ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2021. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/287.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3819. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$x^2 - 16x + 9y^2 - 2xy + 72 = 0.$$

3820. Dani su realni borjevi x i y takvi da je
$$(x+y)^4 + (x-y)^4 = 4112$$
$$x^2 - y^2 = 16.$$
Odredi $x^2 + y^2$.

3821. Produkt dva od četiri korijena jednadžbe
$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$
je -32. Odredi parametar k.

3822. Za pozitivne brojeve a, b, c takve da je $a+b+c=1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza
$$S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}.$$

3823. Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi kroz sjecišta kružnica
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0,$$
a središte joj je na pravcu $y = x$.

3824. Nađi realan broj a takav da funkcija
$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x} + a \cdot \frac{5x+1}{x^2-x}$$
bude neparna?

3825. Neka je O središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži identitet
$$\frac{|OA|^2}{bc} + \frac{|OB|^2}{ac} + \frac{|OC|^2}{ab} = 1.$$

3826. Neka su $|AA_1| = s_\alpha$ i $|BB_1| = s_\beta$ duljine simetrala unutarnjih šiljastih kutova pravokutnog trokuta ABC. Dokaži da vrijedi nejednakost $s_\alpha s_\beta \geq 4P(2-\sqrt{2})$, gdje je P površina trokuta.

3827. Unutarnji kut γ trokuta ABC podijeljen je zrakama a_1, ..., a_{n-1} na n jednakih dijelova. S C_1, ..., C_{n-1} su označene točke u kojima te zrake sijeku stranicu $\overline{AB}$. Dokaži da je
$$\frac{\frac{1}{|AC_1|} - \frac{1}{|AB|}}{\frac{1}{|C_{n-1}B|} - \frac{1}{|AB|}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

3828. Dana je kružnica s promjerom $\overline{AB}$. Točke C i D su na kružnici s iste strane od AB, pri čemu BD raspolavlja kut $\sphericalangle ABC$. Tetive $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u E. Ako je $|AB| = 169$ i $|CE| = 119$, koliko je $|ED|$?

3829. Ako je c hipotenuza i h visina pravokutnog trokuta, dokaži nejednakost
$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2}.$$

3830. Odredi maksimalnu vrijednost izraza
$$3\sin\left(x + \frac{\pi}{9}\right) + 5\sin\left(x + \frac{4\pi}{9}\right)$$
za sve $x \in \mathbb{R}$.

3831. Odredi sumu
$$S_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}.$$
Odredi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3832. Ako je V volumen i S površina bočne strane pravilnog stošca, dokaži nejednakost
$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$
Kada vrijedi jednakost?

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 490. Luka je na bateriju serijski spojio žaruljicu i komad aluminijske folije dugačak 30 cm i širok 1 cm. Izmjerio je da je struja u tom krugu 0.25 A (ampera), a napon na krajevima folije je iznosio 85.5 mV (milivolta). Pronašao je da električna otpornost aluminija iznosi $2.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Koliko je debela folija?

OŠ – 491. Zemlji za jedan okret oko Sunca treba 365 dana 5 sati 48 minuta i 46 sekundi. Izračunajte njenu brzinu uz pretpostavku da joj je staza kružnica. Prosječna udaljenost Zemlje od Sunca iznosi 149.6 milijuna kilometara.

OŠ – 492. Filip je na stalak objesio oprugu kojoj je duljina u neopterećenom stanju 13 cm. Kad je na nju objesio uteg mase pola kg njena je duljina iznosila 18 cm. Zatim je na taj uteg objesio drugu oprugu duljine 20 cm i konstante elastičnosti $120\ \mathrm{N/m}$. Izračunajte masu utega koji bi trebalo objesiti na drugu oprugu da nakon toga obje opruge budu jednako dugačke. Mase opruga zanemarite.

OŠ – 493. Posljednjih su desetljeća izumljene mnoge legure kojima je talište niže od $100\ ^\circ\mathrm{C}$ i one imaju veliku primjenu u tehnici i industriji. Na primjer, galinstan je legura galija, indija i kositra koja u termometrima zamjenjuje puno otrovniju živu. Njegovo je talište na $-19\ ^\circ\mathrm{C}$. Galinstan sadrži 68.5 posto galija, 21.5 posto indija i 10 posto kositra. Izračunajte njegovu gustoću. Gustoća galija je $5910\ \mathrm{kg/m^3}$, indija $7310\ \mathrm{kg/m^3}$, a kositra $7265\ \mathrm{kg/m^3}$.

1763. Njihalo mase 0.6 kg i duljine 1.2 m njiše tako da je maksimalan kut otklona 8°. Odredi:

a) period njihanja,

b) energiju njihanja,

c) brzinu njihala u trenutku kada otklon iznosi 6°.

1764. Fizičko njihalo sastoji se od tankog homogenog štapa duljine l i mase m koji može njihati oko točke na $3/4$ duljine štapa. Izrazi period njihanja malih oscilacija pomoću l i g.

1765. Otpornik otpora $R = 5\ \Omega$ spojen je serijski sa zavojnicom induktiviteta $L = 0.015$ H zanemarivog otpora. Kolika mora biti frekvencija izmjeničnog napajanja 100 V, da bi Jouleova snaga topline na otporniku iznosila 150 W?

1766. Umjetni satelit kruži iznad Zemljinog ekvatora od zapada prema istoku u smjeru vrtnje Zemlje. Nad istu točku na ekvatoru dođe nakon 110 minuta. Na kojoj visini i kojom brzinom kruži satelit? Zemlja ima masu $6\cdot 10^{24}$ kg, radijus 6371 km i ophodno vrijeme rotacije 24 sata.

1767. U zraku ima 78 % dušika (volumni udio) molekula N_2. Ako je tlak zraka na površini prosječno 101 325 Pa, a Zemlja kugla radijusa 6371 km, ubrzanja sile teže $9.81\ \mathrm{m/s^2}$, odredi masu svega dušika u atmosferi (u kg). Atomska masa dušika je $14u$, atomskih jedinica mase.

1768. Odredi vrijeme potrebno automobilu da prevali put od 120 m:

- ako je automobil krenuo jednoliko ubrzano iz stanja mirovanja,
- nakon 4.2 sekunde gibanja brzina automobila je $14.7\ \mathrm{m/s}$,
- nakon 5 sekundi ubrzanja, automobil se giba jednoliko.

