Osječki matematički list 21 (2021), 115–121

Geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvaju mimosmjernih pravaca

Sonja Gorjanc*, Ema Jurkin†

Sažetak

U radu istražujemo geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvaju mimosmjernih pravaca te dokazujemo da je to ortogonalni hiperbolični paraboloid.

Ključne riječi: *geometrijsko mjesto točaka, mimosmjerni pravci, ortogonalni hiperbolični paraboloid*

The locus of points equidistant from two skew lines

Abstract

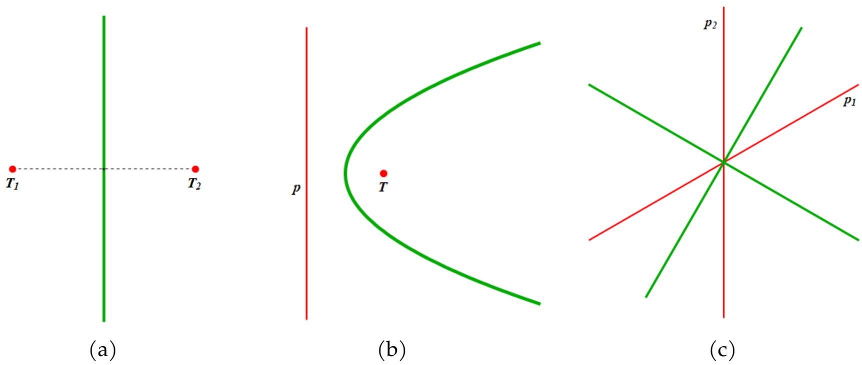
We study the locus of points equidistant from two skew lines and we prove that it is an orthogonal hyperbolic paraboloid.

Keywords: *locus of points, skew lines, orthogonal hyperbolic paraboloid*

*Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: sgorjanc@grad.hr
†Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: ema.jurkin@rgn.unizg.hr

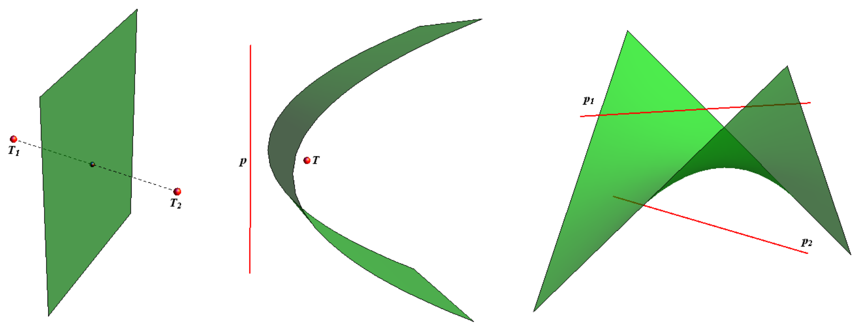
1 Uvod

Odrediti geometrijsko mjesto točaka u ravnini jednako udaljenih od dvaju objekata zadaća je koja se pojavljuje pri rješavanju brojnih geometrijskih problema. Poznato je da je geometrijsko mjesto točaka ravnine jednako udaljenih od dviju točaka simetrala dužine kojoj su te dvije točke krajnje točke (slika 1(a)), a da geometrijsko mjesto točaka ravnine jednako udaljenih od dvaju ukrštenih pravaca čine simetrale kutova koje zatvaraju ta dva pravca (slika 1(c)). Te su simetrale okomiti pravci. Ukoliko su dva dana pravca paralelna, geometrijsko mjesto točaka ravnine jednako udaljenih od njih je s njima paralelan pravac. Također se zna da sve točke ravnine jednako udaljene od jedne točke i jednog pravca leže na paraboli kojoj su zadana točka i pravac žarište, odnosno ravnalica (slika 1(b)).



Slika 1. Geometrijska mjesta točaka ravnine jednako udaljenih od:
(a) dviju točaka, (b) točke i pravca, (c) dvaju ukrštenih pravaca.

Razmislimo li o analognim skupovima točaka u prostoru, uočavamo da odgovor na pitanje o geometrijskom mjestu točaka u nekim slučajevima možemo dati odmah, a u nekim tek nakon kraćeg ili malo dužeg razmišljanja. Zna se da je geometrijsko mjesto točaka prostora jednako udaljenih od dviju točaka ravnina. Nazivamo ju simetralnom ravninom dužine kojoj su te točke krajnje, okomita je na njihovu spojnicu i prolazi polovištem dužine kojoj su te točke krajnje (slika 2(a)). Nije teško zaključiti niti da je geometrijsko mjesto točaka prostora jednako udaljenih od jedne točke i jednog pravca parabolični valjak dobiven translatornim gibanjem parabole sa slike 1(b) u smjeru okomitom na ravninu te parabole (slika 2(b)). Preostaje razmotriti pitanje geometrijskog mjesta točaka prostora jednako udaljenih od dvaju pravaca. Ukoliko se dva dana pravca sijeku, sve točke prostora jednako udaljene od njih leže u dvije međusobno okomite ravnine koje sadrže simetrale kutova tih pravaca i okomite su na ravninu koju ti pravci određuju. Ako su ta dva pravca paralelna, točke leže u jednoj ravnini. Ostaje pitanje što je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvaju mimosmjernih pravaca. Odgovor na to pitanje potražile smo u literaturi, a budući da smatramo da ono nije opće poznato, a moglo bi mnogima zainteresiranima za geometriju biti zanimljivo, u ovom radu donosimo tvrdnju i malo šire raspisujemo dokaz prema knjizi [3, str. 99].



