

Stabilnost linearnih dinamičkih sustava

Bartol Borozan*, Zoran Tomljanović†

Sažetak

Pojam stabilnosti je jedan od važnijih pojmova primijenjene matematike, a koristi se u teoriji upravljanja gdje ima fundamentalnu ulogu. U ovome radu definiramo osnovne pojmove i navodimo rezultate vezane uz stabilnost linearnih dinamičkih sustava koji su opisani sa sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi. Preciznije, opisujemo stabilnost rješenja sustava u okolini točaka ravnoteže. Ovaj tip stabilnosti je poznat pod nazivom Ljapunovljeva stabilnost. Također definiramo i udaljenost do nestabilnog sustava i uvodimo algoritam koji računa njenu aproksimaciju. Osnovne pojmove i primjene algoritma smo testirali na nekoliko numeričkih primjera.

Ključne riječi: točka ravnoteže, stabilnost, svojstvene vrijednosti, linearni dinamički sustav

Stability of linear dynamical systems

Abstract

Stability is an important concept in applied mathematics which is used in control theory where it plays a fundamental role. In this paper we define basic concepts and show various results concerning stability of linear dynamical systems that are described by a system of ordinary differential equations. More precisely, we study the stability of solutions of differential equations around equilibrium points. This type of stability is also known as Lyapunov stability. Furthermore, we define the distance to an unstable system and describe an algorithm to calculate it approximately. Basic concepts and applications of the algorithm are illustrated on a several numerical examples.

Keywords: equilibrium point, stability, eigenvalues, linear dynamical system

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: bborozan@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ztomljan@mathos.hr

1 Uvod

Intuitivno, pojam stabilnosti vežemo uz nešto što je teško pomaknuti ili promijeniti. Sam pojam stabilnosti ima različite primjene u području matematike, a u ovom radu ćemo se fokusirati na pojam stabilnosti kod linearnih dinamičkih sustava. Od stabilnih sustava očekujemo da se kroz vrijeme umire, odnosno da manji pomaci od položaja ravnoteže rezultiraju rješanjem sustava koje će težiti ravnotežnom stanju sustava kada vrijeme teži u beskonačnost. Ovakav pojam stabilnosti je posebno važan u primijenjenoj matematici, kao i u fizici i inženjerstvu (vidjeti na primjer [4, 8, 6]) koji razne procese modeliraju dinamičkim sustavima. Naime, u modeliranju dinamičkih sustava vrlo je važno da se rješenje dobro ponaša u smislu stabilnosti, jer bi u suprotnom sustav bio podložan oštećivanju ili bi dugoročno rezultirao s raspadom sustava pa bi na taj način bio beskoristan.

U ovom ćemo radu proučavati tip stabilnosti vezan uz točke ravnoteže zvan Ljapunovljeva stabilnost. Naziv je dobio po ruskom matematičaru, fizičaru i inženjeru, Aleksandru Mihailoviču Ljapunovu (1857.–1918.) zbog njegovog doprinosa u proučavanju teorije stabilnosti.

2 Osnovne definicije

Za početak uvodimo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u ovome radu.

Definicija 1. *Vektorska norma $\|\cdot\|$ je preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ za koje vrijedi*

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$

Po uzoru na vektorske norme, također uvodimo i definiciju matrične norme.

Definicija 2. *Matrična norma $\|\cdot\|$ je preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$ za koje vrijedi*

1. $\|A\| = 0 \iff A = 0, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n},$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C}^{n \times n},$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n},$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}.$

Matrična norma se može uvesti i za matrice koje nisu kvadratne, ali tada se svojstvo 4. definira samo za matrice A i B koje su ulančane.

Definicija 3. *Neka je $\|\cdot\|_v$ vektorska norma. Pripadna inducirana norma definira se sa*

$$\|A\|_m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v,$$

za svaku matricu A .

Može se pokazati da je ovakva inducirana norma matrična norma. Dokaz ove tvrdnje, kao i više detalja o matričnim i vektorskim normama može se pronaći u [5, 10]. Također je bitno napomenuti da ćemo u ostatku rada, radi jednostavnosti, koristiti oznaku $\|\cdot\|$ za vektorske i pripadne inducirane matrične norme.

U analizi stabilnosti pojam svojstvene vrijednosti ima važnu ulogu, pa ovdje navodimo njezinu definiciju.