1769. Plemeniti plin argon je 37.93 % gušći, a neon 31.03 % rjeđi od zraka. Koliki treba biti volumni udio argona u mješavini argona i neona da bi gustoća mješavine bila jednaka gustoći zraka?

C) Rješenja iz matematike

3791. *Pokaži da su svi brojevi oblika 12008, 120308, 1203308, . . . djeljivi s 19.*

Rješenje. Dokaz matematičkom indukcijom.

Prvi broj je $12\,008 = 632 \cdot 19$ djeljiv s 19.

Opći broj možemo zapisati u obliku

$$120 \cdot 10^{k+2} + \underbrace{3\ldots3}_{k} \cdot 10^2 + 8$$

$$= 120 \cdot 10^{k+2} + \frac{1}{3}(10^k - 1) \cdot 10^2 + 8.$$

Pretpostavimo da je za neko $k \geq 0$ broj

$$120 \cdot 10^{k+2} + \frac{1}{3}(10^k - 1) \cdot 10^2 + 8$$

djeljiv s 19. Tada je

$$120 \cdot 10^{k+3} + \frac{1}{3}(10^{k+1} - 1) \cdot 10^2 + 8$$
$$- \left[120 \cdot 10^{k+2} + \frac{1}{3}(10^k - 1) \cdot 10^2 + 8\right]$$
$$= 120 \cdot 9 \cdot 10^{k+2} + \frac{1}{3}(10^{k+1} - 10^k) \cdot 10^2$$

$$= 1080 \cdot 10^{k+2} + \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10^k \cdot 10^2$$
$$= 1083 \cdot 10^{k+2}.$$

No, $1083 = 57 \cdot 19$.

Marko Dodig (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3792. *Odredi sva realna rješenja sistema jednadžbi*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$$
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1+y} = \frac{31}{20}.$$

Rješenje. Uvjeti na rješenja su: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq -1$ i $y \neq -1$. Množimo jednadžbe zajedničkim nazivnikom. Dobije se:

$$y + x = 7xy$$
$$20x + 20 + 20y + 20 = 31(xy + x + y + 1).$$

I dalje sređujemo 2. jednadžbu:

$$40 + 20(x + y) = 31(xy + x + y + 1).$$

Umjesto $x + y$ uvrštavamo $7xy$, dobije se:

$$40 + 20 \cdot 7xy = 31(xy + 7xy + 1)$$
$$40 + 140xy = 31(8xy + 1)$$
$$40 + 140xy = 248xy + 31$$
$$108xy = 9$$
$$xy = \frac{1}{12}.$$

Dobije se: $x = \frac{1}{12y}$ i uvrstimo u jednadžbu $x + y = 7xy$. Imamo:

$$\frac{1}{12y} + y = 7 \cdot \frac{1}{12y} \cdot y$$
$$\frac{1}{12y} + y = \frac{7}{12} \quad / \cdot 12y$$
$$1 + 12y^2 = 7y$$
$$12y^2 - 7y + 1 = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $y_1 = \frac{1}{4}$ i $y_2 = \frac{1}{3}$. Sada još izračunamo vrijednosti nepoznanice x:

$$x_1 = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Konačno, realna rješenja sustava su: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ i $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

Lea Adlešić (3),
SŠ "Donji Miholjac", Donji Miholjac

3793. *Odredi sva rješenja jednadžbe*

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$$

Prvo rješenje.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8} \quad / \,^3$$
$$3\sqrt[3]{x^2(x-16)} + 3\sqrt[3]{x(x-16)^2} + 2x - 16 = x - 8$$
$$3\sqrt[3]{x(x-16)}\sqrt[3]{x-8} = 8 - x \quad / \,^3$$
$$27(x^3 - 24x^2 + 128x) = 512 - 192x + 24x^2 - x^3$$
$$7x^3 - 168x^2 + 912x - 128 = 0$$
$$7x^3 - 56x^2 - 112x^2 + 896x + 16x - 128 = 0$$
$$7x^2(x-8) - 112x(x-8) + 16(x-8) = 0$$
$$(x-8)(7x^2 - 112x + 16) = 0, \quad x_1 = 8$$
$$7x^2 - 112x + 16 = 0$$
$$x_{2,3} = \frac{-(-112) \pm \sqrt{(-112)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 16}}{2 \cdot 7}$$
$$x_{2,3} = 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}.$$

Faruk Sijerčić (3),
Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH

Drugo rješenje. Uvedemo li supstituciju $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{x-16}$ jednadžba ima oblik:

$$u + v = \sqrt[3]{\frac{u^3 + v^3}{2}}$$
$$2(u+v)^3 - \left(u^3 + v^3\right) = 0$$
$$(u+v)\left[2(u+v)^2 - u^2 + uv - v^2\right] = 0$$

$$(u+v)\left(u^2+5uv+v^2\right)=0.$$

1)

$$\begin{aligned} u+v&=0\\ u&=-v\\ \sqrt[3]{x}&=-\sqrt[3]{x-16}\\ x&=-x+16\\ x_1&=8 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} u^2+5uv+v^2&=0\\ u^2+v^2&=-5uv\\ (u+v)^2&=-3uv\\ \sqrt[3]{(x-8)^2}&=-3\sqrt[3]{x(x-16)}\\ (x-8)^2&=-27x(x-16)\\ 7x^2-112x+16&=0\\ x_{2,3}&=8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21} \end{aligned}$$

Provjerom se vidi da sva tri rješenja zadovoljavaju polaznu jednadžbu.

Marko Dodig (2), Zagreb

3794. *Rješenja jednadžbe $x^2-bx+a-1=0$ su iz skupa $\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Dokaži da je broj a^2-b^2 složen.*

Prvo rješenje. Iz Vièteovih formula je:

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=b\\ x_1x_2&=a-1. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} &a^2-b^2\\ &=(x_1x_2+1)^2-(x_1+x_2)^2\\ &=(x_1x_2+1-x_1-x_2)\cdot(x_1x_2+1+x_1+x_2)\\ &=[x_1(x_2-1)-(x_2-1)]\cdot[x_1(x_2+1)+(x_2+1)]\\ &=(x_1-1)\cdot(x_2-1)\cdot(x_1+1)\cdot(x_2+1). \end{aligned}$$

Iz ovog zapisa i uvjeta zadatka je očito da je broj a^2-b^2 složen, jer su barem dva (od četiri) faktora veća od 1.

