Jedan zadatak s američke olimpijade i njegova poopćenja

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Marjan Praljak*[3], *Robert Soldo*[4]

U ovom ćemo radu analizirati jedan zadatak koji se prvi put pojavio na 10. Američkoj matematičkoj olimpijadi 1981. godine. Poslije toga natjecanja privukao je podosta pozornosti i nastojanja da se riješi na mnoge načine. Zadatak se dosta istaknuo i svojom težinom, odnosno složenošću službenog rješenja.

Zadatak 1. *Ako je x pozitivan realan i n prirodan broj, dokažite da vrijedi*

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \ldots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}, \tag{1}$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x.

Rješenje 1. Navodimo najprije službeno rješenje. Neka je $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$, gdje je $\alpha = \{x\}$ razlomljeni dio broja x, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lfloor kx \rfloor = \lfloor k\lfloor x \rfloor + k\alpha \rfloor = k\lfloor x \rfloor + \lfloor k\alpha \rfloor.$$

Prema tome, dana nejednakost poprima oblik

$$n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\alpha \rfloor \geq \left(\lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{1}\right) + \left(\lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor 2\alpha \rfloor}{2}\right) + \ldots + \left(\lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}\right)$$

i ekvivalentna je s

$$\lfloor n\alpha \rfloor \geq \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2\alpha \rfloor}{2} + \ldots + \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Stoga je dovoljno promatrati slučaj $0 \leq x < 1$. Za $\alpha \in [0, 1\rangle$ i lijeva i desna strana gornje nejednakosti predstavljaju nepadajuće po dijelovima konstantne funkcije, koje mogu mijenjati svoje vrijednosti jedino u točakama $\alpha = \frac{a}{b}$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{Z}$, takvi da $1 \leq a < b \leq n$, pa je dovoljno dokazati nejednakost

$$\left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor}{k}, \quad 1 \leq a < b \leq n \text{ i } (a, b) = 1.$$

Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, za $k = 1, 2, \ldots, n$ postoje cijeli brojevi q_k, r_k takvi da je $ka = q_k b + r_k$, $0 \leq r_k < b$. Supstitucijom $\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = q_k = \frac{ka}{b} - \frac{r_k}{b}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ gornja nejednakost je ekvivalentna sa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k} \geq r_n.$$

[1] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb, `jjaksetic@pbf.hr`
[2] Autor je predavač na VBZ, Zaprešić, `josiplopatic@gmail.com`
[3] Autor je docent na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb, `mpraljak@pbf.hr`
[4] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb, `robert.soldo@prg.hr`

Kako je $r_k \geq 0$ za svaki k i $r_n < b$, dovoljno je dokazati nejednakost

$$\sum_{k=1}^{b-1} \frac{r_k}{k} \geq b-1.$$

Tvrdimo da je skup $\{r_1, r_2, \ldots, r_{b-1}\}$ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, b-1\}$. Da bi to provjerili, uočimo da ne može biti $r_k = 0$ za neki $1 \leq k < b$, jer bi to povlačilo $\frac{a}{b} = \frac{q_k}{k}$, a to je proturječje s tim da je razlomak $\frac{a}{b}$ ireducibilan. Također, nije moguće $r_j = r_k$ za neke $1 \leq j < k < b$, jer bi tada slijedilo $ja - q_j b = ka - q_k b$, tj. $(j-k)a = (q_j - q_k)b$, odakle dobivamo $\frac{a}{b} = \frac{q_j - q_k}{j-k}$, a što je proturječje s ireducibilnošću razlomka $\frac{a}{b}$. Prema tome, skup $\{r_1, r_2, \ldots, r_{b-1}\}$ je permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, b-1\}$. Sada, koristeći A-G nejednakost, slijedi

$$\frac{\frac{r_1}{1} + \frac{r_2}{2} + \ldots + \frac{r_{b-1}}{b-1}}{b-1} \geq \sqrt[b-1]{\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{b-1}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (b-1)}} = \sqrt[b-1]{\frac{(b-1)!}{(b-1)!}} = 1,$$

tj. $\sum_{k=1}^{b-1} \frac{r_k}{k} \geq b-1$, čime je dokaz gotov.

