MATEMATIKA

Popoviciuva nejednakost

Radomir Lončarević[1]

Rumunjski matematičar Tiberie Popoviciu (1906. – 1975.) dokazao je 1965. poznatu nejednakost iz područja konveksne analize (vidi [1]), koja ima primjene, među ostalim, u brojnim zadatcima koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima. Dokazat ćemo najprije Popoviciuvu nejednakost, a nakon toga pokazati primjenu na nekoliko zadataka te dati nekoliko njih za vježbu.

Definicija 1. *Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$* ***konveksna*** *ako za sve $x, y \in I$ i za svaki $\beta \in [0,1]$ vrijedi*

$$f((1-\beta)x+\beta y) \leq (1-\beta)f(x)+\beta f(y). \tag{1}$$

Funkcija f je strogo konveksna ako za $x \neq y$ i za sve $\beta \in (0,1)$ u (1) vrijedi stroga nejednakost.

Definicija 2. *Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***konveksnom u Jensenovom smislu*** *ili* ***J-konveksnom*** *na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2}$$

Funkcija f je ***strogo J-konveksna*** *ako za sve $x, y \in I, x \neq y$ u (2) vrijedi stroga nejednakost.*

Teorem 1. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako za sve $x_1, \ldots, x_n \in I$ i za sve $\beta_1, \ldots, \beta_n \in [0,1]$, takve da je $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$, vrijedi*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k). \tag{3}$$

Napomena 1. *Poseban je slučaj nejednakosti (3) kada je $\beta_i = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, tj.*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \tag{4}$$

Nejednakost (4) jedna je od najčešćih oblika Jensenove nejednakosti koja se koristi u rješavanju klasičnih zadataka vezanih uz nejednakosti. Dokazao ju je danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. – 1925.) u člancima objavljenima 1905. i 1906. godine.

Teorem 2. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je J-konveksna.*

Prethodni teorem ćemo koristiti u dokazu Popoviciuve nejednakosti, a govori o jednakosti pojmova konveksnosti i J-konveksnosti za neprekidne funkcije.

[1] Autor je s Fakulteta prometnih znanosti, Zagreb; e-pošta: radomir.loncarevic@gmail.com

Teorem 3. (***Popoviciuva nejednakost***) *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *konveksna ako i samo ako je*

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{3}\right)+f\left(\frac{x+z}{3}\right)+f\left(\frac{y+z}{3}\right)\right] \tag{5}$$

za sve $x,y,z \in I$. *U slučaju da je* f *strogo konveksna funkcija u* (5) *vrijedi stroga nejednakost za sve* $x,y,z \in I$ *osim za* $x=y=z$.

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y \leq z$. Ako je $y \leq \frac{x+y+z}{3}$, onda je $y \leq \frac{x+z}{2}$, tj.

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+\frac{x+z}{2}+z}{3} = \frac{x+z}{2} \leq z. \tag{6}$$

Budući da je $x \leq \frac{y+z}{2}$, imamo

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{\frac{y+z}{2}+y+z}{3} = \frac{y+z}{2} \leq z. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) slijedi da postoje $s,t \in [0,1]$ takvi da je

$$\frac{x+z}{2} = s\cdot\frac{x+y+z}{3}+(1-s)\cdot z, \qquad \frac{y+z}{2} = t\cdot\frac{x+y+z}{3}+(1-t)\cdot z.$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti te sređivanjem izraza dobivamo

$$(x+y-2z)\left(s+t-\frac{3}{2}\right)=0.$$

Ako je $x+y-2z=0$, onda je nužno $x=y=z$ i time je nejednakost (5) očita.

Ako je $s+t-\frac{3}{2}=0$, onda zbrajanjem sljedeće tri nejednakosti:

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq s\cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-s)\cdot f(z)$$
$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq t\cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+(1-t)\cdot f(z)$$
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y),$$

dobivamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)$$
$$\leq (s+t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)+(2-s-t)f(z)$$

pa zbog $s+t=\frac{3}{2}$ imamo

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq \frac{3}{2}f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{1}{2}(f(x)+f(y)+f(z)),$$

odakle množenjem s $\frac{2}{3}$ dobivamo nejednakost (5).

($\Longleftarrow$) Zbog neprekidnosti i teorema 2 dovoljno je pokazati da je funkcija f konveksna u Jensenovom smislu. Ako je $y = z$, onda iz nejednakosti (5) slijedi

$$\frac{f(x)+2f(y)}{3}+f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq\frac{2}{3}\left(2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)\right)$$

$$\frac{f(x)}{3}+f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq\frac{4}{3}f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f\left(\frac{x+2y}{3}\right)\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

za sve $x, y \in I$ pa je f konveksna u Jensenovom smislu. $\square$

Navest ćemo, bez dokaza, neke dovoljne uvjete za konveksnost. Dokaz se može vidjeti u [2].

Teorem 4. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je konveksna na I ako i samo ako je $f'' \geq 0$, $\forall x \in I$.*

Sljedeći teorem namijenjen je onima koji ne poznaju diferencijabilni račun, ali poznaju grafove eksponencijalnih, logaritamskih i trigonometrijskih funkcija.