Marko Dodig (2), Zagreb

Drugo rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da je a^2-b^2 prost broj. Kako je $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ i a, $b>0$, slijedi $a-b=1$. Tada je $x^2-bx+b=0$, pa je $(x^2-1)-b(x-1)=-1$, odakle je $(x-1)(x+1-b)=-1$. Kako je x pozitivan broj, dobivamo $x-1=1$ i $x+1-b=-1$, ili $x=2$ i $b=4$, što znači da je $a=5$. Tada je $a^2-b^2=9$, a ovo *nije* prost broj (kontradikcija).

Ur.

3795. *Dokaži nejednakost*

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}<n+1.$$

Prvo rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}&=\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot1}_{k-1\ \text{faktora}}}\\ &<\frac{1}{k}\left[\frac{k+1}{k}+k-1\right]=1+\frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} &1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}\\ &<1+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\\ &\quad+\ldots+\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\\ &<n+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\\ &=n+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\ &\quad+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\ &=n+\left(1-\frac{1}{n}\right)<n+1. \end{aligned}$$

Borna Gojšić (3), Gimnazija Karlovac, Karlovac

Drugo rješenje. Koristimo poznatu Bernoullijevu nejednakost:

$$(1+nx)^{\frac{1}{n}}\leq 1+x,$$

gdje je $n\in\mathbb{N}$ i $x>-1$ bilo koji realan broj. Ova nejednakost se lako dokaže matematičkom indukcijom. Sada zapišemo redom:

$$1=1,\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{4},$$
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<1+\frac{1}{9},\ldots,$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n^2}.$$

Zbrajanjem imamo:

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$
$$<n+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}. \qquad (*)$$

Sada je:

$$n^2>n(n-1)$$

tj.

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

pa imamo

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$
$$<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
$$=1-\frac{1}{n}<1.$$

Ako ovu nejednakost uvrstimo u $(*)$ slijedi tražena nejednakost:

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}<n+1.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3796. *Neka su a, b, c realni brojevi veći od 1. Odredi vrijednost izraza*

$$\frac{1}{1+\log_{a^2b}\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{1+\log_{b^2c}\left(\frac{a}{b}\right)}$$
$$+\frac{1}{1+\log_{c^2a}\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

Rješenje. Općenito, za neke brojeve t, u, $v\in\langle 1,+\infty\rangle$ vrijedi:

$$\frac{1}{1+\log_{t^2u}\left(\frac{v}{t}\right)}=\frac{1}{\log_{t^2u}(t^2u)+\log_{t^2u}\left(\frac{v}{t}\right)}$$
$$=\frac{1}{\log_{t^2u}\left(t^2u\cdot\frac{v}{t}\right)}$$
$$=\frac{1}{\log_{t^2u}(tuv)}$$
$$=\log_{tuv}(t^2u)$$

Dakle, početni izraz možemo zapisati kao:

$$\log_{abc}(a^2b)+\log_{abc}(b^2c)+\log_{abc}(c^2a)$$
$$=\log_{abc}(a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a)$$
$$=\log_{abc}((abc)^3)$$
$$=3\log_{abc}(abc)$$
$$=3.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

3797. *Pokaži da je broj $3^{105}+4^{105}$ djeljiv s 13, 49, 181 i 379, a nije djeljiv ni s 5 ni s 11.*

Prvo rješenje. Koristimo činjenicu da je $105=3\cdot5\cdot7$ i svojstva kongruencija.

$$3^3\equiv 1 \pmod{13}$$
$$\Longrightarrow\ 3^{105}\equiv 1^{35} \pmod{13}\equiv 1 \pmod{13}$$
$$4^3\equiv -1 \pmod{13}$$
$$\Longrightarrow\ 4^{105}\equiv(-1)^{35} \pmod{13}$$
$$\equiv -1 \pmod{13}$$
$$\Longrightarrow\ 3^{105}+4^{105}\equiv 0 \pmod{13}$$

Koristimo još jedno svojstvo kongruencija: Ako je $a\equiv b \pmod{p^n}$, gdje je p prost broj, tada je $a^p\equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$.

Dokaz. $a\equiv b \pmod{p^n}\ \Longrightarrow\ a=b+q\cdot p^n$, $q\in\mathbb{Z}$. Potenciranjem ove jednakosti s p imamo: $a^p=b^p+p^{n+1}\cdot t$, $t\in\mathbb{Z}\ \Longrightarrow\ a^p\equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$. Ovu ćemo tvrdnju koristiti specijalno za $p=7$ i $n=1$.

$$3^3\equiv -1 \pmod 7$$
$$\Longrightarrow\ 3^{15}\equiv(-1)^5 \pmod 7\equiv -1 \pmod 7$$
$$\overset{Tv.}{\Longrightarrow}\ (3^{15})^7=3^{105}\equiv -1 \pmod{49}$$

$$4^3 \equiv 1 \pmod 7$$
$$\implies 4^{15} \equiv 1^{15} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$$
$$\overset{Tv.}{\implies} (4^{15})^7 = 4^{105} \equiv 1 \pmod{49}$$