⋆ ⋆ ⋆

U drugom rješenju ovog zadatka koristimo jedno svojstvo funkcije najveće cijelo (koje se lako može provjeriti), a koje vrijedi za sve realne brojeve:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor. \tag{2}$$

Također ćemo koristiti i Abelovu[5] sumacijsku formulu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} b_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1; \;\; a_k, b_k \in \mathbb{R} \;\; (k = 1, \ldots, n).$$

⋆ ⋆ ⋆

Rješenje 2. U gore navedenu formulu specijalno uvrstimo $a_k = \frac{1}{k}$ i $b_k = \lfloor kx \rfloor$, $k = 1, \ldots, n$, pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \sum_{i=1}^{k} \lfloor ix \rfloor \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lfloor ix \rfloor}{k(k+1)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Nadalje, tvrdimo

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lfloor ix \rfloor}{k(k+1)} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\lfloor ix \rfloor}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

[5] Niels Henrik Abel (1802. – 1829.), norveški matematičar.

Tvrdnja (4) je ekvivalentna s

$$
\begin{aligned}
&(k+2)\sum_{i=1}^{k}\lfloor ix\rfloor \le k\sum_{i=1}^{k+1}\lfloor ix\rfloor, \quad k=1,\dots,n-1,\\
\iff\ & 2\sum_{i=1}^{k}\lfloor ix\rfloor \le k\lfloor (k+1)x\rfloor, \quad k=1,\dots,n-1,
\end{aligned}
$$

koju dokazujemo koristeći nejednakost (2). Dobivamo

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{k}\lfloor ix\rfloor &= \sum_{i=1}^{k}\lfloor ix\rfloor + \sum_{i=1}^{k}\lfloor ((k+1)-i)x\rfloor\\
&= \sum_{i=1}^{k}\Big(\lfloor ix\rfloor + \lfloor ((k+1)-i)x\rfloor\Big) \le \sum_{i=1}^{k}\lfloor (k+1)x\rfloor = k\lfloor (k+1)x\rfloor.
\end{aligned}
$$

Odavde i iz (4), slijedi

$$
\sum_{i=1}^{k}\frac{\lfloor ix\rfloor}{k(k+1)} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{\lfloor ix\rfloor}{n(n+1)}, \quad k=1,\dots,n-1. \tag{5}
$$

Primijenimo li nejednakost (5) na relaciju (3), te dalje koristeći nejednakost (2), dobivamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{k} &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lfloor ix\rfloor}{n(n+1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor + \frac{n-1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\lfloor ix\rfloor\\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor = \frac{1}{n+1}\Big[2\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor kx\rfloor + 2\lfloor nx\rfloor\Big]\\
&= \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\big(\lfloor kx\rfloor + \lfloor (n-k)x\rfloor\big) + 2\lfloor nx\rfloor\Big]\\
&\le \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor nx\rfloor + 2\lfloor nx\rfloor\Big] = \lfloor nx\rfloor.
\end{aligned}
$$

Rješenje 3. Označimo s $a_k = \dfrac{\lfloor kx\rfloor}{k}$, $A_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\lfloor ix\rfloor}{i}$. Uz ove oznake, trebamo dokazati $\lfloor nx\rfloor \ge A_n$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Baza indukcije, za $n=1$, nejednakost je trivijalno ispunjena. Pretpostavimo da ona vrijedi za sve prirodne brojeve $1,\dots,n-1$, tj. pretpostavimo da vrijedi $\lfloor kx\rfloor \ge A_k$, $k=1,\dots,n-1$. Korak indukcije – dokažimo tvrdnju za broj n.

Najprije, uočimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}A_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{\lfloor ix\rfloor}{i} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\frac{\lfloor ix\rfloor}{i} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lfloor ix\rfloor}{i}\cdot(n-i)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{k}\lfloor kx\rfloor = nA_n - \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor,
\end{aligned}
$$

odakle, koristeći pretpostavku indukcije i nejednakost (2), imamo

$$
\begin{aligned}
nA_n &= \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \le \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor kx \rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\lfloor kx \rfloor + \lfloor (n-k)x \rfloor \big) \le \lfloor nx \rfloor + \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor nx \rfloor = n \lfloor nx \rfloor.
\end{aligned}
$$

Dva poopćenja

Zadatak 2. *Ako su $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ realni brojevi za koje vrijedi $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 0$ i x bilo koji realni broj, tada je*

$$
a_1\lfloor x \rfloor + a_2 \lfloor 2x \rfloor + \ldots + a_n \lfloor nx \rfloor \ge 0. \tag{6}
$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ imamo $a_1 = 0$, pa tvrdnja $a_1\lfloor x \rfloor \ge 0$ očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. Dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Neka su $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{n+1}$ realni brojevi za koje vrijedi $a_1 + 2a_2 + \ldots + (n+1)a_n = 0$ i x proizvoljan realan broj.