Definicija 4. *Kažemo da je skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ svojstvena vrijednost matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ako postoji vektor $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ takav da je $Av = \lambda v$. Takav se vektor v zove svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ .*

U ovom radu ćemo promatrati linearne dinamičke sustave koji se mogu opisati pomoću sustava običnih diferencijalnih jednadžbi prvog stupnja oblika

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

gdje je t vrijeme, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica sustava. U nastavku ćemo sustav (1) skraćeno zapisivati na sljedeći način,

$$\dot{x} = Ax.$$

Također, pretpostavljamo da sljedeći problem početne vrijednosti

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

ima jedinstveno rješenje za svaku vrijednost x_0 i početno vrijeme t_0 .

Napomena 1. *Definicija stabilnosti i analiza sustava se može direktno poopćiti na linearne vremenski invarijantne sustave. Naime, kod linearnih vremenski invarijantnih sustava matrice koje određuju ulaz i izlaz ne utječu direktno na stabilnost sustava pa je dovoljno analizirati sustav koji je opisan sa (1). Više detalja može se pronaći u [1, 4, 6].*

Budući da je matrica A konstantna, što znači da ne ovisi o vremenu t , sustav (1) je linearan i vremenski invarijantan. Više detalja o tom svojstvu sustava raspoloživo je u [6]. Zbog tog svojstva, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $t_0 = 0$. Rješenje sustava ćemo označavati sa $\phi(t, x_0)$, gdje je $x_0 = x(t_0)$.

Prilikom proučavanja stabilnosti sustava (1), posebnu ćemo pažnju posvetiti točkama ravnoteže koje su definirane na sljedeći način.

Definicija 5. *Točka $x_e \in \mathbb{R}^n$ je točka ravnoteže sustava (1) ako*

$$Ax_e = 0.$$

Primijetimo da je točka ravnoteže, x_e , ujedno i rješenje sustava (1), tj. $\phi(t, x_e) = x_e, \forall t \geq 0$. Kada bi točka ravnoteže x_e bila različita od nule, tada bi translacijom sustava za $-x_e$ dobili novi sustav čija se točka ravnoteže nalazi u nuli. Stoga ćemo u ostatku rada pretpostaviti da se promatrana točka ravnoteže nalazi u ishodištu.

3 Stabilnost točke ravnoteže

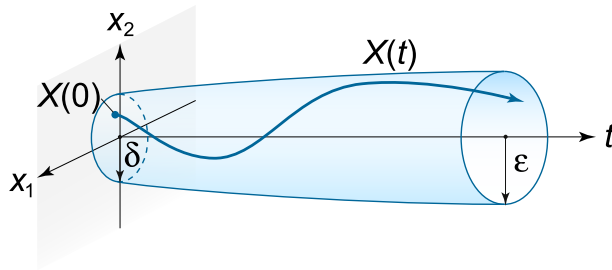
Do zaključaka o stabilnosti sustava (1) dolazimo promatrajući kako se ponaša rješenje sustava u okolini prethodno definirane točke ravnoteže. U literaturi, ovaj tip stabilnosti je poznat još i pod nazivom Ljapunovljeva stabilnost. Ona se definira na sljedeći način.

Definicija 6. *Točka ravnoteže $x = 0$ sustava (1) je stabilna ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da*

$$\|\phi(t, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

za $\|x_0\| < \delta$.

Drugim riječima, točka ravnoteže $x = 0$ je stabilna u Ljapunovljevom smislu ako svako rješenje koje počinje blizu točke ravnoteže ostane dovoljno blizu iste. Sljedeća slika ilustrira primjer stabilne točke ravnoteže.



Slika 1. Ljapunovljeva stabilnost (slika je preuzeta iz [12])

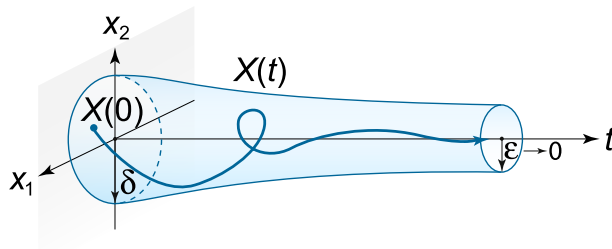
Primijetimo kako rješenje sustava (1) uvijek ostaje blizu točke ravnoteže $x = 0$.

Definicija 7. Točka ravnoteže $x = 0$ sustava (1) je *asimptotski stabilna* ako je stabilna i ako postoji $\delta > 0$ takav da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0$$

za $\|x_0\| < \delta$.

Odnosno, svako rješenje koje počinje dovoljno blizu točke ravnoteže $x = 0$ se s vremenom t sve više približava nuli, što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 2. Asimptotska stabilnost (slika je preuzeta iz [12])

Primijetimo kako se s vremenom t rješenje sustava s prethodne slike sve više približava nuli što upravo ilustrira asimptotsku stabilnost sustava.

