

Sudoku – napredne metode rješavanja (12)

Žarko Čulić¹

U prethodna 25 nastavka nastojao sam na što razumljiviji način prezentirati igru sudoku i obraditi sve najvažnije metode rješavanja. U ovom zadnjem nastavku sumirat ćemo sve do sada napisano i dati opće smjernice za rješavanje sudokua.

Sudoku je jednostavna logička razbibriga za sve generacije koju možete rješavati u svako vrijeme i na svakom mjestu, a treba vam samo nešto za pisanje ili neki elektronički uređaj poput mobitela, tableta ili računala. Globalnu rasprostranjenost i popularnost zahvaljuje činjenici da se pojavljuje u gotovo svim dnevnim tiskovinama i brojnim specijalnim izdanjima te velikom broju besplatno dostupnih aplikacija za razne operativne sustave kao i brojnim lako dostupnim web stranicama.

Dao sam smjernice za rješavanje sudokua različitih težina i obradili smo sve najvažnije i najznačajnije metode. Igra ima jedno jedino pravilo pri čemu broj zadanih brojeva nije jednoznačni pokazatelj težine sudokua već stupanj težine ovisi ne samo o broju početno zadanih brojeva već i o njihovom rasporedu. U nastavku ćemo još jednom sumarno predložiti način rješavanja kako za početnike, tako i za one iskusne rješavače.

Kad odlučite početi s rješavanjem nekog sudokua, uvijek je dobro na početku pogledati dvije stvari: a) ako je sudoku u nekoj dnevnoj tiskovini koja je navedena težina (lagano/ srednje/ teško) i b) ima li dovoljno prostora za upisivanje kandidata u slučaju da se radi o teškoj mreži. Kod laganih je dovoljno koristiti samo osnovne metode (*eliminacija u redcima i stupcima, pretraživanje redaka, stupaca i kvadrata, pozicioniranje, jednoznačno određivanje broja u praznom polju*) i zapravo se odmah upisuju točni brojevi u prazna polja. Kod srednje teških sudokua u tiskovinama osim osnovnih metoda trebat će možda i upis kandidata u nekom dijelu te korištenje metode *zaključanih setova* (parova, trojki i četvorki) te *eliminacije na temelju položaja nekog kandidata u kvadratu* te *eliminacije kandidata na temelju položaja u retku ili stupcu*. Za rješavanje teških sudokua u tiskovinama trebat će upisati kandidate i koristiti sve standardne metode.

Također je poželjno prije početka rješavanja pogledati koliko ima početno zadanih brojeva i postoji li simetrija. Rekli smo da broj početnih brojeva varira od minimalnih 17 do maksimalno 32, iako se nerijetko nađu mreže i s 38 zadanih brojeva, što automatski asocira na lakši zadatak. Ako postoji simetrija polja s početno zadanim brojevima u odnosu na njihovu rotaciju od 180 stupnjeva, tada to dodatno ukazuje da se radi o profesionalno izrađenoj mreži u kojoj gotovo sigurno nema višestrukih rješenja i koja se može riješiti isključivo primjenom logike, dakle bez potrebe pogađanja. U loše izrađenim mrežama kakvih ima u svakodnevnim novinama i na internetu, možemo naići na dvostruka rješenja i za takve mreže kažemo da nisu ispravno zadane. Također, mogu se pojaviti i mreže u kojima nam ne pomaže niti jedna od obrađenih 70-tak metoda i jedino pogađanjem možemo doći do rješenja, a za takve smo također rekli da nisu dobro napisane.