Lijevu stranu nejednakosti (6) zapisat ćemo na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} a_i \lfloor ix \rfloor &= \sum_{i=1}^{n} a_i \lfloor ix \rfloor + a_{n+1} \lfloor (n+1)x \rfloor = \sum_{i=1}^{n} a_i \lfloor ix \rfloor + \frac{a_{n+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \lfloor (n+1)x \rfloor \\
&= \frac{a_{n+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(\lfloor (n+1)x \rfloor - 2 \lfloor ix \rfloor \big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i + 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{n} \Big) \lfloor ix \rfloor \\
&= \frac{a_{n+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(\lfloor (n+1)x \rfloor - \lfloor ix \rfloor - \lfloor (n+1-i)x \rfloor \big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i + 2\frac{a_{n+1}}{n} \Big) \lfloor ix \rfloor.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Uočimo da je a_{n+1} nenegativan realan broj, inače bi zbog uvjeta $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1}$ i svi ostali bili negativni, pa ne bi vrijedio uvjet $a_1 + 2a_2 + \ldots + (n+1)a_n = 0$. Ponovo, koristeći nejednakost (2), slijedi $\lfloor ix \rfloor + \lfloor (n+1-i)x \rfloor \le \lfloor (n+1)x \rfloor$, pa je prva suma na desnoj strani u relaciji (7) nenegativna. Da to vrijedi i za drugu sumu dokazujemo koristeći pretpostavku indukcije. U tu svrhu, označimo $b_i = a_i + 2 \cdot \dfrac{a_{n+1}}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. Za ove brojeve očito vrijedi $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ i

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} ib_i &= \sum_{i=1}^{n} i\Big(a_i + 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{n} \Big) = \sum_{i=1}^{n} ia_i + 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \sum_{i=1}^{n} ia_i + 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} ia_i + (n+1)a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ia_i = 0.
\end{aligned}
$$

Stoga je, prema pretpostavci indukcije

$$
\sum_{i=1}^{n} \Big(a_i + 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{n} \Big) \lfloor ix \rfloor = \sum_{i=1}^{n} b_i \lfloor ix \rfloor \ge 0.
$$

Ovime smo dobili da je desna strana identiteta (7) nenegativan realan broj, tj. $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \lfloor ix \rfloor \geq 0$, čime je tvrdnja dokazana.

Napomena 1. Uočimo da specijalno za $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{2}, \ldots, a_{n-1} = -\frac{1}{n-1}$ i $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, imamo našu zadanu nejednakost.

Drugo poopćenje se pojavilo na Azijsko-pacifičkoj olimpijadi[6] 1999. godine.

Zadatak 3. *Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz realnih brojeva za koje je $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ za sve $i, j = 1, 2, \ldots$ tada vrijedi nejednakost*

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

za svaki prirodan broj n, a ako je $a_{i+j} \geq a_i + a_j$, vrijedi suprotna nejednakost.

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Baza, za $n = 1$ tvrdnja je trivijalno ispunjena. Pretpostavimo da ona vrijedi za sve $n = 1, 2, \ldots, k$. Korak indukcije: dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$. Koristeći pretpostavku indukcije, imamo

$$\begin{aligned}
a_1 &\geq a_1, \\
a_1 + \frac{a_2}{2} &\geq a_2, \\
&\vdots \\
a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} &\geq a_k.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$ka_1 + (k-1)\frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Dodamo li lijevoj i desnoj strani ove nejednakosti zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, imamo

$$(k+1)\Big(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k}\Big) \geq (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + \ldots + (a_k + a_1).$$

Sada koristeći činjenicu $a_{i+j} \leq a_i + a_j$, iz gornje nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
&(k+1)\Big(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k}\Big) \geq k \cdot a_{k+1} \\
&\iff a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} \geq \frac{k}{k+1} \cdot a_{k+1} \\
&\iff a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} \geq a_{k+1} - \frac{1}{k+1} \cdot a_{k+1} \\
&\iff a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{k} + \frac{a_{k+1}}{k+1} \geq a_{k+1},
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Napomena 2. Ako se stavi $a_i = \lfloor ix \rfloor$ u prethodnom zadatku dobivamo originalnu nejednakost (1).

[6] Natjecanje koje se održava svake godine od 1989. godine, a uglavnom okuplja zemlje Pacifičkog područja.