Zbrajanjem kongruencija slijedi

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{49}.$$

$$\begin{aligned}
3^7 &= 2187 \equiv 15 \pmod{181}\\
\implies 3^{21} &\equiv 15^3 \pmod{181}\\
&\equiv 117 \pmod{181}\\
\implies 3^{105} &\equiv 117^5 \pmod{181}\\
&\equiv 132 \pmod{181}\\
4^7 &= 16\,384 \equiv 94 \pmod{181}\\
\implies 4^{21} &\equiv 94^3 \pmod{181}\\
&\equiv 156 \pmod{181}\\
4^{105} &\equiv 156^5 \pmod{181} \equiv 49 \pmod{181}\\
\implies 3^{105} + 4^{105} &\equiv 0 \pmod{181}\\
3^7 &= 2187 \equiv 292 \pmod{379}\\
\implies 3^{21} &\equiv 292^3 \pmod{379}\\
&\equiv 199 \pmod{379}\\
\implies 3^{105} &\equiv 199^5 \pmod{379}\\
&\equiv 145 \pmod{379}\\
4^7 &= 16\,384 \equiv 87 \pmod{379}\\
\implies 4^{21} &\equiv 87^3 \pmod{379}\\
&\equiv 180 \pmod{379}\\
\implies 4^{105} &\equiv 180^5 \pmod{379}\\
&\equiv 234 \pmod{379}\\
\implies 3^{105} + 4^{105} &\equiv 0 \pmod{379}\\
3^3 &= 27 \equiv 2 \pmod 5\\
\implies 3^{15} &\equiv 2^5 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 5\\
\implies 3^{105} &\equiv 2^7 \pmod 5 \equiv 3 \pmod 5\\
4^3 &= 64 \equiv -1 \pmod 5\\
\implies 4^{15} &\equiv (-1)^5 \pmod 5\\
&\equiv -1 \pmod 5\\
\implies 4^{105} &\equiv (-1)^7 \pmod 5\\
&\equiv -1 \pmod 5\\
\implies 3^{105} + 4^{105} &\equiv 2 \pmod 5\\
3^3 &\equiv 5 \pmod{11}\\
\implies 3^{15} &\equiv 5^5 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}\\
\implies 3^{105} &\equiv 1 \pmod{11}\\
4^3 &\equiv -2 \pmod{11}\\
\implies 4^{15} &\equiv (-2)^5 \pmod{11}\\
&= -32 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}\\
\implies 4^{105} &\equiv 1 \pmod{11}\\
3^{105} + 4^{105} &\equiv 2 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Marko Dodig (2), Zagreb

Drugo rješenje. Izraz $a^n + b^n$ je djeljiv s $a+b$ ako je n neparan broj. Dakle, broj

$$3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35}$$

je djeljiv s $3^3 + 4^3 = 7 \cdot 13$. Slično iz

$$\begin{aligned}3^{105} + 4^{105} &= (3^5)^{21} + (4^5)^{21}\\ &= (3^7)^{15} + (4^7)^{15}\end{aligned}$$

slijedi da je djeljiv s $3^5 + 4^5 = 7 \cdot 181$ i $3^7 + 4^7 = 49 \cdot 379$. Dakle, $3^{105} + 4^{105}$ je djeljivo s 13, 49, 181 i 379.

Primijetimo da je $4^3 \equiv -1 \pmod 5$

$$4^{105} = (4^3)^{35} \equiv (-1)^{35} = -1 \pmod 5.$$

Nadalje, $3^2 \equiv -1 \pmod 5$ pa je

$$3^{104} = (3^2)^{52} \equiv (-1)^{52} = 1 \pmod 5$$

tj.

$$3^{105} \equiv 3 \pmod 5.$$

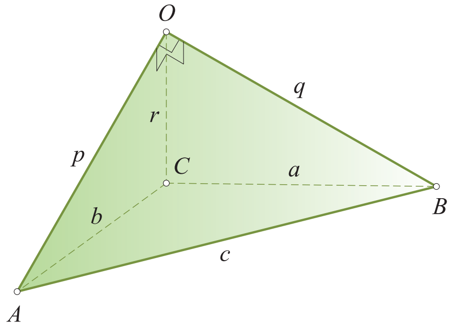
Dakle, $3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod 5$. Slično, $4^3 \equiv -2 \pmod{11}$, $4^{15} \equiv (-2)^5 = -32 \pmod{11}$ i radi $-32 \equiv 1 \pmod{11}$, $4^{15} \equiv 1 \pmod{11}$, $(4^{15})^7 \equiv 1 \pmod{11}$. Nadalje, $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ i $3^{105} \equiv 1 \pmod{11}$. Dakle, $3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod{11}$. Stoga $3^{105} + 4^{105}$ nije djeljivo niti s 5 niti s 11.

Ur.

3798. *Neka je $OABC$ tetraedar kod kojeg je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$. Dokaži da je*

$$P^2_{ABC} = P^2_{OAB} + P^2_{OBC} + P^2_{OCA}.$$

Rješenje. Neka je tetraedar $OABC$, i oznake kao na slici. Sada je $P_{OAB} = \frac{pq}{2}$, $P_{OBC} = \frac{rq}{2}$ i $P_{OCA} = \frac{pr}{2}$.



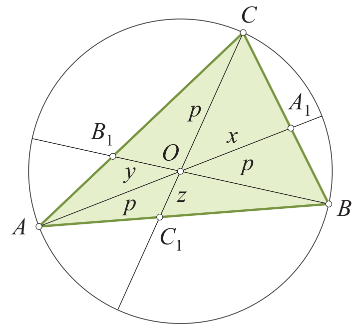
Koristeći Heronovu formulu, a kasnije i Pitagorin poučak imamo:

$$
\begin{aligned}
P_{ABC}^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\
&= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \\
&= \frac{1}{16}[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (c-b)^2] \\
&= \frac{1}{16} \cdot [a^2(b+c)^2 - (c^2-b^2)^2 \\
&\quad - a^4 + a^2(c-b)^2] \\
&= \frac{1}{16} \cdot (2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4) \\
&= \frac{1}{16} \cdot [2(r^2+q^2)(p^2+r^2) \\
&\quad + 2(r^2+q^2)(p^2+q^2) \\
&\quad + 2(p^2+r^2)(p^2+q^2) \\
&\quad - (r^2+q^2)^2 - (p^2+r^2)^2 - (p^2+q^2)^2] \\
&= \frac{1}{16} \cdot (4p^2q^2 + 4r^2q^2 + 4p^2r^2) \\
&= \left(\frac{pq}{2}\right)^2 + \left(\frac{rq}{2}\right)^2 + \left(\frac{pr}{2}\right)^2 \\
&= P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2.
\end{aligned}
$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3799. *Točka O je središte opisane kružnice šiljatokutnog trokuta ABC. Neka su A_1, B_1, C_1 točke presjeka dijametara kružnice kroz A, B, C, redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Polumjer opisane kružnice trokuta ABC je prost broj p, a duljine $|OA_1|$, $|OB_1|$, $|OC_1|$ su cijeli brojevi. Kolike su duljine stranica trokuta ABC?*

Rješenje. Neka je $x = |OA_1|$, $y = |OB_1|$, $z = |OC_1|$.



Imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}} &= \frac{x}{x+p} \\
\frac{P_{OCA}}{P_{ABC}} &= \frac{y}{y+p} \\
\frac{P_{OAB}}{P_{ABC}} &= \frac{z}{z+p}.
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem dobivamo

$$1 = \frac{x}{x+p} + \frac{y}{y+p} + \frac{z}{z+p}$$

ili $p^3 - p(xy+yz+zx) = 2xyz$.

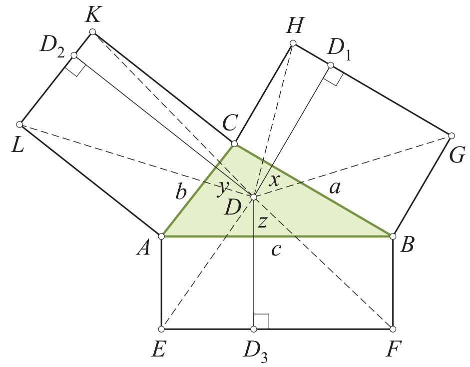
Dakle, $p|2xyz$, ali kako je x, y, $z < p$ imamo $p = 2$ i $x = y = z = 1$. Dakle, ABC je jednakostraničan trokut.

Ur.

3800. *Dana je točka D unutar trokuta ABC. S njegove vanjske strane su pravokutnici $AEFB$, $BGHC$ i $CKLA$ tako da je površina svakog od njih jednaka dvostrukoj površini trokuta. Dokaži da je zbroj površina trokuta DEF, DGH i DKL jednak četverostrukoj površini polaznog trokuta.*

Rješenje. Neka je P površina trokuta ABC. Sa slike imamo:

$$
\begin{aligned}
P &= P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} + P_{\triangle ACD} \\
P &= \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz \\
2P &= ax + by + cz.
\end{aligned}
$$



Ako ovoj jednakosti pribrojimo još sljedeće tri jednakosti iz uvjeta zadatka:

$$2P = a|CH|, \quad 2P = b|CK|, \quad 2P = c|AE|$$

slijedi:

$$8P = a(x+|CH|) + b(y+|CK|) + c(z+|AE|)$$
$$8P = a|DD_1| + b|DD_2| + c|DD_3|$$
$$\frac{1}{2}a|DD_1| + \frac{1}{2}b|DD_2| + \frac{1}{2}c|DD_3| = 4P$$
$$P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DGH} + P_{\triangle DKL} = 4P.$$

Ovime smo tvrdnju dokazali.

Marko Dodig (2), Zagreb

3801. *Kakav je trokut ako za njegove stranice i kutove vrijedi*

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}?$$

Rješenje.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} \quad \text{i} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}.$$

Dalje će biti $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}$. Uvrstimo to u polaznu jednakost

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta}},$$

kvadriramo i dobivamo:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}, \quad \text{tj.} \quad \frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Iz poučka o kosinusu je $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. Uvrstimo u jednakost (1) i sredimo. Dobivamo jednakost:

$$\frac{a}{b} = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-c^2}$$

i dalje

$$a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(a^2+c^2-b^2),$$
$$b^4 - a^4 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0,$$

faktoriziramo lijevu stranu

$$(b^2-a^2)(b^2+a^2) + c^2(a^2-b^2) = 0$$
$$\Longrightarrow (b^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) = 0.$$

Sada je

$$b^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow b^2 = a^2 \Longrightarrow b = a,$$

trokut je jednakokračan ili

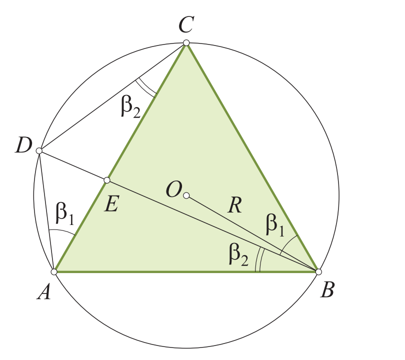
$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2,$$

trokut je pravokutan.

Lea Adlešić (3), Donji Miholjac

3802. *Kružnica je opisana jednakostraničnom trokutu ABC. Dana je točka D na luku nad stranicom $\overline{AC}$. Dužina $\overline{BD}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E tako da je $|AE| : |CE| = 2 : 3$. Ako je R polumjer kružnice odredi $|AD|$, $|CD|$ i $|BD|$.*

Rješenje. $\sphericalangle CDA = 120^\circ$, $\sphericalangle DBC = \beta_1$, $\sphericalangle ABD = \beta_2$, $\beta_1 + \beta_2 = 60^\circ$, $\sphericalangle DAC = \beta_1$, $\sphericalangle ACD = \beta_2$, $\dfrac{|AE|}{|CE|} = \dfrac{2}{3}$, $|AC| = a \Longrightarrow |AE| = \dfrac{2}{5}a$, $|CE| = \dfrac{3}{5}a$.



$$
\begin{aligned}
|BE|^2 &= |BC|^2 + |CE|^2 \\
&\quad - 2|BC| \cdot |CE| \cos \sphericalangle BCE \\
&= a^2 + \frac{9}{25}a^2 - 2a \cdot \frac{3}{5}a \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{19}{26}a^2 \\
|BE| &= \frac{\sqrt{19}}{5}a \\
\cos\beta_1 &= \frac{|BC|^2 + |BE|^2 - |CE|^2}{2|BC| \cdot |BE|} \\
&= \frac{a^2 + \frac{19}{25}a^2 - \frac{9}{25}a^2}{2a \cdot \frac{\sqrt{19}}{5}a} = \frac{7}{2\sqrt{19}} \\
\sin\beta_1 &= \sqrt{1-\cos^2\beta_1} = \sqrt{1 - \frac{49}{4\cdot 19}} \\
&= \sqrt{\frac{27}{4\cdot 19}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}} \\
\frac{|CD|}{\sin\beta_1} &= \frac{|AC|}{\sin 120^\circ} \implies \\
|CD| &= a \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin 120^\circ} \\
&= a \cdot \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{19}} \\
R &= \frac{a\sqrt{3}}{3} = 1 \implies |CD| = 3R\sqrt{\frac{3}{19}} \\
\cos\beta_2 &= \frac{|BE|^2 + |AB|^2 - |AE|^2}{2|BE| \cdot |AE|} \\
&= \frac{\frac{19}{25}a^2 + a^2 - \frac{4}{25}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{19}}{a} \cdot a} = \frac{4}{\sqrt{19}} \\
\sin\beta_2 &= \sqrt{1-\cos^2\beta_2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{16}{19}} = \sqrt{\frac{3}{19}} \\
\frac{|AD|}{\sin\beta_2} &= \frac{|AC|}{\sin 120^\circ} \implies \\
|AD| &= a \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin 120^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{19}} \\
&= 2R\sqrt{\frac{3}{19}}.
\end{aligned}
$$