Ovdje nećemo dodatno pojašnjavati navedene osnovne i standardne metode jer se očekuje da ste ih već usvojili čitajući nastavke ovog serijala. Treba još jednom napomenuti da pri rješavanju nema potrebe za žurbom i jedino je bitno da se dobro zabavimo i da po mogućnosti točno riješimo sudoku dokazujući sebi da znademo i

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

umijemo logički promišljati. Još jednom valja ponoviti da početnici trebaju biti strpljivi i pažljivi te ići određenim redom po vlastitom nahođenju: npr. prvo analiza po kvadratima, redcima pa stupcima ili obratno. Moj je prijedlog da umjesto navedenih osnovnih metoda, koristite metodu *skeniranja* po blokovima i započnete od prvog (gornjeg) horizontalnog bloka i prođete redom sve horizontalne blokove. Pri skeniranju koristite jednostavno *pozicioniranje* koristeći pogodnost ako je u nekom kvadratu u tom bloku cijeli redak (sva tri polja kvadrata) već ispunjen/ riješen. Potom krenite sa skeniranjem vertikalnih blokova od prvog lijevog i čim upišete neki broj, odmah se prebacite na horizontalni blok i provjerite što se s upisom u vertikalni blok promijenilo u prethodno obrađenom dotičnom horizontalnom bloku. Na taj način ćete vrlo brzo proći cijelu mrežu i riješiti gotovo sva elementarna rješenja. Moguće je da će nam neko polje ostati neriješeno, a riješili bi ga da smo išli polako s pretraživanjem koristeći sve četiri navedene osnovne metode. No to bi nam oduzelo puno više vremena i pozornosti, a ono što nam je promaklo ionako će se vrlo brzo vidjeti nakon upisa kandidata i primjene standardnih metoda. Početnicima i svima koji puno griješe (obično nakon sat ili dva rješavanja dođu do kontradikcije: najčešće je to polje bez kandidata ili više istih znamenaka u povezanom području) najbolje je da pri upisu kandidata krenu od gornjeg retka i prvo s lijeve strane ispišu sve preostale kandidate u tom retku, a potom ih redom upisuju pri vrhu svakog polja s tim da maknu povezane kandidate u kvadratu i stupcu. Na taj način će biti najmanje pogrešaka. Ako se koji kandidat i ostavi viška to će se brzo otkriti i eliminirati, ali ako se koji izostavi, vrlo je velika vjerojatnost da se neće točno riješiti sudoku. Zato treba biti pažljiv i smireno redom upisivati kandidate.

Iskusni rješavači će najvjerojatnije krenuti od područja gdje nedostaje najmanje brojeva. I potom će koristiti sve logičke zaključke da pojedine brojeve odmah eliminiraju pri upisu kandidata (npr. ako postoje zaključani setovi, tj. ako n istih brojeva mogu ići u samo n polja u povezanom području, tada ih neće upisivati u ostala polja u povezanom području). Također oni će više obraćati pozornost na pozicioniranje (npr. ako u kvadratu postoje 4 popunjena polja manjeg kvadrata, tada nedostajući broj u retku (stupcu) izvan tog manjeg kvadrata može ići samo u preostala dva polja stupca (retka) čime možemo eliminirati tog kandidata iz preostalog dijela stupca (retka) izvan tog kvadrata. Nadalje, pojedini predani rješavači će pri analizi mreže koristiti posebno upisivanje kandidata u tri reda u polju (tzv. *sysudoku box marking*) upisujući osim jednoznačno određenih znamenki i kandidate s jakom vezom u kvadratu, u retku i u stupcu te kandidate koji popunjavaju sva tri polja retka/ stupca u kvadratu u pojedinom bloku, te sve upise u mreži zapisujući u 2-D zapisu. Ili kao što neki rade, mogu upisivati kandidate redom u cijeli sudoku, prvo broj 1, pa broj 2 i tako sve do broja 9. Nikako ne savjetujem upis kandidata u tri nivoa u polju (kao što rade računala pri upisu kandidata) jer je tada to nepregledno i ne vidi se jasno rješenje polja, naročito ako imamo malu mrežu i ako se sve radi istom kemijskom olovkom.

Nakon upisa kandidata, moja je preporuka da se pretraži redom svaki kvadrat u prvom horizontalnom bloku i traže: a) *jednoznačni kandidati u polju*, b) *zaključani setovi (parovi, trojke, četvorke)* i c) *eliminacija na temelju položaja kandidata u kvadratu*. Potom se može napraviti isto to za sve retke u tom prvom bloku, s tim da se umjesto c) napravi metoda d) *eliminacija na temelju položaja kandidata u retku*. Potom valja isto to napraviti za drugi i treći horizontalni blok. Nakon toga treba isto napraviti i za sve vertikalne blokove s tim da sada metoda glasi d) *eliminacija na temelju položaja kandidata u stupcu*. Nakon svake eliminacije u horizontalnim i vertikalnim blokovima, valja odmah napraviti dodatnu provjeru koju je ta eliminacija prouzrokovala u povezanim kvadratima i vertikalnim/horizontalnim blokovima.