Profinjenje nejednakosti

U nastavku ćemo dokazati, ako u našoj nejednakosti nije moguć znak jednakosti, tj. ako je $\lfloor nx \rfloor \neq \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \ldots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, tada vrijedi poboljšana nejednakost

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{1}{6} + \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \ldots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Označimo $x_n = \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$, $d_{n,x} =$ najmanji prirodan broj d takav da je $\frac{\lfloor dx \rfloor}{d} = x_n$. Jasno je $d_{n,x} \leq n$.

Teorem 1. *Ako je $d_{n,x} = 1$, tada je $\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$, inače je $\lfloor nx \rfloor \geq \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $d = d_{n,x} = 1$. Tada je $\lfloor x \rfloor = \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Ova primjedba, te činjenica, koja proizlazi iz nejednakosti (2), $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$, za svaki realan broj x i za sve prirodne brojeve k, povlače $\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} = \lfloor x \rfloor$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odavde je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} = n\lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Pretpostavimo $d_{n,x} > 1$ i neka je $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ takav da je $n \equiv r \pmod{d}$.

Uočimo, $x_n = \frac{\lfloor dx \rfloor}{d} \leq \frac{dx}{d} = x$, odakle imamo $kx_n \leq kx$, za svaki prirodan broj k. S druge strane, iz definicije maksimuma, imamo $x_n \geq \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stoga je $\lfloor kx \rfloor \leq kx_n \leq kx$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odakle slijedi

$$\lfloor kx_n \rfloor = \lfloor kx \rfloor, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Nadalje, ako je $y < x_n$, tada je $dy < dx_n = \lfloor dx \rfloor$, pa je i $\lfloor dy \rfloor < \lfloor dx \rfloor$. To znači da je x_n najmanji realan broj koji zadovoljava relaciju (8). Iz $n \equiv r \pmod{d}$ je $n - r \equiv 0 \pmod{d}$, tj. $n - r$ je višekratnik broja d, pa je $(n-r)x_n$ cijeli broj. Stoga je

$$\begin{aligned}
\lfloor nx_n \rfloor &= \lfloor rx_n + (n-r)x_n \rfloor = \lfloor rx_n \rfloor + (n-r)x_n \\
&= \lfloor rx_n \rfloor - \sum_{k=1}^{r} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} + (n-r)x_n - \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} \\
&= \lfloor rx_n \rfloor - \sum_{k=1}^{r} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} + \sum_{k=r+1}^{n} x_n - \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} \\
&= \lfloor rx_n \rfloor - \sum_{k=1}^{r} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{kx_n - \lfloor kx_n \rfloor}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k}.
\end{aligned}$$

Koristeći ranije dokazanu nejednakost (1), imamo $\sum_{k=1}^{r} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} \leq \lfloor rx_n \rfloor$, pa iz gornjeg identiteta, uz relaciju (8), slijedi

$$\lfloor nx \rfloor - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k} \geq \sum_{k=r+1}^{n} \frac{kx_n - \lfloor kx_n \rfloor}{k}. \tag{9}$$

Kako je $n \geq d > r$ i $n - r \equiv 0 \pmod{d}$ $n - r$ je prirodan broj i višekratnik prirodnog broja d, stoga je $n - r \geq d$, odnosno $n \geq r + d$. Nadalje, iz $r \leq d - 1$, imamo $r + d \leq 2d - 1$. Sada, je

$$\begin{aligned}\sum_{k=r+1}^{n} \frac{kx_n - \lfloor kx_n \rfloor}{k} &\geq \sum_{k=r+1}^{r+d} \frac{kx_n - \lfloor kx_n \rfloor}{k} \\ &\geq \frac{1}{r+d} \sum_{k=r+1}^{r+d} \big(kx_n - \lfloor kx_n \rfloor\big) \\ &\geq \frac{1}{2d-1} \sum_{k=r+1}^{r+d} \big(kx_n - \lfloor kx_n \rfloor\big). \end{aligned} \tag{10}$$

