

Sudoku – napredne metode rješavanja (11.4)

Žarko Čulić¹

U ovom nastavku obradit ćemo metodu *Exocet* (*Junior Exocet* ili *jExocet*, skraćeno *JE*) s kojom i završavamo obradu dodatnih metoda koje nam mogu pomoći pri rješavanju teških sudokua. *Exocet* je uzorak koji često možemo naći u vrlo teškim mrežama s jako puno kandidata. U takvima sudokuima s malo konjugiranih parova i polja sa samo dva kandidata većina drugih strategija su uglavnom neuspješne. *Exocet* razmatra tri ili četiri kandidata i upravo je to ono što nam treba kad smo naišli na nepremostiv zid u rješavanju i ne znamo što bi dalje činili kod ekstremno teških sudokua.

Metoda je dobila ime u forumu tijekom kampanje za njezino definiranje, a uzorak je prvi otkrio Allan Baker rješavajući poznati ekstremno teški sudoku “Fata Morgana”.

Kratki opis *Exocet* metode glasi: kada dva polja u intersekciji (presjeku) kvadrata i retka (stupca) sadrže zajedno tri ili četiri kandidata i ako u različitim redcima (stupcima) u svakom od dva preostala kvadrata u bloku, postoje polja s istih tri ili četiri kandidata, a zadovoljeni su i uvjeti navedeni ispod u opisu, svi dodatni kandidati se mogu odmah eliminirati iz tih polja, a postoji i čitav niz dodatnih eliminacija.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	B	*	*			*		
B			*	T ₁	M ₂	M ₂	C ₂		
C			*	C ₁			T ₂	M ₁	M ₁
D			S	S			S		
E			S	S			S		
F			S	S			S		
G			S	S			S		
H			S	S			S		
I			S	S			S		

Slika 1.

Na slici 1 su osnovni dijelovi i uvjeti *Exocet* metode: B polja su osnovna (base) polja koja sadrže zajedno ukupno tri ili četiri različita bazna kandidata; polja T₁ i T₂ su ciljna (target) polja koja sadrže sve kandidate koji su u osnovnim poljima plus dodatne kandidate koje možemo eliminirati ako su zadovoljeni svi uvjeti metode; S-linije (cross-lines) čine polja u stupcima blokova ispod T polja (ili u istim redcima ako su B polja u stupcu) i u poljima izvan kvadrata s B poljima i ne vide ta B polja – te stupce (retke) označavamo kao CL_b, CL₁ i CL₂ područja; C polja su tzv. partnerska (companion) polja T poljima i ona ne smiju sadržavati bazne kandidate koji se nalaze u susjednim T poljima; svako T polje ima dva zrcalna (mirror) polja označena s M₁ i M₂; i na kraju znakom * su označena tzv. ispusna (escape) polja koja sadrže kandidate koji nisu točni u baznim poljima. Dodatni uvjet je da S polja poprečno (okomito) na

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

stupce (retke) nemaju više od dva bazna kandidata u svim tim tzv. pokrovnim (cover) područjima.

Postoji i analogna podvarijanta gdje su M2 polja u retku s C1 poljem, a polja T2 i C2 su zamjenili mjesta. Svi uvjeti i moguće eliminacije su identični kao i kod osnovne metode.

U primjeru na slici 2 su bazni kandidati 1, 2 i 3 u poljima A1 i A2, nalaze se također u ciljnim poljima T1 i T2 te u S poljima u stupcima blokova ispod T polja i okomitom stupcu na intersekciju kvadrata i retka s baznim poljima s tim da ne vide B polja, dakle u stupcima 3, 4 i 7. Vidimo da se svi bazni kandidati u S poljima nalaze samo dva puta unutar pokrovnog područje (zaokruženi redci). Vrijedilo bi isto da se pojedini bazni kandidat nalazi samo dva puta u pojedinom S stupcu ili jednom u stupcu i jednom u retku.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 2 3	1 2 3							
B				1 2 3					
C							1 2 3		
D		1 3	1 3			1			
E		2	2						
F									
G									
H		3				3			
I	1 2	1				2			

Slika 2.

Budući da su zadovoljeni *Exocet* uvjeti odmah možemo eliminirati dodatne kandidate u T poljima, a vrijede i dodatne činjenice:

1. dva T polja moraju sadržavati različite bazne kandidate
2. zrcalna M polja moraju sadržavati iste bazne kandidate kao njihova nasuprotna T polja zajedno s jednim kandidatom koji je netočan u baznim poljima
3. dva točna bazna kandidata moraju također biti točni u dva S polja.