Prethodne dvije definicije su se odnosile na lokalna svojstva točke ravnoteže te smo promatrali rješenja sustava koja započinju blizu točke ravnoteže. Na isti način možemo i definirati globalnu (asimptotsku i eksponencijalnu) stabilnost za bilo koji početni uvjet x_0 , tj. bez zahtjeva da rješenje

sustava počinje blizu točke ravnoteže. Više o globalnoj stabilnosti može se naći u [1].

4 Stabilnost linearnih sustava

U nastavku ćemo promatrati stabilnost linearnih sustava oblika,

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

pri čemu je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica koja ne ovisi o vremenu. Može se pokazati da je rješenje prethodno zadanog sustava dano s

$$\phi(t, x_0) = \psi(t)x_0 = e^{At}x_0.$$

Rješenje sustava (3) je opisano s matričnom eksponencijalnom funkcijom, $\psi(t) = e^{At}$. Više detalja o matričnoj eksponencijalnoj funkciji, kao i dokaz tvrdnje o rješenju sustava, može se pronaći u [1, 2, 6].

Radi jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je matrica A sustava (3) dijagonalizabilna tj. postoji regularna matrica P takva da je $P^{-1}AP = D$ dijagonalna matrica. Na primjer, ortogonalne i simetrične matrice su dijagonalizabilne. Više detalja o dijagonalizaciji matrica se nalazi u [5].

Teorijski, stabilnost možemo provjeriti direktno preko definicija zadanih u prethodnom poglavlju, ali to zahtijeva detaljnu analizu rješenja, što se numerički često ne može efikasno napraviti. Stoga ćemo u nastavku navesti nekoliko karakterizacija koji omogućuju efikasnu provjeru stabilnosti.

Za početak navodimo pomoćni rezultat koji daje jednu karakterizaciju stabilnosti točke ravnoteže.

Teorem 1. *Točka ravnoteže $x = 0$ sustava (3) je stabilna ako i samo ako vrijedi*

$$\sup_{t \geq t_0} \|\psi(t)\| = k < \infty,$$

za neku konstantu $k \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Vidi [1, str. 148]. □

Sada ćemo izložiti neke zaključke o stabilnosti sustava na temelju svojstava matrice sustava A . Konkretno, tražimo vezu između svojstvenih vrijednosti matrice A i stabilnosti.

Prisjetimo se rješenja sustava (3), $\phi(t, x_0) = e^{At}x_0$. Primijetimo da je riješenje određeno s matricnom eksponencijalnom funkcijom e^{At} . Budući da je matrica A prema pretpostavci dijagonalizabilna, tada postoji regularna matrica P takva da je

$$D = P^{-1}AP$$

dijagonalna matrica. Direktom provjerom dobije se da su na dijagonali matrice D upravo svojstvene vrijednosti matrice A . Vrijedi

$$A = PDP^{-1}.$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u $\dot{x} = Ax$ dobivamo

$$\dot{x} = PDP^{-1}x$$

to jest,

$$P^{-1}\dot{x} = DP^{-1}x.$$

Uvodeći novu oznaku $y = P^{-1}x$, dobivamo novi sustav diferencijalnih jednažbi

$$\dot{y} = Dy. \quad (4)$$

Primijetimo da je $y = 0$ točka ravnoteže gornjeg sustava. Iz svojstava matricne eksponencijalne funkcije također možemo zaključiti da je točka ravnoteže $x = 0$ sustava (3) stabilna ako i samo ako je $y = 0$ stabilna točka ravnoteže.

Sada možemo provjeriti stabilnost originalnog sustava (3) provjeravajući stabilnost sustava (4) koji je puno jednostavniji budući da je matrica D dijagonalna. Hoće li sustav (4) biti stabilan ovisi o njegovom rješenju,

$$\phi(t, y_0) = e^{Dt}y_0.$$

Budući da je D dijagonalna matrica oblika

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

gdje su $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ svojstvene vrijednosti matrice A , tada je

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Prisjetimo da je, u slučaju kompleksnih brojeva, $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$. Iz navedenog vidimo da će norma $\|\psi(t)\|$ biti ograničena odozgo ako i samo ako su realni dijelovi svih svojstvenih vrijednosti $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ manji ili jednaki nuli tj. prema teoremu 1, točka ravnoteže $y = 0$ sustava (4), pa i točka ravnoteže $x = 0$ sustava (3), je stabilna ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju nepozitivne realne dijelove.

U potpunosti analogno, možemo zaključiti da je sustav asimptotski stabilan ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativne realne dijelove jer točno tada će $\|\psi(t)\| \rightarrow 0$, kada $t \rightarrow \infty$.

Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 2. *Točka ravnoteže $x = 0$ sustava (3) je asimptotski stabilna ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativne realne dijelove.*

Dokaz. Vidi [1, str. 152]. □

Matrice čije sve svojstvene vrijednosti imaju negativne realne dijelove u literaturi se često nazivaju stabilnim matricama.

Napomena 2. *Na početku poglavlja smo se pretpostavkom o dijagonalizabilnosti matrice A ograničili na strukturirane sustave. Na sreću, na sličan način putem svojstvenih vrijednosti možemo odrediti stabilnost točke ravnoteže za bilo koju matricu A koristeći Jordanovu formu. Više detalja, kao i dokaz za općeniti slučaj, se nalazi u [6] i [1].*

Primjer 1. *Promotrimo sustav $\dot{x} = Ax$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & -6 \\ -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Direktnim množenjem može se provjeriti da je matrica sustava A dijagonalizabilna tj. vrijedi

$$A = P \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1},$$

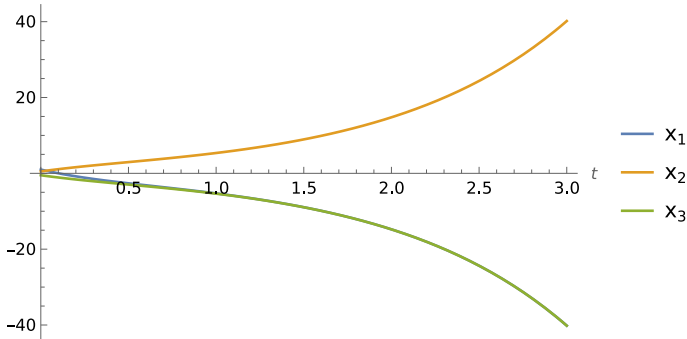
gdje je

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz dijagonalne forme matrice lagano vidimo da su njene svojstvene vrijednosti redom $-3, -2$ i 1 . Budući da je realni dio treće svojstvene vrijednosti veći od nula,

prema dokazu teorema 2, zaključujemo da sustav nije stabilan.

Sljedeća slika prikazuje rješenje sustava $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ uz početni uvjet $x_0 = (1, 0.5, -0.5)$.



Slika 3. Rješenje sustava $x(t)$

Slika 3 jasno ukazuje kako se rješenje sustava s vremenom t sve više udaljava od nule, što nam dodatno potvrđuje kako je isti nestabilan.

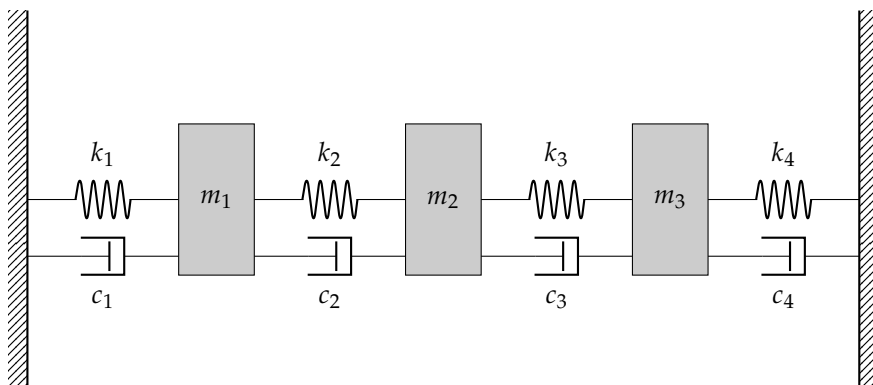
Primjer 2. Sustav oscilatora s n masa s prigušenjem je opisan sljedećom jednadžbom

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0, \quad (5)$$

gdje su $M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Fizikalna značenja ovih veličina su

M	masa
C	prigušenje
K	krutost
$x_i(t)$	pozicija i -tog oscilatora.

Specijalno, u ovom ćemo primjeru promatrati sustav u kojem su mase m_1, m_2, m_3 jednake 0.05 kg, krutosti opruga k_1, k_2, k_3, k_4 jednake 100 N/m, a koeficijenti prigušenja c_1, c_2, c_3, c_4 redom 0.2, 0.15, 0.1 i 0.15.

Slika 4. Sustav oscilatora s $n = 3$ masa i prigušenjem

Matrice sustava M , C i K su u tom slučaju sljedećeg oblika

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 & -0.15 & 0 \\ -0.15 & 0.25 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 & 0 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & -100 & 200 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je ovaj sustav zadan sustavom diferencijalnih jednadžbi drugog reda, dok svi prethodno navedeni rezultati vrijede samo za sustav jednadžbi prvoga reda. Zbog toga ćemo jednadžbu (5) svesti na jednadžbu prvoga reda postupkom koji se zove linearizacija. Više detalja o ovakvim sustavima i njihovoj linearizaciji se može pronaći u [2, 11].