Nakon što smo prošli sve osnovne, a potom i standardne metode, okrećemo se naprednim. Tu vrijedi pravilo da počinjemo s lakšim metodama i završavamo s onim

težima. Prvo možemo pogledati krila: *XY-krilo* i *XYZ-krilo*. Nakon tih metoda, treba promotriti sudoku i pogledati ima li puno polja s parovima kandidata. Ako ima, tada predlažem da se primijeni grupa metoda *jednoznačnost: jednoznačni pravokutnici (tip 1 do tip 6) i skriveni pravokutnici*. Ako su u gotovo svim poljima po dva kandidata tada treba provjeriti *BUG* metodu. Ako imamo više polja s istim parom kandidata, tada treba potražiti *W-krilo* i *lanac parova*. Nakon metode krila često je uspješna metoda *šablona s jednom znamenkom: neboder, dvostrani zmaj i prividni pravokutnik*. Dosta jednostavna i učinkovita je i metoda *XY-lanca* gdje tražimo povezani lanac od barem 3 polja sa samo dva kandidata koji su međusobno povezani. Ostala nam je još jedna jednostavnija napredna metoda a to su najjednostavnije *mrežne* metode: prvenstveno *X-krilo*, a potom i *sabljarka*. Najjednostavniji način za analizu jednostavnih lanaca i mreža je prepisivanje određenog kandidata u prazan obrazac i traženje odgovarajućeg uzorka. Ako s ovim metodama nismo uspjeli riješiti sudoku tada valja redom provjeriti sljedeće: a) *mrežne metode meduza i jegulja*, b) *mreže s repom* i c) *sashimi mreže s repom*, a zatim *jednostavne X-lance* u koje spada i *Turbot Fish* u četiri polja. Ako i to nije dovoljno treba razmotriti: a) *uzorke jednoznačnosti* u 6 polja (*Gordonove poligone* i *proširene pravokutnike*), b) *izbjegnute pravokutnike (tip 1 i tip 2)* te c) *jednoznačne pravokutnike s nepotpunim kandidatima* u svih 6 tipova. U slučaju da ništa od gore navedenog ne rješava sudoku u potpunosti, očito da se radi o teškoj mreži. Trebalo bi prvo probati metodu *bojanja*, no za to nam treba par različitih boja za jednostavno bojanje i dva para različitih boja za višestruko bojanje. Tome se da doskočiti na način da vam podcrtana jedna linija predstavlja jednu boju, a podcrtane dvije linije predstavljaju komplementarnu boju za konjugirani par (mogu se koristiti i različiti grafički simboli: kružnice, kvadrati, rombovi i sl., iako osobno smatram da su podcrtane linije najjednostavnije). Još nam je lakše ako izdvojimo pojedinog kandidata u posebnu mrežu i samo za njega napravimo analizu. Postoji jedna relativno jednostavna metoda koja ima više varijacija, a može pomoći pri rješavanju teških sudokua: *Sue de Coq* metoda. Potom postoji nekoliko metoda koje su možda nepravedno zapostavljene, ali iz iskustva znam da se vrlo rijetko koriste: a) *APE tip 1 i tip 2*, b) *ALS-XZ* i *ALS-XY-krilo* te c) *petlje konjugiranih parova* (sa i bez ponavljanja) i *petlje parova*. Ako nam ni sve navedeno ne pomaže, očito da se radi o vrlo teškoj mreži (unfair, extreme, nightmare). Tada nam preostaju samo kompleksni lanci: a) *naizmjenično povezani lanci*, b) *petlje* i c) *forsirani lanci*. Prije njih bi ipak probao i one četiri dodatne metode koje smo zadnje obradili: a) *WXYZ-krilo*, b) *neppravilno XYZ-krilo*, c) *3D meduzu* i na kraju d) *Ekocet*, a moguće da nam može pomoći i *Tulejin teorem*, iako s njim treba biti dosta oprezan jer se lako napravi previd neke od mogućih kombinacija. Ako i nakon navedenih metoda te složenih lanaca ne dođemo do rješenja, preostaje nam jedino *Nishio metoda* pogađanja (ili za one ambicioznije *Nishio forsirani lanci* koji ne spadaju u pogađanje već u *forsirane lance*). I to je to. Još jednom napominjem, da nakon svake eliminacije bilo kojeg kandidata, treba ponoviti provjere u povezanim područjima, ako treba i ponoviti pretrage metoda koje smo već obavili.