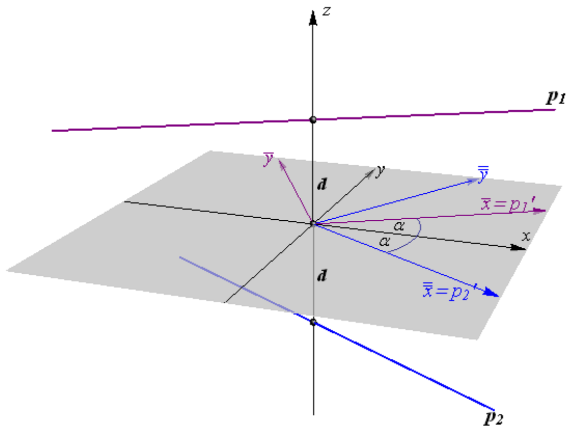
(a) (b) (c)

Slika 2. Geometrijska mjesta točaka prostora jednako udaljenih od: (a) dviju točaka, (b) točke i pravca, (c) dvaju mimosmjernih pravaca.

2 Geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od dvaju mimosmjernih pravaca

Neka su p_1 i p_2 dva mimosmjerna pravca na udaljenosti $2d$, a kut između njih neka je 2α, gdje je $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{4}]$. Tada koordinatni sustav možemo postaviti tako (vidi sliku 3) da ti pravci budu određeni sljedećim jednadžbama:

$$p_1 \equiv y = k \cdot x,\ z = d, \quad p_2 \equiv y = -k \cdot x,\ z = -d, \quad \text{gdje je } k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$



Slika 3. Os z podudara se sa zajedničkom normalom pravaca p_1 i p_2, a koordinatna ravnina xy paralelna je s njima i od svakog udaljena za d. Osi x i y su simetrale kuta između ortogonalnih projekcija pravaca p_1 i p_2 na xy ravninu.

Sve točke prostora koje su na udaljenosti r ($r \geq d$) od pravca p_1 (p_2) leže na plaštu rotacijskog valjka Φ_1 (Φ_2) kojemu je os p_1 (p_2), a polumjer osnovke jednak r. Stoga su sve točke presječne krivulje valjaka Φ_1 i Φ_2 jednako udaljene od pravaca p_1 i p_2 i ta udaljenost iznosi r (vidi sliku 4).

Jednadžbe valjaka Φ_1 i Φ_2 možemo pisati

$$\Phi_1 \equiv \overline{y}^2 + (z-d)^2 = r^2, \quad \Phi_2 \equiv \overline{\overline{y}}^2 + (z+d)^2 = r^2, \tag{2}$$

gdje su koordinatni sustavi $O(\overline{x}, \overline{y}, z)$ i $O(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}, z)$ dobiveni rotacijom sustava $O(x, y, z)$ oko osi z za kut α, odnosno $-\alpha$. Vidi sliku 3.
Prema formulama za rotaciju koordinatnog sustava vrijedi

$$\overline{y} = y\cos\alpha - x\sin\alpha, \quad \overline{\overline{y}} = y\cos\alpha + x\sin\alpha,$$

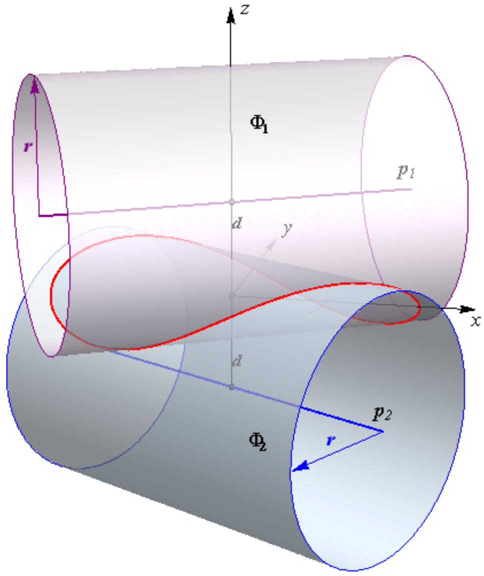
a prema osnovnim trigonometrijskim identitetima

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Stoga su valjci Φ_1 i Φ_2, u koordinatnom sustavu $O(x, y, z)$, dani jednadžbama

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{k\cdot x}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 + (z-d)^2 = r^2, \tag{3}$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{k \cdot x}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 + (z+d)^2 = r^2. \tag{4}$$