Linearizaciju započinjemo uvođenjem supstitucije $x_1 = x$ te $x_2 = \dot{x}$. U tom slučaju, (5) možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

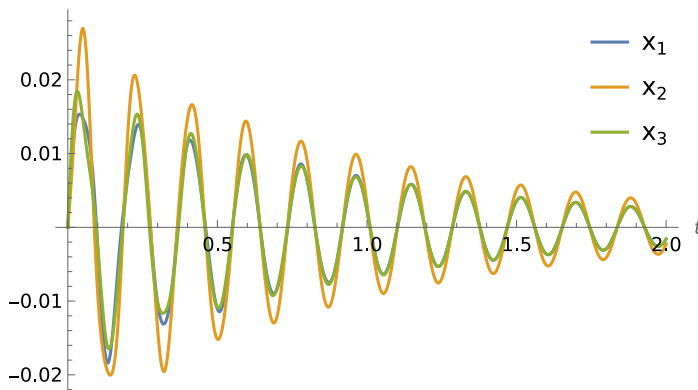
gdje je $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$.

Dobili smo sustav istog oblika kao i sustav (3). Može se pokazati da je matrica A također dijagonalizibilna, te da joj svojstvene vrijednosti iznose

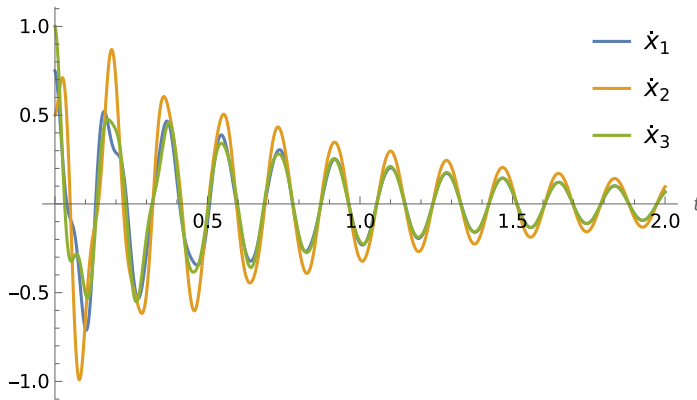
$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &\approx -4.52 \pm 82.49i, \\ \lambda_{3,4} &\approx -3.00 \pm 63.19i, \\ \lambda_{5,6} &\approx -0.98 \pm 34.22i. \end{aligned}$$

Kao što vidimo, realni dijelovi svih svojstvenih vrijednosti su manji od nule. Prema teoremu 2 zaključujemo da je i ovaj sustav asimptotski stabilan.

Sljedeći grafički prikazi ilustriraju rješenje sustava iz ovog primjera. Kao početnu vrijednost za pomak smo uzeli $x_0 = (0, 0, 0)$, a za brzinu $\dot{x}_0 = (0.75, 0.5, 1)$.



Slika 5. Pomak $x(t)$

Slika 6. Brzina $\dot{x}(t)$

Iz slika 5 i 6 vidimo da se s vremenom t sustav giba sve sporije te polako dolazi do stanja mirovanja.

5 Udaljenost do nestabilnog sustava

U praksi, tijekom proučavanja stabilnosti, važno je provjeriti koliko je sustav "blizu" nestabilnog sustava. Štoviše, udaljenost do nestabilnog sustava je često i bolja mjera od same stabilnosti. Naime, moguće je da je sustav stabilan ili asimptotski stabilan, ali da ga vrlo mala perturbacija može učiniti nestabilnim. To znači da se prilikom samog procesa modeliranja, koji uključuje različite pogreške, činjenica je li sustav stabilan može promijeniti zbog pogrešaka u mjerenju ili zapisu podataka. Stoga ćemo u sljedećoj definiciji uvesti udaljenost do nestabilnog sustava što uzima u obzir koliko velika perturbacija će narušiti stabilnost sustava. Na taj način dobit ćemo vrijednost koja će nam dati bolju informaciju vezanu za asimptotsku stabilnost.

Definicija 8. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrica čije svojstvene vrijednosti imaju nenul realne dijelove te neka je U skup matrica s kompleksnim elementima koje imaju barem jednu svojstvenu vrijednost čiji je realni dio nula. Udaljenost matrice A do skupa U definiramo pomoću

$$\beta(A) = \min\{\|E\| : A + E \in U\}.$$

Drugim riječima, za asimptotski stabilni sustav (3), $\beta(A)$ je norma najmanje perturbacije matrice A koja je potrebna da sustav postane asimptotski

nestabilan. Na taj način $\beta(A)$ mjeri udaljenost stabilne matrice A do skupa matrica koje nisu stabilne.