Korolar 1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je f konveksna na I ako se za bilo koji $x_0 \in I$ sve točke grafa funkcije f nalaze iznad tangente grafa povučene u točki $(x_0, f(x_0))$.*

Zadatci su preuzeti iz [3], [4] i [5].

Zadatak 1. *Neka su x_1, x_2, x_3 pozitivni brojevi, pri čemu nisu svi međusobno jednaki. Dokažite nejednakost*

$$27\prod_{i<j}(x_i+x_j)^2 > 64x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)^3.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = -\ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Kako je $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, za svaki $x \in (0, \infty)$, slijedi da je f strogo konveksna na $(0, \infty)$. Primjenom Popoviciuve nejednakosti (5) imamo

$$-\ln x_1-\ln x_2-\ln x_3-3\ln\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)>-2\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_2+x_3}{2}\cdot\frac{x_3+x_1}{2}\right),$$

$$\ln(x_1x_2x_3)+\ln\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3<\ln\left(\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)}{8}\right)^2,$$

$$(x_1x_2x_3)\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3<\left(\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)}{8}\right)^2,$$

$$\frac{1}{27}(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)^3<\frac{1}{64}(x_1+x_2)^2(x_2+x_3)^2(x_3+x_1)^2.$$

Odakle množenjem s $27 \cdot 64$ dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 2. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost*

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\right).$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^+$. Kako je $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}^+$, funkcija f je strogo konveksna na $\mathbb{R}^+$. Primjenom Popoviciuve nejednakosti (5) imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}}{3}+\frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{x+y+z}\\
&\quad\geq\frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}+\frac{x+z}{2}+\frac{2}{x+z}+\frac{y+z}{2}+\frac{2}{y+z}\right),\\
&\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{x+y+z}\\
&\quad\geq\frac{2}{3}\left(x+y+z+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{y+z}\right),\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{9}{x+y+z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right),
\end{aligned}$$

odakle množenjem s $x+y+z\neq 0$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}&\geq 4\left(\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}\right)-12,\\
&\geq 4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+3\right)-12\\
&=4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\right).
\end{aligned}$$

Zadatak 3. *Dokaži da za svaki trokut ABC vrijedi nejednakost*

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R},$$

gdje su α, β, γ njegovi unutarnji kutovi, s poluopseg i R polumjer opisane mu kružnice.

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=-\sin x$, $x\in[0,\pi]$. Kako je $f''(x)=\sin x\geq 0$, $\forall x\in[0,\pi]$, dana funkcija je konveksna na intervalu $[0,\pi]$. Primjenom nejednakosti (5) imamo

$$-\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq-\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Kako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, u svakom trokutu je:

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Odavde slijedi

$$-\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq-\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right).$$

U svakom trokutu vrijedi

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}.$$

Primjenom prethodne jednakosti pa množenjem s $-\frac{3}{2}$ dobivamo danu nejednakost.

Zadatak 4. *Za svaki šiljastokutan trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{2s}{r}-3\sqrt{3}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pa je f strogo konveksna na $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Primjenom Popoviciuve nejednakosti (5) imamo

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

a odavde zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}.$$

Sada je

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}+\sqrt{3}\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{r},$$

odakle množenjem s 3 dobivamo danu nejednakost.

Zadatak 5. *Dokažite da za svaki šiljastokutan trokut, čiji kutovi zadovoljavaju uvjete $\frac{\pi}{4}<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$, vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{\sqrt{3}s^2}{9r^2}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x)=\ln\operatorname{tg}x$, $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Kako je $f''(x)=\frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}>0$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, f je strogo konveksna na $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Primjenom Popoviciuve nejednakosti imamo

$$\frac{1}{3}(\ln\operatorname{tg}\alpha+\ln\operatorname{tg}\beta+\ln\operatorname{tg}\gamma)+\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\geq\frac{2}{3}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\ln\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3}\ln(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)+\ln\sqrt{3}\geq\frac{2}{3}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

$$\ln\left(3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\right)\geq\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2.$$

Nadalje vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}$$

pa odatle slijedi tražena nejednakost.

Zadatci za vježbu

1. Dokažite da za svaka tri pozitivna realna broja a, b, c vrijedi
$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)^2.$$
2. Neka su x_1, x_2, x_3 pozitivni brojevi, pri čemu nisu svi međusobno jednaki. Dokažite da je
$$x_1^6+x_2^6+x_3^6+3x_1^2x_2^2x_3^2>2(x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3).$$
3. Dokažite da za svaki trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost
$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\geq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R},$$
gdje su R i r polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice.
4. Dokažite da za svaki šiljastokutan trokut s kutovima α, β, γ vrijedi nejednakost
$$r\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+3\sqrt{3}r\geq 2s,$$
pri čemu je r polumjer trokutu upisane kružnice, a s njegov poluopseg.

Literatura

[1] Tiberiu Popoviciu (1965), *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes*, Analele ştiinţifice Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Secţia I a Mat., 11: 155–164.

[2] Svetozar Kurepa, *Matematička analiza I.* i *II.* dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[3] Šefket Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[4] O. Bottema and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[5] `http://www.imomath.com/`

[6] Constantin P. Niculescu i Lars-Erik Persson, *Convex function and their applications*, A Contemporary Approach, Springer, 2006, 7–60.