Pogledajmo kako bi tekao način rješavanja sudokua:

I. osnovne metode:

1. *skeniranje* po blokovima
2. jednostavno *pozicioniranje* u sklopu skeniranja

II. standardne metode:

1. upis kandidata
2. *jednoznačni kandidati*

3. *zaključani setovi*
4. *eliminacija na temelju položaja kandidata u kvadratu*
5. *eliminacija na temelju položaja kandidata u retku ili stupcu*

III. napredne metode:

1. *XY-krilo*
2. *XYZ-krilo*
3. *neboder*
4. *zmaj*
5. *prividni pravokutnik*
6. *lanac parova*
7. *W-krilo*
8. *XY-lanac*
9. *X-lanac (Turbot Fish)*
10. *jednoznačni pravokutnici: tip 1 do tip 6*
11. *skriveni pravokutnici*
12. *BUG metoda*
13. *X-krilo*
14. *X-krilo s repom*
15. *Sashimi X-krilo*
16. *sabljarka*
17. *meduza*
18. *sabljarka s repom*
19. *meduza s repom*
20. *Sashimi sabljarka*
21. *Sashimi meduza*
22. *Gordonovi poligoni i prošireni pravokutnici*
23. *izbjegnuti pravokutnici tip 1 i tip 2*
24. *jednoznačni pravokutnici s nepotpunim kandidatima tip 1 do tip 6*
25. *Sue de Coq*
26. *jednostavno bojanje*
27. *WXYZ-krilo*
28. *nepravilno XYZ-krilo*
29. *3D-meduza*
30. *AIC tip 1 i tip 2*
31. *Exocet*
32. *petlje s diskontinuitetom*
33. *neprekinute petlje*
34. *forsirani lanci jednog kandidata*
35. *Nishio forsirani lanci*
36. *forsirani lanac kandidata jednog polja*

37. *forsirani lanac povezane grupe polja*

38. *Nishio metoda pogadanja*

Ovdje je naveden općeniti i najčešći redosljed korištenih metoda pri rješavanju sudokua. Taj redosljed kod naprednih metoda uvelike ovisi o broju i rasporedu kandidata u neriješenim poljima i ovisno o tome neke metode treba primijeniti prije drugih (npr. nema smisla ispitivati BUG metodu ako imamo puno polja s više kandidata).

Neke metode poput sljedećih:

1. *višestruko bojanje*
2. *APE tip 1 i tip 2*
3. *ALS XZ*
4. *ALS-XY-krilo*
5. *petlja konjugiranih parova bez ponavljanja*
6. *petlja konjugiranih parova s ponavljanjem*
7. *petlja parova bez ponavljanja*
8. *Franken i Mutant mreže*
9. *Franken i Mutant mreže s repom*
10. *Franken i Mutant Sashimi mreže*

nismo ubacili u ovaj popis za rješavanje jer se: a) ili rijetko javljaju, b) ili ih se mukotrпно pronalazi, c) ili oboje, pa su preskočene, što ne znači da će ih ozbiljan i svestran rješavač ignorirati i potpuno (u svim slučajevima) izbjegavati.