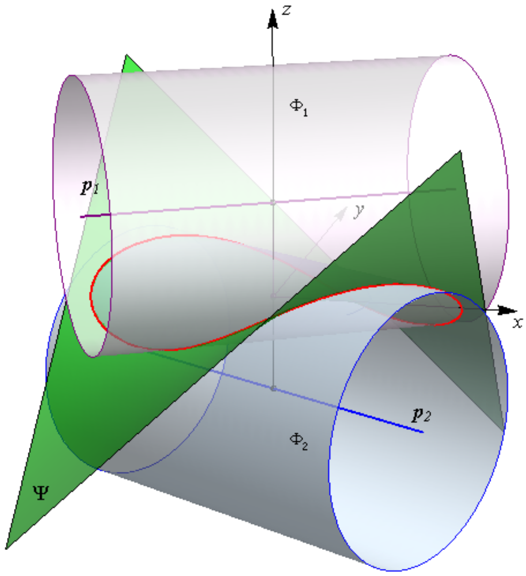
Slika 4. Točke presječne krivulje valjaka Φ_1 i Φ_2 jednako su udaljene od pravaca p_1 i p_2.

Eliminacijom parametra r, odnosno izjednačavanjem lijevih strana jednadžbi (3) i (4), dobivamo jednadžbu plohe Ψ koja je geometrijsko mjesto točaka prostora jednako udaljenih od pravaca p_1 i p_2:

$$\Psi \equiv z = -\frac{k}{d(1+k^2)} xy. \tag{5}$$

Zbog $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$, jednadžbu (5) možemo pisati u sljedećem obliku

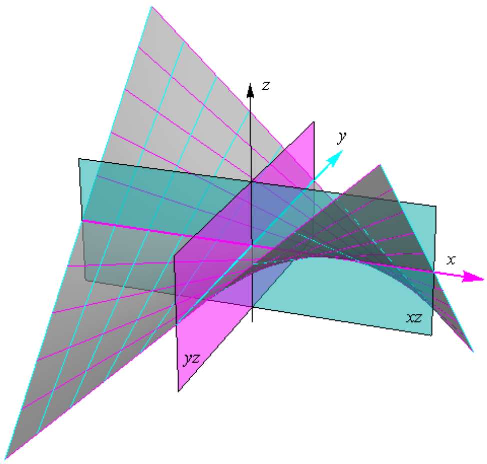
$$z = -\frac{\sin 2\alpha}{2d} xy. \tag{6}$$



Slika 5. Ploha Ψ je geometrijsko mjesto točaka prostora koje su jednako udaljene od pravaca p_1 i p_2.

Iz jednadžbi (5) i (6) je jasno da je Ψ algebarska ploha 2. stupnja (kvadrika) i to hiperbolični paraboloid (hipar), [4]. Vidi sliku 5. To je vitopera pravčasta ploha (ne može se razviti u ravninu) s dva sustava izvodnica, odnosno svakom njezinom točkom prolaze dvije izvodnice - po jedna iz svakog sustava. Sve izvodnice jednog sustava su mimosmjerne, a svaka od njih siječe sve izvodnice drugog sustava. Beskonačno daleka ravnina prostora siječe hipar po dvije beskonačno daleke izvodnice, a svaku ravninu koja prolazi nekom od njih nazivamo direkcijskom, [1]. Sve izvodnice jednog sustava paralelne su s istom direkcijskom ravninom. Iz jednadžbi (5) i (6) jasno je da su direkcijske ravnine hipara Ψ paralelne s koordinatnim ravninama xz i yz. Hipar čije su direkcijske ravnine okomite nazivamo ortogonalnim hiperboličnim paraboloidom. Vidi sliku 6.

U knjizi [2, str. 64] autori izvode taj dokaz koristeći vektorsku formu. Međutim, u toj je knjizi on samo mali dio znatno šireg teorema u kojem se dokazuje cijeli niz daljnjih zanimljivih svojstava promatranog skupa točaka. Primjerice, dokazuju da je dobiveni hipar anvelopa simetralnih ravnina dužina kojima su krajnje točke na temeljnim pravcima p_1 i p_2, kao i da za neki ortogonalni hipar svi parovi mimosmjernih pravaca od kojih su njegove točke jednako udaljene leže na jednom Plückerovom konoidu. Stoga, zainteresiranim čitateljima toplo preporučujemo knjigu [2].



Slika 6. Direkcijske ravnine hipara Ψ su koordinatne ravnine xz i yz.

Literatura

[1] S. Gorjanc, E. Jurkin, I. Kodrnja, H. Koncul, *Deskriptivna geometrija*, web udžbenik Sveučilišta u Zagrebu, `http://www.grad.hr/sgorjanc/udzbenik/3/3-4-3.html`, 2021.

[2] B. Odehnal, H. Stachel, G. Glaiser, *Quadrics in Euclidean 3-space*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2020.

[3] G. Salmon, *A Treatise of the Analytic Geometry of three Dimensions*, Vol. I Hodges, Figgis, & Co., Dublin, 1887.

[4] E. W. Weisstein, *Hyperbolic Paraboloid*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource, `mathworld.wolfram.com/HyperbolicParaboloid.html`, 2021.