB = 90^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Odredite $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ i $|AD|$.

IV. razred

1. Za realne brojeve x i y, $x < y$, vrijedi:
$$x^3 + y^3 = 65, \qquad 2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224.$$
Neka je y prvi, a x drugi član geometrijskog reda. Koliko iznosi zbroj toga reda?

2. Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2. Ako je sinus najmanjeg kuta u tomu trokutu jednak $\frac{\sqrt{15}}{8}$, izračunajte opseg toga trokuta.

3. Odredite sve brojeve n za koje vrijedi $\binom{2022}{n+1} - \binom{2021}{n} \leq \frac{1}{2023}\binom{2023}{n+2}$.

4. Koliko ima lozinki koje se sastoje od 4 znaka iz skupa $\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, +, !\}$ takvih da su svi znakovi lozinke različiti ili da lozinka sadrži točno dva, ne nužno različita slova i dvije, ne nužno različite znamenke?

5. Točka M je polovište visine pravilnog tetraedra $ABCD$ povučene iz vrha A na osnovku BCD. Odredite mjeru kuta BMC.

6. Neka je $f_1(x) = \frac{1}{2-x}$, $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$, $n \geq 2$, za sve realne brojeve x za koje su navedene funkcije definirane. Koliko je $f_{2021}(4)$?

7. U kompleksnoj ravnini predočite skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z| \leq 4$ i $2\sqrt{3} - 2 \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 4$. Kolika je površina tog skupa?

Matija Bašić