Do sada smo pojasnili da svojstvene vrijednosti daju karakterizaciju stabilnosti i asimptotske stabilnosti, ali svojstvene vrijednosti ne sadrže potpunu informaciju vezano za udaljenost $\beta(A)$. Naime, iz perturbacijske teorije, poznato je da ako je neka svojstvena vrijednost vrlo blizu imaginarnoj osi, onda će ju možda mala perturbacija pomaknuti na imaginarnu os. Međutim, ako svojstvena vrijednost nije blizu imaginarnoj osi, onda iz svojstvenih vrijednosti nije jasno možemo li ju pomaknuti na imaginarnu os s vrlo malom perturbacijom. Upravo tu činjenicu promatra sljedeći primjer.

Primjer 3. Promotrimo sljedeći primjer iz [9]

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Budući da je gornja matrica gornje trokutasta, odmah znamo da su sve njene svojstvene vrijednosti jednake -0.5 , što znači da je sustav asimptotski stabilan.

Promotrimo sada sljedeći sustav koji je nastao iz prethodnog sustava promjenom samo jednoga elementa,

$$\dot{x} = Bx, \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 1/320 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Može se pokazati da je i ovaj sustav dijagonalizabilan te da jedna od svojstvenih vrijednosti iznosi približno 0.00133 . Budući da matrica B ima svojstvenu vrijednost sa strogo pozitivnim realnim dijelom, prema teoremu 2 ovaj sustav nije stabilan. Ovime vidimo kako je originalni sustav jako blizu sustavu koji nije asimptotski stabilan, iako svojstvene vrijednosti uopće nisu blizu imaginarnoj osi.

U nastavku ćemo opisati iterativni algoritam baziran na metodi bisekcije koji će za dani sustav aproksimirati njegovu udaljenost do nestabilnog sustava. Metoda bisekcije je jednostavna metoda s kojom ćemo već nakon malog broja iteracija dobiti dobru aproksimaciju udaljenosti. Osnovna ideje

je da možemo efikasno ustanoviti nalazi li se tražena vrijednost lijevo ili desno od promatrane aproksimacije i prema tome se ažurira promatrani segment.

Definirajmo prvo tzv. Hamiltonovu matricu $H(\sigma)$ koja je za parametar $\sigma > 0$ dana izrazom

$$H(\sigma) = \begin{bmatrix} A & -\sigma I_n \\ \sigma I_n & -A^T \end{bmatrix}.$$

Iskažimo sada teorem na kojem se bazira algoritam bisekcije za računanje udaljenosti do nestabilnog sustava.

Teorem 3. $\beta(A) \leq \sigma$ ako i samo ako Hamiltonova matrica $H(\sigma)$ ima svojstvenu vrijednost čiji je realni dio jednak nula.

Dokaz. Vidi [4, str. 262]. □

Ovim teoremom možemo za proizvoljan broj σ reći je li taj broj veći ili manji od udaljenosti do nestabilnog sustava, $\beta(A)$. Koristeći ovaj teorem, navodimo algoritam koji će za zadanu matricu sustava A vratiti dva broja, m i M , koji omeđuju $\beta(A)$ tj. brojeve za koje vrijedi $m \leq \beta(A) \leq M$.

Algoritam 1

Ulaz: stabilna matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tolerancija $\tau > 0$

Izlaz: $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da $\frac{M}{10} \leq m \leq \beta(A) \leq M$ ili $0 = m \leq \beta(A) \leq M \leq 10\tau$

1. $m = 0, M = \frac{1}{2} \|A + A^T\|$
 2. **dok je** $M > 10 \max\{\tau, m\}$
 3. $\sigma = \sqrt{M \max\{\tau, m\}}$
 4. **ako** $H(\sigma)$ ima svojstvenu vrijednost s realnim dijelom nula **onda**
 5. $M = \sigma$
 6. **inače**
 7. $m = \sigma$
-

U gornjem algoritmu kao početnu vrijednost za M uzimamo gornju ogradu koja iznosi $\frac{1}{2} \|A + A^T\|$, a za m uzimamo nulu, što je očita donja ograda. Koristeći tvrdnju iz teorema 3, ažuriramo gornju ili donju ogradu. Ovaj se postupak ponavlja u svakoj iteraciji algoritma i time se ograde približavaju jedna drugoj dajući nam točniju aproksimaciju.