Iz Ptolemejevog poučka za četverokut $ABCD$ imamo

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |AC|$$

tj.

$$
\begin{aligned}
&a \cdot 3R\sqrt{\frac{3}{19}} + a \cdot 2R\sqrt{\frac{3}{19}} = |BD| \cdot a \\
&|BD| = 5R\sqrt{\frac{3}{19}}.
\end{aligned}
$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

3803. *Odredi umnožak*

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \ldots \left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right).$$

Rješenje. Za $k = 1, 2, \ldots, 59$ imamo

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{\cos(60^\circ + k^\circ)}{\cos k^\circ} &= \frac{\cos k^\circ - \cos(60^\circ + k^\circ)}{\cos k^\circ} \\
&= \frac{2\sin 30^\circ \sin(30^\circ + k^\circ)}{\cos k^\circ} \\
&= \frac{\cos(90^\circ - 30^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ} \\
&= \frac{\cos(60^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{59}\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right) &= \frac{\cos 59^\circ \cos 58^\circ \ldots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \ldots \cos 58^\circ \cos 59^\circ} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3804. *Dokaži da sustav jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6y^2 &= z^2 \\
6x^2 + y^2 &= t^2
\end{aligned}
$$

ima samo trivijalno cjelobrojno rješenje.

Rješenje. Pretpostavimo da sustav ima netrivijalno cjelobrojno rješenje. Iz jednadžbi sustava uočavamo da možemo pretpostaviti da brojevi x, y, z, t nemaju zajedničkog faktora (u parovima su relativno prosti), inače neku od jednadžbi sustava jednostavno skratimo (kvadratom zajedničkog faktora). Zbrajanjem jednadžbi sustava dobivamo:

$$7 \cdot (x^2 + y^2) = z^2 + t^2.$$

Kvadrat bilo kojeg cijelog broja pri dijeljenju sa 7 daje ostatke $\{0, 1, 2, 4\}$. Da bi desna strana jednadžbe također bila djeljiva sa 7 jedino je moguće da su oba broja i z i t djeljiva sa 7, tj. $z = 7 \cdot z_0$, $t = 7 \cdot t_0$, gdje su z_0, t_0 cijeli brojevi. Sada je:

$$x^2 + y^2 = 7 \cdot (z_0^2 + t_0^2),$$

pa zbog istih razloga slijedi da su x i y djeljivi sa 7. Ali sada smo dobili da brojevi x, y, z, t imaju 7 kao zajednički faktor, što je proturječje s pretpostavkom da ti brojevi nemaju zajedničkog faktora. Dakle, sustav nema netrivijalnih cjelobrojnih rješenja, pa je jedino rješenje:

$$x = y = z = t = 0.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 482. *Za najbržu se životinju na svijetu smatra sivi sokol koji pri poniranju za plijenom dostiže brzine preko 300 km/h. Najveća zabilježena brzina iznosila je 389 km/h. Usporedite tu brzinu s brzinom Usaina Bolta koji s 9.58 sekundi drži svjetski rekord u utrci na 100 metara.*

Rješenje.

$$v_S = 389\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = 9.58\ \text{s}$$

$$\underline{s = 100\ \text{m}}$$

$$\frac{v_S}{v_B} = ?$$

$$v_B = \frac{s}{t} = \frac{100\ \text{m}}{9.58\ \text{s}} = 10.44\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_S}{v_B} = \frac{108\ \text{m/s}}{10.44\ \text{m/s}} = 10.34.$$

Petra Jurković (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 483. *U menzuru je usipano 5 dkg riže. Zrnca riže dosegla su do oznake za 45 mililitara. Zatim je u nju utočeno 25 mililitara vode i ukupna je razina iznosila 65 mililitara. Koliki je postotak zraka između zrnaca u odnosu na ukupni obujam riže? Kolika je gustoća jednog zrna riže?*

Rješenje.

$$V_{\text{riža+zrak}} = 45\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 25\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{v+r}} = 65\ \text{cm}^3$$

$$\underline{m = 5\ \text{dag} = 50\ \text{g}}$$

$$\frac{V_{\text{zrak}}}{V_{\text{riža+zrak}}} = ?$$

$$\rho = ?$$

$$\begin{aligned} V_{\text{riža}} &= V_{\text{v+r}} - V_{\text{voda}} \\ &= 65\ \text{cm}^3 - 25\ \text{cm}^3 = 40\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{zrak}} &= V_{\text{riža+zrak}} - V_{\text{riža}} \\ &= 45\ \text{cm}^3 - 40\ \text{cm}^3 = 5\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\frac{V_{\text{zrak}}}{V_{\text{riža+zrak}}} = \frac{5\ \text{cm}^3}{45\ \text{cm}^3} = 0.111 = 11.1\ \%$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{50\ \text{g}}{40\ \text{cm}^3} = 1.25\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1250\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Marin Lakoš (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 484. *Sara se spušta na rolama s kosine visoke 2 metra i dugačke 10 metara. Nema početnu brzinu i giba se samo zbog sile teže. Nakon kosine je ravni dio dugačak 7 metara i nakon njega druga kosina koja je dugačka 8 metara i visoka 1.5 metara. Sarina je masa 50 kilograma. Koliki je maksimalni iznos prosječne sile trenja da bi se Sara mogla popeti na vrh druge kosine?*

Rješenje.

