10. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2021.

Ove godine su učenice srednjih škola u Hrvatskoj po drugi puta sudjelovale na Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke. Na temelju rezultata Državnog natjecanja iz matematike održanog na daljinu 26. listopada 2020., Povjerenstvo Hrvatskog matematičkog društva za međunarodna matematička natjecanja odredilo je da se na *2. Hrvatsku matematičku olimpijadu za djevojke (HMOD)* pozove njih 14. Natjecanje je održano 27. veljače 2021. na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetu u Zagrebu.

Najuspješnije učenice su bile:

Ema Borevković, XV. gimnazija, Zagreb

Stella Čolo, Gimnazija Franje Petrića, Zadar

Leonarda Pribanić, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Lara Semeš, XV. gimnazija, Zagreb

i one su predstavljale Republiku Hrvatsku na 10. Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke (EGMO). Samo natjecanje je organizirala Gruzija, a zbog epidemiološke situacije COVID-19 održavalo se online 11. i 12. travnja 2021.

Na ovoj Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke sudjelovalo je ukupno 213 djevojaka iz 55 država, od čega u službenoj konkurenciji njih 144 iz 37 država. Od naših djevojaka na ovom natjecanju, *Ema Borevković* je osvojila srebrnu, a *Stella Čolo* brončanu medalju. Pregled svih rezultata može se vidjeti na adresi:

`https://www.egmo.org/registration/2021/person?@template=scoreboard`

S učenicama su, osim njihovih mentora u školi, u okviru službenih priprema, radili Nikola Adžaga, Matija Bašić, Josip Pupić, Vedran Stipetić i Azra Tafro.

Matija Bašić

Zadatci

Prvi dan, nedjelja, 11. travnja 2021.

Zadatak 1. Broj 2021 je *fantastičan*. Za bilo koji prirodan broj m, ako je bilo koji element skupa $\{m, 2m+1, 3m\}$ fantastičan, onda su svi elementi fantastični. Slijedi li iz toga da je broj 2021^{2021} fantastičan?

Zadatak 2. Odredi sve funkcije $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ takve da jednakost

$$f(xf(x)+y)=f(x)+x^2$$

vrijedi za sve racionalne brojeve x i y.

Ovdje $\mathbb{Q}$ označava skup svih racionalnih brojeva.

Zadatak 3. Neka je ABC trokut s tupim kutom u vrhu A. Neka su E i F sjecišta vanjske simetrale kuta u vrhu A s visinama trokuta ABC iz vrhova B i C redom. Neka su M i N redom točke na dužinama $\overline{EC}$ i $\overline{FB}$ takve da je $\sphericalangle EMA=\sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle ANF=\sphericalangle ABC$. Dokaži da točke E, F, N i M leže na istoj kružnici.

Drugi dan, ponedjeljak, 12. travnja 2021.

Zadatak 4. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I i neka je D bilo koja točka na stranici $\overline{BC}$. Neka pravac kroz D okomit na BI siječe pravac CI u točki E. Neka pravac kroz D okomit na CI siječe pravac BI u točki F. Dokaži da točka osnosimetrična točki A u odnosu na pravac EF leži na pravcu BC.

Zadatak 5. U ravnini je posebna točka O koju zovemo ishodište. Neka je P skup od 2021 točke u toj ravnini sa svojstvom da

(i) nikoje tri točke iz P ne leže na istom pravcu i

(ii) nikoje dvije točke iz P ne leže na pravcu koji prolazi kroz ishodište.

Trokut s vrhovima iz P je *debeo* ako je O u unutrašnjosti trokuta. Odredi najveći mogući broj debelih trokuta.

Zadatak 6. Postoji li nenegativan cijeli broj a za koji jednadžba

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ima više od milijun različitih rješenja (m, n) gdje su m i n prirodni brojevi?

Izraz $\lfloor x \rfloor$ *označava cjelobrojni do (najveće cijelo) realnog broja* x. *Dakle,* $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22 / 7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ *i* $\lfloor 0 \rfloor = 0$.