Izraz poznati (točni) bazni kandidati se odnosi na kandidate za koje smo utvrdili da su točni u baznim poljima B1 i B2. Jasno je da na početku eliminacije ne znamo koji su to točni bazni kandidati, ali nam navedene eliminacije mogu pomoći pri provjerama.

Exocet metoda je bogati izvor eliminacija od kojih se neke mogu učiniti odmah, a neke će postati moguće kasnije tijekom rješavanja. Također, dodatne se činjenice mogu uklopiti u pretraživanja preko *naizmjenično povezanih lanaca* (*AICs*). Pogledajmo moguće eliminacije:

1. možemo eliminirati sve dodatne kandidate iz ciljnih polja koji nisu bazni kandidati
2. bazni kandidat koji mora biti točan u jednom cilnjom polju, u drugom cilnjom polju se može eliminirati
3. poznati bazni kandidat se može eliminirati iz svih polja koja vide ili oba bazna polja ili oba ciljna polja

4. bilo koji bazni kandidat koji ne može istovremeno biti rješenje u najmanje jednom cilnjom polju i u pridruženom zrcalnom polju u susjednom kvadratu, ne može biti rješenje u tom cilnjom polju
5. bazni kandidat koji se može nalaziti u samo jednom pokrovnom području S polja, ne može biti rješenje u niti jednom baznom ili cilnjom polju
6. bazni kandidat koji se u S poljima nalazi u samo jednom pokrovnom području, ne može biti točan u cilnjom polju u tom S području
7. svaki bazni kandidat koji ne može biti točan u zrcalnim poljima, može se eliminirati iz ciljnog polja susjednog kvadrata
8. ako jedno zrcalno polje može sadržavati samo kandidate koji nisu bazni, tada drugo zrcalno polje mora sadržavati baznog kandidata koji se nalazi u cilnjom polju susjednog kvadrata
9. ako zrcalno polje sadrži samo jednog mogućeg kandidata koji nije bazni, on je točan u tom zrcalnom području i može se eliminirati iz svih susjednih polja
10. poznati bazni kandidat ili onaj koji se može pojaviti u samo jednom ispusnom polju, može se eliminirati iz pokrovnih područja izvan S polja
11. ako zrcalna polja sadrže “zaključanog kandidata” i ako je on bazni, mogu se eliminirati svi drugi bazni kandidati iz tih polja, odnosno ako on nije bazni, tada se mogu iz tih polja eliminirati svi drugi kandidati koji nisu bazni
12. svaka kombinacija poznatih baznih kandidata koja sprječava da dva S polja budu točna nije ispravna (obično dovodi do nekompatibilnih parova i *uzoraka višezačnosti* (*Deadly Patterns*)).

Pogledajte primjer na slici 3. Bazni kandidati su 1, 5 i 8 i nalaze se u poljima A1 i A2. Ciljna polja B4 i C7 sadrže sve bazne kandidate, kao i dodatne kandidate 4 u B4 te 2 i 7 u C7. Vidimo da u partnerskim poljima C4 i B7 nema baznih kandidata, a sve S linije u stupcima 3, 4 i 7 kada se pokriju poprečnim redovima, tzv. pokrovnim područjem, sadrže po 2 bazna kandidata. Na taj način su zadovoljeni svi uvjeti za *Exocet* metodu. Odmah možemo eliminirati dodatne kandidate 4, 2 i 7 u cilnjim poljima B4 i C7. Potom možemo eliminirati i broj 1 iz D1, D2, I1 i I2, broj 8 iz D1, D2, D5, H1 i H8, broj 5 iz E2, E6, I1, I2 i I9. Kao što se vidi, nakon brojnih eliminacija vrlo brzo se dolazi do rješavanja cijelog sudokua.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 5 8	1 5 8	7	1 5 6 8	2	1 5 6 9	1 5 8 9	1 3 8 9	4
B	9	3	1 2 8	1 2 8	5 4 8	4 5 7	4 5 7	6	1 2 7 8 9
C	6	4 5 8	1 2 8	3	4	4 5 6 7	1 2 5 7 8	1 2 7 8 9	2 5 9
D	1 4 7 8	3 4 7 8	1 4 7 9	2	3 4 6 7	2 3 7	1 2 3 7	5	6 9
E	2	4 5 7 9	4 5 9	4 5 6	1	4 5 6 7	3 4 7	6 9	8
F	1 5 7 8	3 5 7 8	1 5 9	6	9	3 5 7	4 6 7	1 2 7	2 3
G	1 4 7 8	1 4 5 8	6	9	7 8	2 5 7	4 6 7	9 4 8	2 5 6
H	4 7 8	2	4 5 9	4 6	5	3 5 9	3 4 7 8	4 6 7	1
I	1 4 7	1 4 5 6	1 4 5 9	2 3 9	1 2 3 9	8	2 3 7 8	2 5 7	2 3 6

Slika 3.