$$l_1 = 10\ \text{m}$$

$$h_1 = 2\ \text{m}$$

$$l_2 = 7\ \text{m}$$

$$l_3 = 8\ \text{m}$$

$$h_1 = 1.5\ \text{m}$$

$$\underline{m = 50\ \text{kg}}$$

$$F_{tr} = ?$$

$$W = \Delta E_{gp} = mg\Delta h$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 0.5 \text{ m}$$

$$W = 50 \text{ kg} \cdot 10 \, \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0.5 \text{ m} = 250 \text{ J}$$

$$F_{tr} = \frac{W}{s}$$

$$s = l_1 + l_2 + l_3 = 25 \text{ m}$$

$$F_{tr} = \frac{250 \text{ J}}{25 \text{ m}} = 10 \text{ N}.$$

Vito Martinović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 485. *Luka želi pripremiti čaj za svoje prijatelje koji su se najavili da će ga posjetiti u 19 sati. Vani je hladno i on želi da čaj bude gotov kad stignu da se mogu odmah ugrijati. Njegova električna ploča ima snagu 2000 vata i korisnost joj je 80 posto. Čaj mora odstajati 15 minuta nakon što se prelije kipućom vodom. Luka kuha 2 litre čaja za koji uzima vodu temperature* $20\,^\circ C$. *U koliko sati mora uključiti ploču? Specifični toplinski kapacitet vode je* $4200 \ J/kgK$, *a gustoća vode je* $1000 \ kg/m^3$.

Rješenje.

$$t_{\text{dolaska}} = 19 \text{ h}$$

$$P = 2000 \text{ W}$$

$$\eta = 80 \ \% = 0.8$$

$$V = 2 \text{ L} = 2 \text{ dm}^3 = 0.002 \text{ m}^3$$

$$t_1 = 20\,^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 100\,^\circ\text{C}$$

$$t_{\text{stajanja}} = 15 \text{ min}$$

$$c = 4200 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\rho = 1000 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$t_{\text{uključivanja}} = ?$$

$$W_{\text{korisno}} = Q = cm\Delta t$$

$$m = \rho \cdot V = 1000 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.002 \text{ m}^3 = 2 \text{ kg}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 80\,^\circ\text{C} = 80 \text{ K}$$

$$W_{\text{korisno}} = 4200 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 80\kappa = 672\,000 \text{ J}$$

$$W_{\text{ukupno}} = \frac{W_{\text{korisno}}}{\mu} = \frac{672\,000 \text{ J}}{0.8} = 840\,000 \text{ J}$$

$$t = \frac{W_{\text{ukupno}}}{P} = \frac{840\,000 \text{ J}}{2000 \text{ W}} = 420 \text{ s} = 7 \text{ min}$$

$$t_{\text{uključivanja}} = t_{\text{dolaska}} - t - t_{\text{stajanja}} = 19 \text{ h} - 7 \text{ min} - 15 \text{ min} = 18 \text{ h } 38 \text{ min}.$$

Luka mora uključiti ploču u 18:38.

Luka Krašnjak (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1749. *Horizontalni domet kosog hica iznosi 1200 m, za neki kut izbačaja* α *i početnu brzinu* v_0. *Ako kut povećamo za* 5° *domet će se povećati za 180 m. Odredi* v_0 *i* α. *Otpor zraka zanemariti.*

Rješenje. Domet D kosog hica ovisi o kutu izbačaja i početnoj brzini kao

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Uvrštavanjem dometa za oba slučaja dobivamo

$$1200 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,$$

$$1380 = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha + 10^\circ).$$

Primijenimo adicijsku formulu na sinus u zadnjoj jednadžbi,

$$1380 = 1200 \cos 10^\circ + \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha \sin 10^\circ.$$

Izrazimo li $\sin 2\alpha$ iz prve i $\cos 2\alpha$ iz zadnje jednadžbe, dobit ćemo za njihov omjer

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1200 \sin 10^\circ}{1380 - 1200 \cos 10^\circ}.$$

Odatle je $\alpha = 23^\circ 12' 54''$, a uvrštavanje u prvi izraz daje $v_0 = 127.5 \text{ m/s}$.

Borna Gojšić (3),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

1750. *Satelit SOHO za promatranje Sunca nalazi se u Lagrangeovoj L1 točki, to jest uvijek je između Zemlje i Sunca s istim orbitalnim periodom oko Sunca kao i Zemlja. Kolika je njegova udaljenost od Zemlje ako je Sunce 333 000 puta masivnije od Zemlje, a Zemljinu putanju aproksimiramo kružnicom radijusa 149.6 milijuna km?*

Rješenje. Označimo s M_S masu Sunca, M_Z masu Zemlje, r radijus kruženja satelita oko Sunca, a s d konstantnu udaljenost satelita od Zemlje. Izraženo u milijunima kilometara, vrijedi

$$r + d = 149.6$$

Za satelit u L1 točki, centripetalna sila kruženja jednaka je razlici gravitacijskih sila Sunca i Zemlje:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2} - \frac{GM_Z}{d^2}.$$

Kutna brzina oko Sunca jednaka je za satelit i za Zemlju:

$$\omega^2 = \frac{GM_S}{r^3} - \frac{GM_Z}{d^2 r} = \frac{GM_S}{(r+d)^3}.$$

Ako zadnju jednadžbu podijelimo s GM_S, a masu Zemlje izrazimo preko mase Sunca, dobit ćemo

$$\frac{1}{(r+d)^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{(M_S/M_Z)d^2 r}.$$

Izrazimo li nepoznatu veličinu preko $x = d/r$ dobit ćemo

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - \frac{1}{333\,000x^2}.$$

Egzaktno rješavanje kubne jednadžbe je komplicirano, ali numeričkim uvrštavanjem malog x na desnu stranu, i računanjem lijeve dobit ćemo precizniji x, pa iteriranjem dolazimo do proizvoljno točnog rješenja

$$x = 0.01007029,$$

koje se može i provjeriti uvrštavanjem. Odatle imamo

$$d = 0.01007029r,$$

$$d + r = 149.6,$$

pa dobijemo

$$d = 1.4915 \text{ milijuna km},$$

što je blizu 1% radijusa Zemljine putanje.

Ur.