U četvrtom koraku, prilikom provjere realnog dijela svojstvenih vrijednosti,

moramo uzeti u obzir numeričke pogreške. U tu svrhu u algoritmu provjeravamo je li svojstvena vrijednost čisto imaginarna tako da provjerimo je li joj je realni dio dovoljno blizu nuli.

Ovom metodom udaljenost $\beta(A)$ možemo odrediti s proizvoljnom preciznošću odabirom dovoljno male tolerancije τ , ali zbog linearne brzine konvergencije precizno određivanje udaljenosti $\beta(A)$ može biti jako skupo. Ovo u praksi često nije problem jer je velika preciznost rijetko potrebna. Više detalja o algoritmu 1 raspoloživo je u [3, 4]. Štoviše, treba napomenuti da korištenje ovog algoritma zahtijeva računanje svih svojstvenih vrijednosti matrice koja ima dvostruko veću dimenziju i to više puta, stoga je jasno da će ovaj algoritam biti numerički zahtjevan za veće dimenzije. Tu činjenicu ćemo ilustrirati i u primjeru 4.

Primijenit ćemo prvo algoritam 1 na prethodna dva primjera u kojima je sustav stabilan. Želimo pokazati kolika je udaljenost sustava do nestabilnog sustava za primjere 2 i 3. Naime, uz toleranciju $\tau = 5 \times 10^{-6}$ primjenom algoritma 1 dobiju se sljedeće vrijednosti m i M za matrice iz prethodnih primjera:

- primjer 2: $m = 0.0457$, $M = 0.1681$;
- primjer 3: $m = 0.0007$, $M = 0.0039$.

Iako su matrice sustava iz oba primjera stabilne, vidimo da je u primjeru 3 sustav puno bliže nestabilnom u usporedbi s primjerom 2. Također, vidimo da se perturbacija koja učini matricu nestabilnom, a iznosi $1/320$ nalazi između donje i gornje međe, što je također očekivano.

Primjer 4. U nastavku ćemo promotriti rad algoritma na primjeru koji je sličan primjeru 2, ali ovaj puta generaliziranom na proizvoljan broj masa i opruga u sustavu. Također ćemo i mjeriti vrijeme potrebno za izvršavanje algoritma. Algoritam je implementiran u programskom jeziku Python koristeći programski paket NumPy na računalu s procesorom Intel i7-6950X@3.00 GHz i 64GB RAM-a. Više detalja o ovom primjeru može se pronaći u [4, 11].

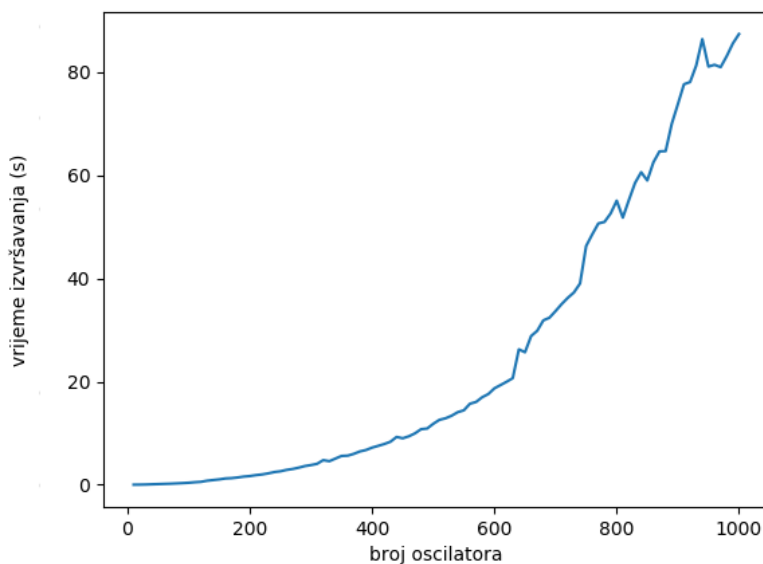
U ovom primjeru za masu svakog oscilatora uzimamo 0.1 kg, krutost opruga 2000 N/mm, a za prigušenje 0.75. U tom će slučaju matrice sustava, M , K i C , biti oblika

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & & & \\ & 0.1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -c_n \\ & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.75 & & \\ -0.75 & 1.5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -0.75 \\ & & -0.75 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_n \\ & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & & \\ -2 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2 \\ & & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