Pokazat ćemo da je $\{kdx_n - d\lfloor kx_n \rfloor \ : \ r+1 \leq k \leq r+d\}$ skup cijelih brojeva koji je permutacija skupa $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. Iz definicije broja $d = d_{n,x}$ slijedi da je d najmanji prirodan broj takav da je dx_n cijeli broj. Stoga su brojevi d i dx_n relativno prosti. Kada to ne bi bilo, postojao bi prirodan broj $\frac{d}{m}$, gdje je $m \geq 2$ najveća zajednička mjera brojeva d i dx_n, takav da je $\frac{d}{m} x_n$ cijeli broj, što je radi $\frac{d}{m} < d$, kontradikcija s minimalnošću takvog prirodnog broja d. Stoga, ako je l prirodan takav da je lx_n cijeli broj, tada je $l > d$ i jer je $lx_n = \frac{l}{d} dx_n$, broj $\frac{l}{d} dx_n$ je cijeli. Kako su brojevi d i dx_n relativno prosti, $\frac{l}{d}$ je prirodan broj, odnosno l je višekratnik broja d.

Ako su a i b cijeli brojevi, nekongruentni modulo d, tj. ako je $a \not\equiv b \pmod{d}$, tada su i brojevi adx_n i bdx_n također cijeli brojevi nekongruentni modulo d. U protivnom, $(a-b)x_n$ bio bi cijeli broj, odakle prema prethodnoj diskusiji $a - b$ ili $b - a$ bio bi višekratnik od d, a to je kontradikcija s izborom brojeva a i b. Na istovjetan način, zaključujemo da su tada i brojevi $adx_n - d\lfloor ax_n \rfloor$, $bdx_n - d\lfloor bx_n \rfloor$ također nekongruentni modululu d. Budući da je $0 \leq d(kx_n - \lfloor kx_n \rfloor) < d$, za svaki prirodan broj k i jer je $r+1, r+2, \ldots, r+d$ niz od d uzastopnih prirodnih brojeva, vrijedi

$$\{kdx_n - d\lfloor kx_n \rfloor : r+1 \leq k \leq r+d\} = \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2d-1} \sum_{k=r+1}^{r+d} \big(kx_n - \lfloor kx_n \rfloor\big) &= \frac{1}{2d-1} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{k}{d} \\ &= \frac{d-1}{2(2d-1)} = \frac{1}{4 + \frac{2}{d-1}}.\end{aligned}$$

Jer je $d = d_{n,x} > 1$, to je $d \geq 2$, pa iz gornjeg identiteta slijedi

$$\frac{1}{2d-1}\sum_{k=r+1}^{r+d}\big(kx_n - \lfloor kx_n \rfloor\big) \geq \frac{1}{6}.$$

Iz nejednakosti (9) i (10), koristeći relaciju (8), konačno dobivamo

$$\lfloor nx \rfloor - \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \geq \frac{1}{6},$$

što se i tvrdilo. Jednakost se postiže npr. za $n = 3$ i $x = \frac{1}{2}$.

Korolar 1. *Ako je* $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{n}$, *tada je* $\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx_n \rfloor}{k}$, *inače je* $\lfloor nx \rfloor \geq \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$.

Dokaz. Prema teoremu 1 dovoljno je dokazati $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{n} \iff d_{n,x} = 1$. Pretpostavimo li da je $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{n}$, iz $kx < k\lfloor x \rfloor + \frac{k}{n} \leq k\lfloor x \rfloor + 1$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odakle je $\lfloor kx \rfloor \leq k\lfloor x \rfloor$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stoga je $\lfloor x \rfloor \geq \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. S druge strane, $\lfloor x \rfloor = \frac{\lfloor 1 \cdot x \rfloor}{1} \leq \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Dakle, $\lfloor x \rfloor = \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$, što povlači $d_{n,x} = 1$. Obrat. Pretpostavimo, da je $x - \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{n}$, odakle slijedi $nx \geq n\lfloor x \rfloor + 1$. Stoga je $\lfloor nx \rfloor \geq n\lfloor x \rfloor + 1$. Iz posljednje nejednakosti dobivamo $\lfloor x \rfloor < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$, tj. $\lfloor x \rfloor \neq \max\left\{\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$, što povlači $d_{n,x} > 1$.

Literatura

[1] E. V. Sergeeva, *Strane matematičke olimpijade*, Nauka Moskva, 1987.

[2] M. S. Klamkin, *U.S.A. Mathematical Olympiads, 1972 – 1986*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1988.

[3] E. Lozansky, C. Rousseau, *Winning solutions*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[4] F. Zejnulahi, *Funkcija najveći cijeli dio I*, Triangle Vol. 3 (1999), No. 4, 256–269.

[5] D. R. Richman, *A sum involving the greatest-integer function*, 2019.

[6] *Kőzépiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 2004/3.