Metoda *Double Exocet (DE)* može nam pomoći ako imamo preklapanje dva *Exoceta* uzorka u istom bloku. Bazni kandidati u ta dva *Exoceta* mogu, ali i ne moraju biti isti. Pogledajte primjer na slici 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 4 5 6 7 8	9 4 5 7 8	1 5 6 7 8	2 5 7	2 4 5 6 7	2 4 5 6 8	1 2 4 5 6 8	3 4 5 8	2 4 5 8
B	2 4 5 6 7 8	1 4 5 6 7 8 9	1 5 6 7 9	3 4 5 6 7 9	3 4 5 6 7 9	3 4 5 6 8	1 4 5 6 8	4 6 8	4 5 8
C	4 5 6 8 7 8 9	4 5 6 8 7 8	3 8	2 5 6 8	1 T2	2 4 5 6 T2	9 4 6 8	2 4 6 8	7
D	4 5 7 8 9 7 8	4 5 7 8	6 T2	2 5 7	2 4 5 9	2 4 5 9	1 2 4 5 8	1 2 4 8 9	2 4 5 9
E	1 2 4 5 8 9	1 2 4 5 9	2 5 9	2 5 9	6 BAZA 1	2 4 5 9	3 4 5 9	7 4 5 8 9	2 4 5 8 9
F	3 7 9 7	2 3 4 5 7 1	2 5 9	1 4 5 7	2 5 9	8 4 5 9	8 4 5 9	2 4 5 BAZA 2 9	6
G	4 5 6 9	4 5 6 9	8 7	2 5 6 9	3 7	2 5 6 9	2 5 6 9	2 6 4 9	1 6 4 9
H	1 2 4 5 6 9	1 2 4 5 6	7 9	2 5 6 9	8 9	1 2 5 6 9	2 5 6 9	2 6 4 9	3 6 4 9
I	1 3 6 9	1 2 3 6 9	1 2 9	4 7	2 9	1 2 7 9	2 6 7 8	5 6 7 8	2 5 8 9

Slika 4.

U srednjem horizontalnom bloku imamo dva *Exoceta* koje jednim imenom zovemo *Double Exocet*. Bazna polja prvog *Exoceta* čine $E4 = \{2, 5, 9\}$ i $E6 = \{2, 4, 5, 9\}$, a drugog $F7 = \{2, 4, 5\}$ i $F8 = \{2, 4, 9\}$, dakle bazni kandidati u oba su brojevi 2, 4, 5 i 9. Ciljna polja prvog *Exoceta* su $F3 = \{2, 4, 5, 9\}$ i $D9 = \{2, 4, 5, 8, 9\}$, a drugog $E3 = \{1, 2, 4, 5, 9\}$ i $D5 = \{2, 4, 5, 7, 9\}$. Vidimo da su i S-polja ista za oba uzorka i nalaze se u stupcima 3, 5 i 9 izvan srednjeg horizontalnog bloka.

Budući da imamo dva *Exoceta*, sva četiri ciljna polja tretiramo kao jedno povezano područje, a isto vrijedi i za bazna polja. Gledajući na taj način, kod ove *DE* metode imamo dva pravila:

1. poznati bazni kandidati koji vide sva četiri ciljna polja ili sva četiri bazna polja mogu se eliminirati
2. poznati bazni kandidati izvan S polja u pokrovnim područjima mogu se eliminirati.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 4 5 6 7 8	9 4 5 7 8	1 5 6 7 8	2 5 7	2 4 5 6 7	2 4 5 6 8	2 4 5 6 8	3 4 5 8	2 4 5 8
B	2 4 5 6 7 8	1 4 5 6 7 8 9	1 5 6 7 9	3 4 5 6 7 9	3 4 5 6 7 9	3 4 5 6 8	1 4 5 6 8	4 6 8	4 5 8
C	4 5 6 8 7 8 9	4 5 6 8 7 8	3 8	2 5 6 8	1 4 5 6 8	2 4 5 6 9	9 4 6 8	2 4 6 8	7
D	4 5 7 8 9 7 8	4 5 7 8	6 - - -	2 5 7	2 4 5 9	2 4 5 9	1 2 4 5 8	1 2 4 8 9	2 4 5 8 9
E	1 4 5 8 9	1 4 5 8 9	2 5 9	2 5 9	6 4 5 9	2 4 5 9	3 4 5 9	7 4 5 8 9	2 4 5 8 9
F	3 7 9 7	2 3 4 5 9	2 5 9	1 4 5 7	2 5 9	8 4 5 9	2 4 5 9	2 4 9	6
G	4 5 6 9	4 5 6 9	8 7	2 5 6 9	3 7	2 5 6 9	2 5 6 9	2 6 4 9	1 6 4 9
H	1 2 4 5 6 9	1 2 4 5 6	7 9	2 5 6 9	8 9	1 2 5 6 9	2 5 6 9	2 6 4 9	3 6 4 9
I	1 3 6 9	1 2 3 6 9	1 2 9	4 7	2 9	1 2 7 9	2 6 7 8	5 6 7 8	2 5 8 9