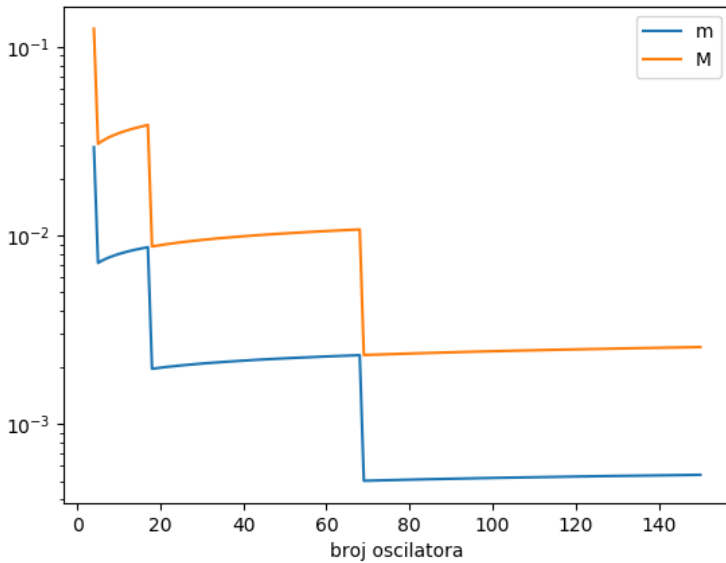
Na sljedećoj slici su prikazani rezultati testiranja algoritma u ovisnosti o dimenziji problema, uz toleranciju $\tau = 5 \times 10^{-6}$. Svakim korakom povećavamo dimenziju problema dodavanjem jednog dodatnog oscilatora u sustav.



Slika 7. Vrijeme izvršavanja (u sekundama) u ovisnosti o dimenziji problema

Uočimo da s povećanjem dimenzije problema, odnosno s povećavanjem broja oscilatora se vrijeme izvršavanja se znatno povećava.

Na sljedećoj su slici prikazane dobivene ograde, opet u ovisnosti o dimenziji sustava.



Slika 8. Udaljenost do nestabilnog sustava u ovisnosti o dimenziji problema

Iz slike vidimo da se s povećanjem broja oscilatora smanjuje udaljenost do nestabilnog sustava, ali za razliku od prethodnog primjera udaljenost je znatno veća od dane tolerancije τ .

Primjer 4 nam pokazuje da je vrijeme izvršavanja doista veliko za probleme većih dimenzija. Već je na primjeru dimenzije 2000×2000 vrijeme izvršavanja prešlo 80 sekundi, što nam ukazuje na složenost algoritma. Upravo iz tog razloga je efikasno računanje vrijednosti $\beta(A)$ još uvijek interesantan problem i još uvijek se aktivno proučava te se u tu svrhu može iskoristiti specifična struktura Hamiltonove matrice.

Zaključak

U ovom radu definirali smo osnovne pojmove vezane uz Ljapunovljevu stabilnost poput točke ravnoteže i njenu stabilnost. Stabilnost sustava je posebno važna u mnogim područjima znanosti i prakse, primjerice u fizici i teoriji upravljanja. Naime, fizičari proučavanjem stabilnosti mogu potvrditi valjanost matematičkih modela, dok je primjerice pri upravljanju mehaničkih dijelova njihova stabilnost iznimno važna.

Istaknuli smo kriterije pod kojima je linearan sustav stabilan i asimptotски stabilan. Također smo opisali metodu kojom možemo karakterizirati stabilnost sustava.

Osim pojma stabilnosti definirali smo i udaljenost do nestabilnog sustava, što je u praksi često i bolja mjera proučavanja stabilnosti. Predstavili smo algoritam koji za dani linearan sustav aproksimira njegovu udaljenost do nestabilnog sustava. Algoritam smo testirali na nekoliko primjera. Pokazalo se da već nakon malog broja koraka algoritam vrati zadovoljavajući rezultat, ali je vrijeme izvršavanja veliko za probleme većih dimenzija. Algoritam bi se mogao dodatno ubrzati implementacijom metode za rješavanje svojstvenog problema koja će iskorištavati strukturu Hamiltonovih matrica.

Literatura

- [1] P. J. Antsaklis, A. N. Michel, *A Linear Systems Primer*, Birkhäuser Basel, 2007.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 2000.
- [3] R. Byers, *A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., **9**(5) (1988), 875–881.
- [4] B. N. Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Academic Press, 2003.
- [5] G. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Univ Press, 1996.
- [6] J. P. Hespanha, *Linear Systems Theory*, Princeton University Press, 2009.
- [7] D. Hinrichsen, A. J. Pritchard, *Stability Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [8] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1993.
- [9] P. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov, *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall, London, 1991.
- [10] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2010.

- [11] K. Veselić, *Damped oscillations of linear systems - a mathematical introduction*, Springer, 2011.
- [12] <https://www.math24.net/stability-theory-basic-concepts>, pristup srpanj 2021.