Za pomoć pri rješavanju na webu Matematičkog odsjeka možete preuzeti i isprintati A4 obrazac s jednom velikom mrežom u koju možete upisati početno zadane brojeve te jednom manjom mrežom i devet malih mreža za analizu svakog zasebnog broja. Tih 9 malih mreža vam mogu uvelike pomoći pri sljedećim metodama:

1. *svim mrežnim metodama: X-krilo, sabljarka, meduza... + svim mrežama s repom i svim Sashimi mrežama, a po potrebi i Franken i Mutant mrežama*
2. *šablonama s jednom znamenkom: neboder, zmaj, prividni pravokutnik*
3. *jednostavnim X-lancima (uključujući Turbo Fishes)*
4. *jednostavnom i višestrukom bojanju*

Veća mreža je namijenjena za analizu svih polja s parovima kandidata (sa samo dva kandidata) i ona će vam olakšati traženje uvjeta i pronalazak sljedećih metoda:

1. *XY-krilo*
2. *W-krilo*
3. *lanac parova*
4. *XY-lanac*
5. *uvelike može pomoći pri pronalasku svih metoda jednoznačnosti: jednoznačnih pravokutnika tip 1 do tip 6, skrivenih pravokutnika, BUG metode, uzoraka jednoznačnosti, izbjegnutih pravokutnika i jednoznačnih pravokutnika s nepotpunim kandidatima*

Nakon što napravimo gore navedene provjere i eliminacije, u istu mrežu možemo dodati i kandidate s kojima čine konjugirane parove prepisujući kandidate tih polja i na taj način smo dobili tzv. *B/B prikaz (bilocation/bivalue plot)* koji vam izravno može pomoći kod:

1. 3D meduze
2. grafova povezanih polja
3. grafova parova
4. značajno olakšati traženje *petlji* (*Nice Loops*) oba tipa: s diskontinuitetom i neprekinutih te omogućiti njihov pronalazak

Ovdje smo obradili gotovo sve metode (nedostaju neke kompleksne poput *Death Blossom* koja je temeljena na *APE* metodi uz dodatak *ALS-a* za svakoga kandidata u razmatranom polju, te *Pattern Overlay* koja zapravo razmatra mogući razmještaj pojedinog kandidata u postojećoj mreži i temeljem toga radi eliminacije). Također nismo obradili metode *SK Loops*, odnosno *Domino Loops* koje se koriste kod najtežih mreža, tzv. *Monsters* mreža i najčešće djeluju u simbiozi s *Exocet* metodom koja zbog kompleksnosti također nije obrađena u svim mogućim oblicima.

Nismo spominjali neke zastarjele metode koje se danas više ne primjenjuju jer postoje nove i bolje (npr. *Y-Wing Chains* i *Multivalve X-Wing* možemo zamijeniti s *XY-Chains*). Također nismo posebno obradili *forsirane mreže* (*Forcing Net*) koje su identične *forsiranim lancima*, ali imaju kompleksnije grananje poput *mreže*, a ne jednostavno kao kod *lanaca* (u *lanacu* se svaka veza oslanja samo na korak (čvor) neposredno prije njega, a ako veza ovisi o povezanosti narednog dijela lanca (o ishodu narednog čvora/ narednih čvorova), tada *lanac* postaje *mreža*; isto vrijedi i ako se *lanac* grana u više veza koje se potom ponovno spajaju u *lanac*; pojednostavnjeno rečeno kod *lanca* prethodni čvor implicira stanje samo čvora iza, dok kod *mreže* prethodni čvor implicira stanje više od jednog sljedećeg čvora). Primijetit ćete da pojam “*mreže*” koristimo u četiri značenja: a) kada općenito govorimo o cijelom sudoku (eng. *grid*), b) kada govorimo o *mrežnim* metodama (eng. *fishes*), c) kada govorimo o *forsiranoj mreži* (eng. *forcing net*) i konačno d) kada govorimo o praznom obrascu za sudoku. Stoga budite svjesni na što se točno navedeni pojam odnosi u određenom kontekstu.

Kod strojnog rješavanja kao zadnja opcija koristi se “*brute force*” tehnika koja zapravo ne predstavlja pravu metodu, a gdje računala zahvaljujući svojoj velikoj brzini i snazi kreću od prvog neriješenog polja i stavljaju redom kandidate te provjeravaju cijelu mrežu. Kada nađu kontradikciju, vrate se korak nazad i ponove sa sljedećim brojem i tako sve dok ne nađu rješenje.