Slika 5.

Primjenjujući prvo pravilo možemo eliminirati brojeve 4, 5 i 9 iz polja D1 i brojeve 2, 4 i 5 iz D2 jer vide sve instance tih brojeva u ciljnim poljima *DE* (oba *JE*) uzorka. Također, možemo eliminirati brojeve 2, 4, 5 i 9 iz polja F5 i brojeve 2, 4, 5 i 9 iz E9 jer vide sve instance tih brojeva u sva četiri bazna polja. Pogledajte sliku 5.

U našem primjeru se u potpunosti preklapaju svi bazni kandidati tako da su oni "poznati", odnosno sigurno se nalaze u baznim, kao i u ciljnim poljima (četiri kandidata u četiri bazna/ciljna polja).

Nadalje, trebamo analizirati S-polja i okomita pokrovna područja. Ona su važna da bi bili sigurni je li *Exocet* uzorak zaista postoji. Budući da imamo dva *Exoceta* s istim baznim kandidatima postoje određena veoma stroga ograničenja distribucije baznih brojeva 2, 4, 5 i 9. Dakle, trebamo prvo provjeriti da se bazni brojevi ne nalaze više od 2 puta u svim S-poljima i stoga gledamo pokrovna područja u redcima A, B i I. Pogledajte sliku 6. U osnovi, bazni kandidati moraju biti točni negdje duž stupca u S-poljima tako da jednostavno nema za njih prostora u preostalom dijelu tih redaka. Stoga možemo eliminirati sve bazne kandidate iz pokrovnih područja izvan S-polja, a vidimo da njih ima prilično mnogo u ovom primjeru. Ovo je vrlo slično mrežnoj metodi veličine 3x3 *sabljarki* (*Swordfish*). Zaključak: umjesto da smo istraživali brojne forsirane lance, ova jednostavnija metoda omogućila je eliminiranje velikog broja kandidata nakon čega se vrlo brzo riješi cijeli sudoko.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4 5 6 7 8	9	4 5	2 3 8	2 6 4 5	2 4 5 6	1 2 4 5 6	3	4 5 8
B	2 4 5 6 7 8	1 4 5	3 5 6 4 5	3 4 5 6	1 4 5 6	1 4 5 6	4 8	6 4 5 8	
C	4 5 6 8	4 5 6 8	3 5 6	2 8	1 4 5 6	9 4 6	2 8	7 8	
D	4 5 7 8 9	4 5 7 8	6 7	2 3 5 9	2 4 5 7 9	2 3 4 5 8	1 2 4 5 8	1 2 4 5 8	2 8 9
E	1 2 4 5 8 9	1 2 4 5 9	2 5 9	6 BAZA 1	2 5 9	3 BAZA 1	7 9	2 4 5 8 9	
F	3 2 3 4 5 7 9	2 4 5 9	1 4 5	8 7 9	2 4 5	2 2 4 5 8	2 4 5 9	6 BAZA 2 9	6 9
G	4 5 6 9	4 5 6 8	8 7	2 5 6 3	2 5 6 7 9	2 6 4 7 9	2 6 4 7 9	2 6 4 7 9	1 9
H	1 2 4 5 6 9	1 2 4 5 6 7	2 5 6 8	8 9	1 2 5 6 9	2 6 4 9	2 6 4 9	2 6 4 9	3 9
I	1 3 1 2 3 6 6 9	1 2 6	2 9	4 7 9	1 2 7 9	6 7 8	6 7 8	5 8 9	2 9

Slika 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	B	*	*			*		
B			*	Q			R		
C			*	Q			R		
D			S	S			S		
E			S	S			S		
F			S	S			S		
G			S	S			S		
H			S	S			S		
I			S	S			S		

Slika 7.

Postoji i tzv. metoda *Junior Exocet Plus* (*JE+*) gdje umjesto polja T i C polja imamo Q i R polja koji predstavljaju prvi i drugi par objekata. Ta polja sadrže zaključani par jednog kandidata koji nije bazni i jednog točnog baznog kandidata (slika 7).

Također postoji i *Senior Exocet* (*SE*) koji je prikazan na slici 8. Dva bazna polja se određuju na isti način kao i kod *Junior Exocet* uzorka i oni određuju baznu S-liniju, a izabiremo dodatne dvije paralelne S linije u druga dva okomita bloka izvan vidokruga baznih polja. Unutar tih dodanih S-linija izabiru se dva ciljna polja tako da svaki bazni kandidat u preostalim S poljima može biti pokriven s dva pokrovna područja.

Po definiciji polja označena sa slovom C (partnerska polja) u istoj liniji s ciljnim poljima ne smiju sadržavati niti jednog baznog kandidata. To ograničava izbor mogućih alternativnih ciljnih polja, ali osigurava standardni set izvedenih eliminacija.

Kao i kod *JE uzorka*, sve točne bazne znamenke moraju biti točne tri puta u tri S-linije. Međutim S polja mogu osigurati dvije točnosti jednog kandidata tako da ciljna

polja moraju osigurati točnost trećeg kandidata za svaki pojedini bazni broj. Stoga, kada su ti uvjeti zadovoljeni, dva ciljna polja će imati isti par točnih kandidata kao i bazna polja.

Kada se ustanovi uzorak tada:

- svaki kandidat koji nije bazni može se eliminirati iz ciljnih polja,
- kada se ustanove točni bazni kandidati, oni se mogu eliminirati iz svih preostalih polja izvan S linija u pokrovnom području.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	B	*	*			*		
B			*	S			S		
C			*	C			T		
D			S	S			S		
E			T	C			C		
F			S	S			S		
G			S	S			S		
H			S	S			S		
I			S	S			S		

Slika 8.

Ovdje nećemo detaljnije analizirati metode *JE+* i *SE*. Njih možete naći u iscrpnom radu Davida P. Birda u *JExocet Compendium* napisanom u 14 otvorenih dokumenata dostupnih na internetu, točnije web forumu

<http://forum.enjoysudoku.com/jexocet-compendium-t32370.html>.

U sljedećem, zadnjem nastavku sumirat ćemo sve do sada napisano i dati opće smjernice za rješavanje sudokua.

Koristeći *Exocet* metodu riješite zadatak za vježbu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3 1 4 4 7 8 9	1 3 4 4 7 9	5 7	1 4 6 4 8 9	6 7 8	1 6 7 8 7	1 6 7 8 7	2	
B	4 5 7 8	4 5 7 8	6 7 8	1 2 4 8	1 2 4 8	2 8	3 7	1 5 7	9
C	5 7 8 9	2 7 9	1 8 9	1 6 8 9	3 6 9	1 5 6 7 8	4 5 6 7 8	1 5 6 7 8	
D	2 7 8 9	4 5 7 8	5 8	2 3 4 6 4 8	2 6 6	1 7 8 9 7 9	2 6 9	2 6 9	3 6
E	6 8	4 4 9	1 2 9	7 4 5 8	2 3 4 5 8	1 2 5 6 8 9	1 2 5 6 9 8	1 3 5 8	
F	2 7 8	3 7	1 2 8	2 6 8	2 5 6 8	4 7	1 2 5 6 7 8	1 5 6 7 8	
G	2 4 5	4 5 6 8	1 2 4 9	1 2 6 4 5 6 7	1 2 5 6 9	1 2 5 6 9	3 5 6	1 5 6	
H	1 7	4 5 6 4 7	2 3 4 9	2 3 6 4 5 6 9	2 3 5 6 9 7 9	2 5 6 9	8 7	5 6 7	
I	2 3 5	9 7	2 3 1 2 3	1 2 3 6	8 5 6	1 2 5 6 7	1 2 5 6 7	4 4	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3 4 8	9 7 6	5 2 1	7 3 4	8 1 4	1 3 6	6 5 9		
B	8 7 6	2 1 4	3 6 9	7 4 8					
C	5 2 1	6 3 9	9 7 4	8 4 8					
D	9 8 5	3 4 1 7	2 7 6						
E	6 1 8	4 7 5 2	8 9 6	4 1 5					
F	2 3 7	8 9 6	4 1 5	5 3 1					
G	4 6 8	9 2 7	5 3 1						
H	1 5 2 4 6 3	9 8 7	9 8 7						
I	7 9 3 1	8 5 6 2 4							

Slika 9.