Rješenje nagradnog natječaja br. 233

Nađi sve pozitivne cijele brojeve n takve da $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor$ dijeli 111.

Rješenje. Najprije vidimo da su 1, 3, 37, 111 jedini pozitivni djelitelji broja 111. Imamo sljedeća četiri slučaja:

1) $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 1 \implies 1 \leq \sqrt[n]{111} < 2 \implies 1 \leq 111 < 2^n$.

Ova nejednažba je zadovoljena za svaki $n \geq 7$.

2) $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 3 \implies 3 \leq \sqrt[n]{111} < 4 \implies 3^n \leq 111 < 4^n \implies n = 4$.

3) $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 37 \implies 37 \leq \sqrt[n]{111} < 38 \implies 37^n \leq 111 < 38^n$, što nije moguće.

4) $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 111 \implies 111 \leq \sqrt[n]{111} < 112 \implies 111^n \leq 111 < 112^n$ tj. $n = 1$.

Znači, sva rješenja u skupu prirodnih brojeva su: $n = 1$, $n = 4$, $n \geq 7$.

Marko Dodig, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Knjigom *Branimir Dakić, Matematika u boji, dokazi bez riječi,* Element, Zagreb, 2018. nagrađeni su:

1. *Marko Dodig,* Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb;
2. *Filip Vučić,* I. gimnazija, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 2/282

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Borna Cesarec* (3), Srednja škola Krapina, Krapina, 3779, 3780; *Marko Dodig* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3777–3787, 3790; *Filip Vučić* (2), I. gimnazija, Zagreb, 3777–3781, 3783, 3785–3790.

b) Iz fizike: *Petra Jurković* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 478–481; *Luka Krašnjak* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 478–481; *Marin Lakoš* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 478–481; *Vito Martinović* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 478–481; *Borna Cesarec* (3), Srednja škola Krapina, Krapina, 1742, 1743; *Marko Dodig* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 1742–1744.

Nagradni natječaj br. 235

Za realan broj $p > 1$ odredi minimalnu vrijednost sume $x+y$, gdje x i y zadovoljavaju uvjet

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = p.$$