Što učiniti ako ste pri rješavanju prošli sve poznate metode, niste riješili sudoku i ne znate što dalje? Kompleksni *forsirani lanci* znaju biti toliko komplicirani i teško vidljivi, da često djeluju deprimirajuće i kontraproduktivno na način da rješavač izgubi volju za rješavanjem. I što sad. Ili odustati od sudokua, čime priznajete poraz i stradava vlastiti ego ili ipak probati neku metodu pogađanja. Obradili smo *Nishio metodu* pogađanja koja vam uvijek može pomoći i dovesti vas do rješenja. Poželjno je da nakon odabira jednog kandidata iz polja s parom kandidata nadalje koristite drugu boju i upisujete rješenja na dnu polja, kako bi se pri nailasku na kontradikciju mogli brzo vratiti na početak pogađanja i nakon odabira drugog kandidata uspješno riješiti sudoku. U slučaju da treba više pogađanja, najbolje je uzeti novi prazan obrazac jer će u protivnom lako doći do zbrke i nećete znati što ste učinili. Sve navedene metode smo upravo i obrađivali da ne bi morali pogađati brojeve kada naidete na naizgled nepremostivu prepreku u rješavanju (ili je možda bolje u tom slučaju odabrati drugi sudoku).

Ovdje ćemo stoga spomenuti još jednu praktičnu primjenu metode *forsiranog lanca* jednog kandidata i pogađanja za situacije kada ne znate “što činiti dalje”: izaberite kandidata kojeg ima puno u neriješenim poljima i počevši od jednog polja stavite jednu crticu iznad, koja označava da je taj kandidat ON (točan) i napravite tako analizu cijele mreže s tim da za OFF (netočno) stanje stavite u svim povezanim područjima i u poljima

s dva kandidata dvije crtice iznad povezanih polja. Nakon toga krenite od istog kandidata i istog početnog polja i napravite novu analizu cijele mreže stavljajući dvije crtice ispod kandidata za OFF (netočno) stanje i jednu crticu ispod kandidata ako je on u tom polju ON (točan). Na kraju ćete vidjeti da pojedini kandidat u nekim poljima ima jednu crticu ispod i jednu iznad i tada je on sigurno točno rješenje tog polja. Ako ima dvije crtice iznad i ispod, tada ga možemo slobodno eliminirati iz tog polja. Ako baš taj kandidat ne daje puno rješenja, odnosno eliminacija, izaberite drugog i ponovite postupak. Na ovaj jednostavni način možemo izaći iz nekih dubioznih situacija, eliminirati neke kandidate i nakon toga primjenom gore navedenih metoda uspješno riješiti gotovo svaki sudoku.

Koristeći naučeno riješite sljedeće teže zadatke.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4			8			7		6
B					3				8
C			1	5			3		
D						9		7	
E			4	7		5	9		
F		7		2					
G			2			6	4		
H	1				2				
I	6		3			4			9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	3	5	8	9	2	7	1	6
B	2	6	7	4	3	1	5	9	8
C	8	9	1	5	6	7	3	2	4
D	5	2	8	6	4	9	1	7	3
E	3	1	4	7	8	5	9	6	2
F	9	7	6	2	1	3	8	4	5
G	7	8	2	9	5	6	4	3	1
H	1	4	9	3	2	8	6	5	7
I	6	5	3	1	7	4	2	8	9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5			1		3		9	
B		8	1		9			3	
C									
D			3			2			5
E	4		9				8		7
F	8			5			9		
G									
H		9			3		6	5	
I		7		4		9			1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	4	6	1	2	3	7	9	8
B	2	8	1	7	9	5	4	3	6
C	9	3	7	6	4	8	5	1	2
D	7	6	3	9	8	2	1	4	5
E	4	5	9	3	1	6	8	2	7
F	8	1	2	5	7	4	9	6	3
G	6	2	4	8	5	1	3	7	9
H	1	9	8	2	3	7	6	5	4
I	3	7	5	4	6	9	2	8	1