

Dokaz Pitagorinog poučka pomoću derivacije

Petar Svirčević¹

Pitagorin poučak je vjerojatno jedan od najpoznatijih poučaka, kojeg su poznavali i stari Sumerani. Nije on samo tako davno iskazan, već je i dokazan. Opće je poznato, da je *Euklid* taj poučak s dokazom naveo u svojim *Elementima*. O poučku je napisana nebrojena literatura, pa se time ovdje nećemo baviti, ali ćemo navesti kratke napomene, koje su vezane za ovaj prilog.

Početkom prošlog stoljeća, matematičar *E. S. Loomis* je izdao djelo *The Pythagorean Proposition* u kojem je naveo 367 dokaza *Pitagorinog poučka*. Slike su u toj knjizi dosta grube, iako su dokazi korektni. Recimo i to, da je NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) 1968. g. objavio to djelo u dotjeranoj verziji. Nadalje, *W. Dunham* objavljuje 1978. g. djelo *Mathematical Universe* i u predgovoru tvrdi, da je broj algebarskih dokaza tog poučka vrlo velik, isto kao i broj geometrijskih dokaza, ali da ne postoji trigonometrijski dokaz. No, *Nuno Luzia* daje dva trigonometrijska dokaza ovog poučka, koji su navedeni u [2]. Svakako, to ne znači da ne postoji još dokaza te vrste, pa je time negirana heuristička tvrdnja, koju je iskazao *W. Dunham*.

Nakon ovih kratkih povijesnih napomena o *Pitagorinom poučku*, izvest ćemo sada njegov dokaz koristeći derivaciju.

¹ Autor je profesor u mirovini na Tehničkoj školi Zagreb; e-pošta: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Neka je dana funkcija

$$f : \mathbb{R} \rightarrow K \subseteq \mathbb{R} \quad (1)$$

gdje je

$$f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Ako (2) deriviramo, dobivamo $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha \equiv 0$, a odatle slijedi $f(\alpha) = C$ (konstanta) za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, ako je $\alpha = 0$, $C = 1$, pa je

$$f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \equiv 1 \quad (3)$$

Dakle kodomena definirane funkcije je $K \equiv \{1\}$.

Dobro znamo, kako smo definirali trigonometrijske funkcije za bilo koji realni broj. Međutim, za naš slučaj je dovoljno znati definiciju sinusa i kosinusa mjere šiljastog kuta u pravokutnom trokutu. Naime, sinus mjere šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je omjeru duljina kutu nasuprotne katete i hipotenuze, a kosinus tog kuta je omjer duljina tome kutu priležeće katete i hipotenuze. Ako uvažimo standardnu oznaku za navedene veličine trokuta, imamo $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Ako te vrijednosti uvrstimo

u (3), dobijemo $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$, a odatle i *Pitagorin poučak* $a^2 + b^2 = c^2$.

Literatura

- [1] E. S. LOOMIS, *The Pythagorean Proposition*, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 1968.
- [2] NUNO LUZIA, *Pythagoren Theorem via Half-Angle Formulas*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro 21 941-909, Brasil.
- [3] <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>