1751. *Na USB priključak na računalu (nominalnog napona 5 V) priključimo voltmetar, ampermetar i svjetleću diodu s prekidačem. Kad je dioda isključena, očitamo $U = 5.05$ V i $I = 0$ A. Kad diodu uključimo, očitamo $U = 4.93$ V i $I = 0.15$ A. Koliki je unutarnji otpor napajanja? Koliki bi bili struja i napon kad bi umjesto diode priključili otpornik od 10 Ω? Kolika je Jouleova snaga na otporniku?*

Rješenje. Unutarnji otpor napajanja određen je padom napona na voltmetru pri porastu struje:

$$R_u = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{5.05 - 4.93}{0.15} = 0.8\ \Omega.$$

Za otpornik $10\ \Omega$ imamo

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_u + R} = \frac{5.05}{10.8} = 0.4676\ \text{A},$$

$$U' = I'R = 4.676\ \text{V}.$$

Jouleova snaga je umnožak dobivene struje i napona,

$$P' = U'I' = 2.186\ \text{W}.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

1752. *Na homogenu kuglu koja rotira početnom kutnom brzinom 0.5 okretaja u sekundi djeluje jednoliki moment sile, tako da se nakon 6 punih okretaja kugla zaustavi. Odredi vrijeme svakog punog okretaja, u sekundama.*

Rješenje. Analogno izrazu za jednoliko usporeno gibanje po pravcu,

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

za jednoliko usporavanje rotacije vrijedi

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta_n,$$

gdje je ω_n kutna brzina nakon n okretaja, uz kut $\theta_n = 2\pi n$. S obzirom da kugla stane nakon 6 okretaja, uvrstimo $\omega_6 = 0$:

$$0 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta_6,$$

$$\alpha = \frac{-\omega_0^2}{12\pi} = -\frac{\pi}{24} = -0.131\ \text{rad/s}^2.$$

Za kutnu brzinu nakon n okretaja dobijemo:

$$\omega_1 = 2.86786\ \text{rad/s}^2,$$

$$\omega_2 = 2.565\ \text{rad/s}^2,$$

$$\omega_3 = 2.22144\ \text{rad/s}^2,$$

$$\omega_4 = 1.8138\ \text{rad/s}^2,$$

$$\omega_5 = 1.28255 \text{ rad/s}^2,$$

$$\omega_6 = 0 \text{ rad/s}^2.$$

Iz izraza za jednoliko usporavanje rotacije,

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \alpha t_n$$

dobivamo vremena okreta

$$t_n = \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\alpha}.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$t_1 = 2.091 \text{ s}, \qquad t_2 = 2.313 \text{ s},$$

$$t_3 = 2.625 \text{ s}, \qquad t_4 = 3.114 \text{ s},$$

$$t_5 = 4.058 \text{ s}, \qquad t_6 = 9.798 \text{ s}.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

1753. *Unutar kugle radijusa 6 cm nalazi se izvor topline. Odredi snagu tog izvora, ako se površina kugle ugrije do 50 °C u prostoriji temperature 22 °C. Pretpostavljamo da je kugla crno tijelo i da je dosegnuta ravnoteža temperature površine.*

Rješenje. Iz Stefanovog zakona zračenja crnog tijela, snaga zračenja neke površine proporcionalna je površini i četvrtoj potenciji apsolutne temperature,

$$P_1 = \sigma S T^4,$$

gdje je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-1}K^{-4} Stefanova konstanta. Međutim, tijelo u prostoriji prima toplinsku energiju od prostorije, kroz istu površinu, ali ovisno o temperaturi prostorije, pa je

$$P = \sigma S (T^4 - T_p^4).$$

Uvrstimo li oplošje kugle radijusa 6 cm i temperature $T = 323.15$ K i $T_p = 295.15$ K, dobit ćemo

$$P = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot 0.06^2 \cdot (323.15^4 - 295.15^4) = 8.5 \text{ W}.$$

Marko Dodig (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1754. *Starije osobe trebaju naočale za čitanje zbog gubitka akomodacije oka na blizinu. Ako osoba vidi jasno tekst udaljen 30 cm od oka uz naočale jačine +2 dpt, do koje bi minimalne daljine ta osoba vidjela oštru sliku bez naočala?*

Rješenje. Za čitanje na udaljenosti d od zdravog oka, potrebna je akomodacija leće (ili naočale) jačine $J = 1/d$, gdje J izražavamo u dioptrijama, a d u metrima. Po uvjetima zadatka, ta je jačina

$$J = \frac{1}{0.3} = 3.333 \text{ dpt}.$$

Kako je dioptrija tankih leća u bliskom kontaktu aditivna veličina, kod naše osobe dio dioptrije koji otpada na akomodaciju oka dobijemo oduzimanjem doprinosa naočala:

$$\Delta J = J - J_n = 3.333 - 2 = 1.333 \text{ dpt}.$$

Odgovarajuća daljina oštre slike je

$$d' = \frac{1}{\Delta J} = \frac{1}{1.333} = 0.75 \text{ m} = 75 \text{ cm}.$$

Borna Cesarec (3),
Srednja škola Krapina, Krapina

1755. *Brzina valova na vodi v ovisi o valnoj duljini λ:*

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}},$$

uz $g = 9.81$ m/s^2, gustoću vode $\rho = 1000$ kg/m^3 i napetost površine $\gamma = 0.7$ N/m. Odredi brzinu valova valne duljine 1 cm. Kolika je valna duljina dugih valova iste brzine?

Rješenje. U izraz za brzinu uvrstimo valnu duljinu $\lambda = 0.01$ m. Dobivamo

$$v(0.01) = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 0.01}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot 0.7}{1000 \cdot 0.01}} = 0.6748 \text{ m}.$$

Valnu duljinu dugih valova iste brzine dobit ćemo tako da izjednačimo brzine (i kvadriramo):

$$v^2(\lambda) = v^2(\lambda') = \frac{g\lambda'}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda'}.$$

Množenjem s λ' dobivamo kvadratnu jednadžbu,

$$\frac{g}{2\pi}\lambda'^2 - v^2\lambda' + \frac{2\pi\gamma}{\rho} = 0.$$

Od dva rješenja, jedno je zadanih 0.01 m, a drugo iznosi

$$\lambda' = 0.2817 \text{ m} = 28.17 \text{ cm}.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac