2

Projekt[1]

Frege svoje djelo *Osnove aritmetike* počima raspravom o pitanju „Što je broj jedan". Kako i sam priznaje, većina će ljudi smatrati da se na to pitanje već adekvatno odgovorilo u matematičkim priručnicima. Ipak Frege tvrdi ne samo da su pojednostavljeni odgovori u elementarnim priručnicima neadekvatni, nego čak ni matematičari ne mogu dati zadovoljavajući odgovor. Štoviše, nastavlja Frege, ako ne možemo reći što je broj jedan, malo je nade da ćemo reći što je broj. Frege piše:

Ako pojam koji leži u osnovi neke velike znanosti zadaje teškoće, onda je ipak zacijelo neodgodiva zadaća da ga točnije istražimo i da te teškoće prevladamo. (*Osnove aritmetike*, str. II).

Ali koje su to teškoće koje zadaje pojam broja? Frege ne smatra da se teškoće za većinu od nas javljaju u svakidašnjoj primjeni aritmetike, niti smatra da teškoće priječe rad većini matematičara. Teškoće proizlaze iz našeg nerazumijevanja osnova cijele strukture aritmetike. Prema Fregeovu mišljenju, čak ni najveći matematičari to neshvaćaju. S takvim bismo uvidom mogli objasniti, uz druge stvari, i poseban status našeg znanja istina aritmetike.

Ali zašto smatrati da naše znanje aritmetike ima poseban status? Čini se kako je jedan od razloga postojanje razlike između dokaza potrebitih za zasnivanje istina aritmetike i dokaza potrebitih za zasnivanje većine drugih istina. Svakidašnje se znanje zasniva na promatranju; primjenom dokaza osjetila. Kako bih utvrdio je li mlijeko u frižideru, zavirit ću u frižider. Kako bih utvrdio je li mlijeko u frižideru prokislo, pomirisat ću ga. U tom se smislu svakidašnja spoznaja i spoznaja istina fizike čine sličnima. Međutim, mnogo je teže zasnovati znanstvene istine nego utvrditi je li mlijeko u frižideru – primjerice, ne možemo samo pogledati i shvatiti da određeni virus uzrokuje novootkrivenu bolest – ipak je potreban dokaz osjetila. Samo

1 Prijevod je preuzet iz drugog i trećeg poglavlja knjige Joan WEINER, *Frege Explained. From Arithmetic to Analytic Philosophy* (Chicago: Open Court, 2004.), 25-48. Prijevod je nastao nakon gorljivih rasprava, iz područja Filozofske epistemologije i Logike, vođenih sa studentima KBF-a u Sarajevu tijekom akademske 2011./2012. i 2012./2013. godine. Iskreno se nadam da će u cilju boljeg razumijevanja nove koncepcije logike Gottloba Fregea poslužiti i sljedećim generacijama studenata KBF-a u Sarajevu. Izraz „Begriffsschrift" („*Pojmopis*") naziv je za Fregeov logički simbolički jezik i naziv monografije u kojoj prikazuje svoj logički simbolički jezik. Izraz „Begriffsschrift" (bez kurziva) rabim za Fregeov logički simbolički jezik, dok „*Begriffsschrift*" (s kurzivom) rabim za Fregeovu monografiju tiskanu 1879. godine.

će se utvrđivanje nove bolesti utemeljiti na dokazu osjetila. Primjerice, AIDS je otkriven kao nova bolest jer su se 1981. godine u bolnice počeli javljati ljudi s neobičnim (i vidljivim) simptomima. Daljnje je istraživanje, koje je vodilo zaključku da određeni virus, HIV, uzrokuje AIDS, zahtijevalo daljnja promatranja. Nasuprot tomu, čini se da dokaz osjetila nije potreban kako bi se ustanovilo, primjerice, da ne postoji najveći prirodni broj. Dovoljno je iznijeti dokaz da postoji metoda koja nam, pod pretpostavkom bilo kojeg prirodnog broja, dopušta pokazati da veći prirodni broj postoji. Ovakva su razmišljanja uvjerila Fregea da je izvor naših spoznaja istina aritmetike drukčiji od izvora spoznaja svakidašnjih istina i istina fizike. Cilj je njegova projekta bio utvrditi izvor naše spoznaje aritmetike.

Problem empiričkog objašnjenja aritmetike

Ovaj projekt ne zahtijeva samo prihvaćanje matematike i načina na koji su njezine istine zasnovane nego također i opće viđenje o spoznaji i njezinim izvorima. Kad je Frege započeo sa svojim djelom, znao je za dva postojeća objašnjenja izvora znanja, ali je oba smatrao nezadovoljavajućim. Najjednostavnije objašnjenje, kojemu Frege nije bio sklon, bilo je empiričko objašnjenje. Prema empiričkom objašnjenju osjetilno je iskustvo izvor svega našeg znanja, uključujući i naše znanje istina aritmetike. U nekom se smislu takvo objašnjenje činilo ispravnim. Kada bismo istražili procese putem kojih smo prihvatili istine, vjerojatno bismo otkrili kako se dokaz osjetila uvijek primjenjuje u nekom trenutku. Najzad, čak će se i sofisticirani dokaz teorije brojeva pozivati na elementarne istine aritmetike – istine koje smo prvobitno naučili kao mala djeca. A te se istine obično uče s pomoću dokaza osjetila. Primjerice, malo dijete može naučiti da su 2+2 = 3+1 slaganjem i preslagivanjem četiri mala predmeta ili ga u učionici možemo poučiti kako to da zapamti. U oba se slučaja primjenjuje dokaz osjetila.

Ali istraživanje izvora spoznaje, prema Fregeovu shvaćanju, nema veze s tim kako zapravo prihvaćamo istine. Naši stvarni razlozi za prihvaćanje istina matematike ne moraju pružiti adekvatno opravdanje samih istina. Mnoga se uvjerenja, čak i istinita, temelje na praznovjerju, ali praznovjerje nije izvor spoznaje. Prema Fregeovu mišljenju izvor se naše spoznaje neke istine ne određuje načinom na koji smo prihvatili tu istinu, nego s tim što nam je potrebno kako bismo istinu zasnovali i opravdali. Iako Frege nije bio sklon empiričkom gledištu, vjerovao je kako je pozivanje na dokaz osjetila potrebno za zasnivanje istina fizike.

To znači, složio se s empiričkom klasifikacijom našega znanja istina fizike kao *a posteriori*. Ali nije se složio s empiričkim gledištem o tomu da je dokaz osjetila uvijek potreban za zasnivanje neke istine. Frege je vjerovao da se istine matematike mogu zasnovati i bez pozivanja na dokaz osjetila. Znači, vjerovao je da je znanje matematičkih istina *a priori*.

Fregeovo se uvjerenje o tomu da je naše znanje matematičkih istina *a priori* potkrepljuje upravo iznesenom razlikom između onoga što je potrebno za zasnivanje istina fizike i onoga što je potrebno za zasnivanje istina matematike. Pobliže razmotrimo razliku. Prvo, razmotrimo dokaze potrebne istraživaču koji pokušava utvrditi uzrokuje li određeni virus neke bolesti. Istraživač to jednostavno ne može zaključiti apstraktnim mišljenjem. Mora provesti ispitivanja. Virus kao uzročnik bolesti mora biti prisutan kod ljudi koji pate od te bolesti. Stoga je razvoj metoda za testiranja prisutnosti virusa – metoda za otkrivanje vidljivog dokaza prisutnosti virusa – samo dio zadaće. Drugi dio zahtijeva ispitivanja na nekom broju oboljelih od te bolesti. Naravno, istraživač ne želi otkriti istine o tim pojedinim osobama. Njegov je cilj utvrditi nešto općenitije – a to je da virus uzrokuje bolest. Pretpostavimo da virus uzrokuje bolest, iz toga proizlazi da su *svi* koji pate od te bolesti izloženi virusu – uključujući i one koji se nisu testirali. Prema tome, pretpostavimo li da naš istraživač zaključi da taj virus zaista uzrokuje tu bolest, njegov zaključak nadilazi izravno promatranje. No ipak, njegova promatranja opravdavaju zaključak. On treba iznijeti argument utemeljen na svojim rezultatima ispitivanja, a u svojem se argumentu mora pozvati na svoja promatranja; na dokaz osjetila. Prema Fregeovu mišljenju, iz tog je razloga izvor takve spoznaje osjetilno iskustvo.

Nasuprot tomu čini se da argumenti izneseni za utemeljenje općih istina o brojevima ne zahtijevaju pozivanje na dokaz osjetila. Kako bismo to shvatili, razmislimo o sljedećem primjeru: ako su dva cijela broja x i y djeljiva s *5*, onda je i njihov zbroj djeljiv s *5*. Istražimo definiciju „je djeljiv“. Reći da je x djeljivo s *5* isto je što i reći (prema definiciji) da postoji neki cijeli broj, recimo a, takav da je $x = 5a$. Slično tomu, reći da je y djeljivo s *5* isto je što i reći da postoji neki cijeli broj, recimo b, takav da je $y = 5b$. Prema tome, $x+y = 5a+5b$. Budući da je, prema zakonu distribucije, $5a+5b = 5(a+b)$, iz toga slijedi da je $x+y = 5(a+b)$, a $(a+b)$ je zbroj dvaju cijelih brojeva. Budući da je zbroj dvaju cijelih brojeva cijeli broj, $x+y$ je djeljivo s 5. Ovaj argument sadržava eksplicitno pozivanje na definiciju „je djeljiv“, na zakon aritmetike (zakon distribucije) i na opću operaciju zbrajanja (zbroj dvaju cijelih brojeva je cijeli broj). Postoji također i implicitno pozivanje na zakone identiteta. Budući da nema vidljivog pozivanja na dokaz osjetila, argumentom se na neki način pokazuje da se istina može spoznati *a priori*.

Međutim, mogli bismo doći u napast pomisliti da se pozivamo na dokaz osjetila. Argument je napisan i čitatelj ga treba pogledati (iskoristiti vizualni dokaz) kako bi ga pročitao. Na taj način, pretpostavimo, čak i matematički argument počiva na dokazu iz osjetilnog iskustva. No, to je pogrešno. Vizualno iskustvo (promatranje rečenice u napisanom dokazu) nije dokaz zaključka. Istina rečenice pruža dokaz zaključka. Struktura rečenice nije dokaz i njezine istine. Zaista, opravdanje iskaza o brojevima ne zahtijeva bilo kakvo promatranje napisane rečenice jer nije potrebno dokaz napisati da bi bio uvjerljiv. Najzad, dokaz možemo razumjeti i da ga ne napišemo. Ne postoji vidljiv razlog pozivanja na dokaz osjetila.

Možda je razlika između opravdanja općih tvrdnji o fizičkom svijetu i općih tvrdnji o brojevima, takoreći, više prividna nego stvarna. Najzad, navedeni argument za opću tvrdnju o brojevima uključuje i neke još neispitane prigovore. Među njima je i pozivanje na aritmetički zakon distribucije. Ako se zakon distribucije može utvrditi samo nekom vrstom opravdanja koje koristi dokaz osjetila, onda se izvorna istina zaista ne može spoznati *a priori*. U tom slučaju potpuno (ili krajnje) opravdanje izvorne istine, u nekom trenutku, zahtijeva dokaz osjetila. Prema tome, da bismo utvrdili mogu li se istine aritmetike spoznati *a priori,* važno je tražiti njihovo potpuno opravdanje, pružiti čvrste dokaze izvedene iz prvotnih, nedokazivih istina o kojima ovise. To je Fregeov projekt.

Prije nego što je započeo sa svojim projektom, Frege je bio uvjeren da će njegov krajnji rezultat biti dokaz za to da se istine matematike mogu zaista spoznati *a priori*; da provjera potpunog opravdanja tih istina, u bilo kojem trenutku, ne ukazuje na nužno pozivanje na osjetilno iskustvo. U tome nije bio usamljen. Naime, u Fregeovo vrijeme empiričko objašnjenje znanja nije bilo općeprihvaćeno. Drugo objašnjenje koje je Frege razmatrao ima svoje polazište u radu Immanuela Kanta (1724.-1804.). Kantovo objašnjenje zahtijeva drugu vrstu znanja - čistu intuiciju.

Napredak: Kantova epistemologija i sintetičko *a priori*

Prema Fregeovu gledištu ovakvo objašnjenje sadržajno predstavlja napredak – i za naše razumijevanje izvora znanja općenito, ali i za naše razumijevanje izvora matematičkog znanja. Važan je dio takva napretka bila Kantova formulacija analitičko-sintetičke dihotomije. Kant je analitičke istine karakterizirao kao istine u kojima je pojam predikata sadržan u pojmu subjekta. Do analitičke istine dospijevamo analizom pojmova. Primjerice, biti baka, znači biti majka vaših roditelja/*a female grandparent*. Pretpostavljajući kako to jednostavno opisuje sadržaj pojma *baka*, analitička je istina da su sve bake majke vaših roditelja. Sintetičke su istine one do kojih ne možemo doći analizom pojmova. Primjerice, možda je istina da su sve bake starije od trideset godina. Ali, budući da biti stariji od trideset godina nije dio sadržaja pojma *baka*, ova je istina, ako je istina, sintetička. Ona se može utvrditi samo pozivanjem na činjenice (možda na činjenice o ljudskoj reprodukciji ili možda jednostavno na rezultate iscrpnih istraživanja provedenih nad svim bakama). Da bismo utvrdili sintetičku istinu, moramo se pozvati na nešto što je izvan sadržaja obuhvaćenog pojma. Formulacija je sintetičko-analitičke dihotomije omogućila Kantu, tvrdi Frege, otkriti istinsku prirodu istina euklidske geometrije, a to je da su te istine ujedno sintetičke i *a priorne*.

Što je prema takvu gledištu izvor našeg znanja euklidske geometrije? Sintetička se istina ne može utvrditi bez pozivanja na nešto drugo osim na sadržaj obuhvaćenih pojmova. Ako su istine geometrije ne samo sintetičke nego i *a priorne*, onda se, bez obzira na to na što se pozivaju, ne mogu pozivati na dokaz osjetila. Ali koji je drugi postojeći dokaz? Da bismo odgovorili na to pitanje, moramo razmisliti o tomu kako se utvrđuju istine euklidske geometrije.

Kao i s dokazom o kojem smo ranije razmišljali – dokazom da je zbroj dvaju brojeva djeljivih s 5 i sam djeljiv s 5 – čini se da i opravdanje istina euklidske geometrije ne zahtijeva pozivanje na određena promatranja. Ono što je potrebno za opravdanje istina euklidske geometrije jest formalni dokaz iz aksioma. Međutim, činjenica da se istine euklidske geometrije utvrđuju dokazom iz aksioma nije, sama po sebi, dovoljna da pokaže da se radi o istini *a priori*. Jer opravdanje aksioma o kojima dokaz ovisi jest dio njegova konačnog opravdanja. Ako opravdanje aksioma zahtijeva pozivanje na određena promatranja, onda je konačno opravdanje istina dokazano iz aksioma koji zahtijevaju takva pozivanja. Stoga, kako ćemo opravdati aksiome euklidske geometrije?

Frege smatra da svi oni koji razumiju osnovne pojmove geometrije (primjerice, „točka“, „crta“, „ravnina“), na način na koji ih on sam razumije, ne mogu ne prihvatiti aksiome. Prema tome, možemo pretpostaviti da će se aksiomi izvesti iz definicija pojmova. Međutim, budući da su pojmovi o kojima govorimo temeljni pojmovi, za njih ne postoje definicije. Frege ukazuje da se značenja tih temeljnih pojmova mogu prenijeti samo aluzijama i prenesenim značenjima (*O osnovama geometrije*, str. 301). Neki su od primjera aluzija za prenošenje značenja osnovnih pojmova koje koristi Euklid sljedeći: točka je ono što nema dijelove; crta je dužina bez širine. Premda ove aluzije objašnjavaju što su točke i crte, ne radi se o definicijama. Niti se mogu iskoristiti da bi dokazale aksiome. Frege kaže, aksiomi su sami po sebi jasni. Frege ukazuje da ćemo, izloženi takvim opisima, jednostavno shvatiti da su aksiomi istiniti.

Međutim, takvo objašnjenje opravdanja aksioma geometrije ne mora odgovarati iskustvu koje smo mnogi od nas imali učeći euklidsku geometriju. Primjerice, razmislimo o određenom aksiomu: Bilo koje dvije točke određuju jedinstven pravac. Profesor vjeruje kako samo opisi spomenutih točaka i pravca nisu od pomoći za dokazivanje istinitosti aksioma. Vjerojatnije je da će profesor učenicima istinitost aksioma dokazati crtajući im par točaka i pokazujući im kako između njih povući crtu koristeći ravnalo. Tako se možda čini da se aksiomi zaista opravdavaju pozivanjem na određena promatranja, baš na način na koji su opće istine o fizičkom svijetu opravdavaju pozivanjem na određena promatranja. Ali, u stvari, uloga je određenih promatranja u geometriji potpuno drukčija od uloge određenih promatranja pri utvrđivanju općih istina o fizičkom svijetu. Razmislimo o ulozi određenih promatranja, primjerice, pri pokušaju da se pokaže kako su svi ljudi koji boluju od AIDS-a inficirani virusom HIV-a. Dokaz te pretpostavke čine određena promatranja pojedinačnih pozitivnih rezultata ispitivanja. Ali dokaz iznesen na osnovi rezultata jednog pozitivnog ispitivanja (ili dva, ili tri), vjerojatno nikoga ne uvjerava u točnost pretpostavke o virusu. Istraživač koji nastoji pretpostavku potkrijepiti, mora izvesti veći broj ispitivanja te u svoj argument mora uvrstiti izvješća o brojnim rezultatima ispitivanja. Što veći broj ispitivanja, pretpostavka pouzdanija. Nasuprot tomu, profesor geometrije ne provodi više puta „eksperiment“ s ravnalom. Profesor bi vjerojatno bio nestrpljiv s nekim učenikom koji želi ponavljati eksperiment nekoliko stotina puta. Kako protumačiti razliku?

Prema Fregeovu gledištu odgovor je jasan: crteži ne predstavljaju dokaz istinitosti aksioma. Izvor opravdanja aksioma geometrije nije osjetilno iskustvo, nego čista intuicija – sposobnost koja omogućava našu percepciju predmeta u prostoru. Mi ne učimo o prostornim odnosima promatrajući fizičke predmete; točnije, mi ne možemo promatrati fizičke predmete *osim kao* predmete u prostoru.

Prostorna je struktura percepcije – a ne karakteristike određenih predmeta – ono što onemogućava, primjerice, da opazimo tri predmeta na crti, od koji je svaki između druga dva. Istine geometrije su opće istine koje se primjenjuju na sve prostorne predmete. Crteži su korisni za studij geometrije jer su djelomice idealizirane ilustracije prostornih odnosa. Oni nam pomažu shvatiti ono što već razumijemo – određena nepromjenjiva obilježja prostornih odnosa. Umjesto da predstavlja dokaz aksioma, crtež predstavlja psihološku pomoć u razumijevanju istinitosti aksioma. Takva nam je psihološka pomoć vjerojatno bitna, ali nije dio stvarnog opravdanja aksioma geometrije. Frege navodi:

Time uopće ne želim poricati da bismo bez osjetilnih dojmova bili glupi kao daska i da ne bismo poznavali ni brojeve ni išta drugo; no ta nas se psihološka tvrdnja ovdje uopće ne tiče. (*Osnove aritmetike,* § 105).

Aksiomi su, nakon što smo ih razumjeli, jasni sami po sebi jer je njihovo razumijevanje, u izvjesnom smislu, već u samoj sposobnosti naše percepcije. Prema tome, rasporedi ili konfiguracije fizičkih predmeta koje možemo zamisliti podlijegat će aksiomima geometrije, uključujući, kaže Frege, i

[N]ajmahnitije fantazije prilikom groznice, najsmionije izmišljotine priča i pjesnika – koje dopuštaju da životinje govore, da se zvijezde zaustave, da iz kamena nastaju ljudi, a iz ljudi drveće i koje poučavaju kako se za vlastiti čuperak izvući iz močvare (*Osnove aritmetike*, § 14).

Problem Kantove epistemologije: općenitost i izvori spoznaje

Fregeovo je razumijevanje izvora naše spoznaje istina euklidske geometrije, kako sam vjeruje, potpuno u skladu s Kantovim gledištem. Ali Frege smatra da drugi aspekti Kantova gledišta nisu sasma ispravni. Jedan je od problema vezan s važnošću različitih razina općenitosti. Prema Fregeovu mišljenju postoji ograničenje općenitosti konzekvencija koje možemo izvesti iz naših promatranja. Opće istine koje možemo utvrditi putem dokaza osjetila, sintetičke istine *a posteriori*, mogu nam reći samo nešto o fizičkom, prostorno-vremenskom svijetu. Nasuprot tome, opće istine euklidske geometrije (znači, sintetički zakoni *a priori*), „vladaju svim onim što je prostorno mislivo, bilo to zbiljsko ili samo ono zorno“ (*Osnove aritmetike*, § 14). Dok se psihološki zakoni mogu narušiti u pričama koje poučavaju kako se za vlastiti čuperak izvući iz močvare, zakoni euklidske geometrije ne mogu. Sintetički se zakoni *a priori* primjenjuju na obuhvatniju, općenitiju domenu od (sintetičko *a posteriori*) zakona fizike.

Ali ni zakoni euklidske geometrije ne vrijede svuda. U stvari, ne vrijede u neeuklidskoj geometriji – području u kojem matematičari izvlače konzekvencije iz skupova aksioma koji uključuju negiranje jednog aksioma euklidske geometrije. Međutim, tvrdi Frege, postoje zakoni koji vrijede svuda; zakoni koji vrijede za „nerestriciranu domenu", za domenu kojoj pripada „sve mislivo" (*Osnove aritmetike*, § 14). Primjerice, zakoni kao što je zakon o tome da je svaki predmet identičan samom sebi vrijede bez obzira na predmet stvari. Frege misli kako su takvi zakoni, naime, zakoni logike. Zaista, nije moguće izvući konzekvencije negirajući zakon logike jer ako pokušamo, „čak se ni mišljenje uopće ne čini mogućim" (*Osnovi aritmetike*, § 14). Istine čije je opravdanje posve opće logičke prirode moraju biti istine *a priori*. Ali ne mogu biti sintetičke jer sintetičke istine vrijede samo za ono što se može prostorno intuizirati. Preostaje nam samo jedna podjela: zakoni logike i istine koje iz njih proizlaze moraju biti analitički.

Sada možemo razumjeti teškoću. Prema Kantovoj karakterizaciji, analitička je istina istina čiji je predikat sadržan u pojmu subjekta. Primjer o kojemu smo ranije raspravljali, da su sve bake roditeljke naših roditelja, odgovara Kantovoj karakterizaciji. Jednostavno je identificirati pojmove subjekta i predikata i shvatiti kako je pojam predikata (*majka roditelja*) sadržan u pojmu subjekta (*baka*). Ali iz tog ne proizlazi da sve istine koje zadovoljavaju Fregeov kriterij općenitosti za analitičnost odgovaraju toj karakterizaciji. Primjerice, iskaz ili kiša pada ili kiša ne pada predstavlja istinu kao konzekvenciju općeg principa prema kojem je, za bilo koji iskaz o određenoj temi, recimo *P*, ili *P* ili ne - *P*. Primjenjujući Fregeov kriterij općenitosti, radi se o analitičkoj istini. Ali ta istina i dalje ne odgovara Kantovoj karakterizaciji analitičkih istina – ne zna se *ima li* pojam subjekta ili pojam predikata.

Tako Frege nudi novu službenu karakterizaciju analitičnosti: analitička je istina ona istina koja se može utvrditi izvođenjem koje počiva samo na definicijama i općim logičkim zakonima. Novom se karakterizacijom ne nastoji odbaciti Kantova analitičko-sintetička dihotomija. Zapravo, u jednom trenutku, Frege tvrdi da govori o onomu što je Kant zaista mislio pod analitičnošću. Prema tome, koji je odnos između Fregeove nove karakterizacije analitičnosti i Kantove zamisli? Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, moramo pobliže promotriti što je logika.

Što je logika?

Mi često zaključujemo; to znači, izvodimo sudove na temelju drugih sudova. Primjerice, pretpostavimo da znate kako su svi kitovi sisavci i da su svi sisavci kralježnjaci. Na temelju toga imate pravo izvesti sud da su svi kitovi kralježnjaci. Taj se zaključak može prikazati na sljedeći način:

Svi kitovi su sisavci.
Svi sisavci su kralježnjaci.
Dakle, svi kitovi su kralježnjaci.

Očito je da je zaključak ispravan. Jednostavno se ne može dogoditi da su obje premise (prve dvije rečenice) istinite, a da je zaključak (posljednja rečenica) neistinit. Osim toga, zaključak je pravilno izveden. Sama istinitost premisa jamči istinitost zaključka. Ne treba se pozivati na nešto drugo – na dokaz osjetilnog iskustva, intuiciju ili neku drugu činjenicu. Čak ne trebamo ništa znati o pojmu *kit*. Jer trebalo bi biti očito da je sljedeći dokaz valjan:

Svi mekušci su sisavci.
Svi sisavci su kralježnjaci.
Dakle, svi mekušci su kralježnjaci.

Pod pretpostavkom da su svi mekušci sisavci i da su svi sisavci kralježnjaci, što god da su mekušci, oni su kralježnjaci. Za takav se zaključak, ili dokaz, kaže da je *valjan*; kaže se da njegov zaključak *slijedi iz* premisa.

Naravno, kao što ronioci i studenti morske biologije znaju, mekušci nisu ni sisavci ni kralježnjaci. I zaključak i jedna od premisa su neistiniti. Ali to ne vodi nevaljanom dokazu. Priznanje nam o valjanosti dokaza ne dopušta bezuvjetni sud o tomu kako je i zaključak istinit (ili da su premise i zaključak istiniti). Točnije, uvjetno dopušta: dopušta prihvatiti zaključak, *pod pretpostavkom* istinitosti premisa. Budući da mekušci nisu sisavci, valjanost nam samog dokaza ne daje za pravo izvesti sud kako su i mekušci kralježnjaci.

Zadaća je logike pružiti sredstva za identificiranje valjanih dokaza. Kako ispuniti takvu zadaću? Razmislimo ponovno o našem dokazu. Pristajanje uz to da je dokaz valjan i kad „mekušci" zamijenimo s „kitovi", ne zahtijeva znanje o mekušcima. Zaista, možemo zamijeniti bilo koji pojmovni izraz za „kitove" u spomenutom dokazu, a da je ishod i dalje valjan dokaz. To znači, što god stavimo za „A" u onom što slijedi, ishod je valjan dokaz:

Svi A-ovi su sisavci.
Svi sisavci su kralježnjaci.
Dakle, svi A-ovi su kralježnjaci.

Naša sposobnost razumijevanja valjanosti dokaza ne zahtijeva znanje o tomu što su sisavci ili kralježnjaci. Kako bismo rekli da je dokaz valjan, sve što je potrebno shvatiti jest to da dokaz ima sljedeću formu:

Svi A-ovi su B-ovi.
Svi B-ovi su C-ovi.
Dakle, svi A-ovi su C-ovi.

Za dokaze se takve forme – tj. dokaze koje možemo iznijeti mijenjajući odgovarajuće izraze za „A", „B", i „C" u iznesenom dokazu – kaže da su *instancije* forme dokaza.

Analitičnost, analiza pojmova i Aristotelova logika

Strategija određivanja valjanosti dokaza određivanjem njegove forme proizlazi iz Aristotelove logike. U Kantovo se i Fregeovo vrijeme općenito smatralo da Aristotelova logika pruža sredstva za vrednovanje dokaza čija valjanost ovisi o odnosima među pojmovima. Prikaz forme dokaza obuhvaća regimentaciju/ustrojavanje svake rečenice u pojam subjekta i pojam predikata. Primjerice, pojam subjekta rečenice „Svi su kitovi sisavci" je „kitovi", a pojam predikata je „sisavci".

Aristotelova se logika bavi *silogizmima*: dokazima u kojima se predikat zaključka pojavljuje u jednoj od premisa, a subjekt se zaključka pojavljuje u drugoj premisi. Nije teško shvatiti prednost učenja silogizama. Ograničen je broj formi koje silogizmi mogu poprimiti. Identifikacija nam relativno malo valjanih formi omogućava vrednovanje većeg broja zbiljskih dokaza.

Ali što tako opisana logika ima s Kantovom analitičnošću? Vidjeli smo ranije da prema Kantovu gledištu naša spoznaja analitičkih istina proizlazi iz same analize pojmova. Sljedeći je dokaz lako razumjeti kao artikulaciju neke vrste analize pojma *baka*:

Sve su bake majke roditelja.
Sve su majke roditelja roditeljke.
Dakle, sve su bake roditeljke.

Naravno, ovakva se analiza sastoji od valjanog dokaza čije su obje premise analitičke istine. Čini se kako je prva premisa artikulacija sadržaja *baka*, a u drugoj je premisi pojam predikata jasno obuhvaćen pojmom subjekta. Prema Kantovu gledištu, kako ga Frege shvaća, valjana se izvođenja, čije su premise samo analitičke istine i definicije, trebaju promatrati kao neka vrsta analize pojmova. Prema tome, zaključci bi se takvih dokaza trebali promatrati kao analitički. Valjan je zaključak usko povezan s Kantovom i Fregeovom analitičnošću.

Što je s Kantovom klasifikacijom aritmetičkih istina? Kant je tvrdio da se isprva čini kako je tvrdnja 7 + 5 = 12 analitički sud, a zapravo nije: analiza pojmova je nedostatna da bismo otkrili kako je 12 zbroj od 7 i 5. To je sukladno stavu da nam Aristotelova logika može dati sve rezultate pojmovnih analiza. Aristotelov dokaz da su 7 + 5 = 12 ne možemo izvesti iz definicija obuhvaćenih pojmova. Zapravo, povezanost Aristotelove logike i analize pojmova od veće je važnost za naše razumijevanje prirode analitičkih istina. Iako nam Aristotelova logika omogućava prepoznati velik broj valjanih dokaza, nijedan njezin rezultat nije iznenađujući. Prema tome, dokazi nam Aristotelove logike ne mogu doprinijeti znanju. Ako se do analitičkih istina može doći samo s pomoću definicija i Aristotelove logike, onda njihovo otkriće ne doprinosi znanju. Kant je tvrdio da spoznaja analitičkih istina ne predstavlja stvarno znanje. Stoga je i matematičke sudove, koji očito proširuju naše znanje, uvrstio među sintetičke. Osim toga, tako gledajući, jedina je stvarna spoznaja spoznaja sintetičkih istina jer samo čista intuicija i osjetilno iskustvo (izvori naše spoznaje sintetičkih istina) mogu biti izvori spoznaje.

Zašto aritmetičke istine smatramo analitičkim?

Iako se Frege slaže s Kantovom klasifikacijom da je naše znanje geometrije sintetičko *a priori*, ne dijeli Kantovo mišljenje kad je riječ o klasifikaciji našeg znanja drugih matematičkih istina. Frege tvrdi da su uz aritmetičke istine i sve istine matematike (s iznimkom istina euklidske geometrije) analitičke. S obzirom na ono što smo vidjeli do sada, čini nam se neobičnim. Prema Fregeovoj službenoj karakterizaciji, analitičke su istine samo one koje se izvode s pomoću definicija i logike. Premda je Frege ponudio i drugi kriterij analitičnosti – prema kojem analitičke istine uređuju sve mislivo – teško je razumjeti kako takav kriterij uskladiti s njegovom službenom definicijom. Uz to, čak i da možemo njegovu službenu karakterizaciju analitičnosti povezati s tim kriterijem, i dalje je nejasno zašto Frege smatra da su uz istine geometrije i istine matematike analitičke jer nam zapravo ne kaže zašto istine drugih područja matematike upravljaju sve mislivo. Da bismo shvatili Fregeovo odstupanje od Kanta, korisno je upoznati se malo s poviješću matematike.

Jedno je od središnjih područja matematike analiza: istraživanje beskonačnih procesa. Analiza se javlja u sedamnaestom stoljeću kao odgovor na potrebe fizike i astronomije. Prvobitno su joj problemi vezani uz kontinuirane veličine kao što su: duljina, površina, brzina, ubrzanje – veličine koje se mogu i koje se redovito prikazuju geometrijski. U Kantovo vrijeme većina dokaza analize koristi tehnike geometrije. Sve dok se smatra da bitni teoremi analize ovise o geometrijskim dokazima, dotad ih je razumno smatrati sintetičkim *a priori* – jer su sintetičke istine *a priori* istine čije opravdanje ovisi o prostornoj intuiciji.

Međutim, sredinom se devetnaestog stoljeća shvatilo da mnogi geometrijski dokazi nisu sigurni kako se pretpostavljalo. Neki su naizgled dobri dokazi identificirani kao pogrešni. Poteškoće se dijelom mogu pripisati zabunama u vezi s nekim temeljnim pojmovima analize, uključujući i pojmove ograničenja i kontinuiteta. To znači kako pokušaj razjašnjenja pojmova obuhvaćenih aritmetiziranjem analize pokazuje da se njezine istine mogu dokazati iz aritmetičkih istina. U vrijeme kada je Frege započeo svoj rad, većina se dokaza analize odvojila od geometrije i pojma veličine. Stoga ne iznenađuje kako Frege nije uvidio da su istine analize sintetičke *a priori*.

Ali, to je još uvijek nedovoljno da objasni čvrsto Fregeovo uvjerenje da istine analize nisu sintetičke *a priori*. Aritmetizacija analize može pokazati samo da za određenje izvora naše spoznaje istina analize (i bilo kojeg drugog aritmetiziranog područja matematike) trebamo identificirati izvor našeg znanja aritmetičkih istina. Aritmetičke istine i dalje mogu biti sintetičke *a priori*. Zaista, u *Elementima* je Euklid omogućio sredstva da pokaže kako aritmetičke istine izvesti iz geometrijskih istina. Euklid je brojeve smatrao veličinama, a svaki je cijeli broj prikazao kao dužinu. Tako je mogao prikazati geometrijske stavke osnovnih zakona aritmetike i geometrijski ih dokazati. Ako su takvi dokazi potrebni za opravdanje aritmetičkih istina, onda uspjeh aritmetizacije analize pokazuje ne da je geometrija važnija od aritmetike, već samo da su matematičari pogrešno shvatili ulogu geometrije u osnovama analize. Možemo ustvrditi kako se time pokazuje da se geometrija jednostavno trebala pojaviti u ranijoj fazi – u fazi opravdanja aritmetičkih istina. Frege je bio svjestan takvih dokaza aritmetičkih istina i različitih strategija definiranja brojeva geometrijskim pojmovima. No i dalje je vjerovao kako su aritmetičke istine analitičke. Da bismo shvatili zašto, potrebno se vratiti na njegova gledišta o općenitosti aritmetike.

Frege tvrdi kako se istine aritmetike primjenjuju na područja obuhvatnija od prostornog područja. Uz prostorne se predmete takvim područjima mogu obuhvatiti mirisi, zvukovi, metode i ideje. Čak i kad bismo mogli aritmetičke istine prepisati u jezik geometrije i dokazati ih iz aksioma geometrije, dokazi ne bi bili dovoljno općeniti, zaključuje

Frege. Njima bismo samo pokazali da aritmetika vrijedi u prostornom području. Zaključci su takvih dokaza samo svođenja aritmetičkih tvrdnji na prostorno područje. Ali aritmetičke se istine, tvrdi Frege, primjenjuju na nerestricirano područje; na sve mislivo. Ako se istine o brojevima primjenjuju na sve, pa čak i na takve neprostorne entitete kakvi su metode i ideje, onda je potreban općenitiji dokaz. Frege pita: „Kako bi intuicija mogla jamčiti tvrdnje koje vrijede za sve takve heterogene kvantitete, od kojih nam neke vrste možda još nisu poznate?" (*Metode izračuna temeljene na opsegu pojma kvantiteta*, str. 1).

Ovim se označava odstupanje od Kanta. Prema Kantovu gledištu samim razumom ne možemo postići stvarno znanje – jer izvor je stvarnog znanja čista intuicija ili osjetilno iskustvo. Međutim, prema Fregeovu gledištu naša je spoznaja većine općih istina stvarna, ali kao svoj izvor nema ni osjetilno iskustvo ni čistu intuiciju. Tako Frege sam razum smatra izvorom spoznaje. Kao što intuicija omogućava percepciju, tako razum omogućava misao. Fregeov je cilj pokazati da je sam razum izvor naše spoznaje aritmetičkih istina te da se aritmetičke istine mogu izvesti samo logičkim sredstvima.

Matematička indukcija i općenitost

Već smo vidjeli jednu poteškoću koja se mora prevladati. Aristotelova logika, Fregeu već dostupna, nije dovoljno učinkovita da izvede dokaze aritmetičkih istina. Stoga je dio Fregeova projekta Aristotelovu logiku nadomjestiti novom, učinkovitijom logikom. Kako to izvesti? Možemo pretpostaviti da je prvi korak jednostavno osnovne aritmetičke dokaze dodati valjanim dokazima Aristotelove logike. No takva strategija ne zadovoljava. Da bi pokazao kako je aritmetika analitička, Frege mora pokazati da su sami principi potrebni za izvođenje zaključaka tih dokaza iz njihovih premisa principi koji vrijede ne samo u domeni brojeva nego i u nerestriciranoj domeni, široj od svih. Takva zadaća uopće nije beznačajna jer zaključivanje se i principi obuhvaćeni nizom aritmetičkih istina ne čine primjenjivim u najširoj domeni. Karakteristika koja čini se izdvaja zaključivanje o prirodnim brojevima (to znači, o 1, 2, 3, itd.) jest primjena određenog principa koji je svojstven toj domeni: princip matematičke indukcije.

Što je matematička indukcija? Pretpostavimo da želimo pokazati kako svi prirodni brojevi imaju određeno svojstvo. Prema principu matematičke indukcije trebamo utvrditi samo dvije stvari: prvo, trebamo utvrditi vrijedi li to svojstvo za 1. Kao drugo, za svaki prirodni broj *n* treba utvrditi sljedeće: ako svojstvo vrijedi za *n*, vrijedi i za sljedbenika od *n* (ako je tako, kaže se da je to svojstvo „sljedbenik u nizu prirodnih brojeva“). Da bismo shvatili kako se time može pokazati da spomenuto svojstvo vrijedi za sve prirodne brojeve, pretpostavimo kako svojstvo ispunjava oba navedena uvjeta. Prvo, svojstvo sigurno vrijedi za 1 jer je to eksplicitno pokazano. Također se pokazalo da svojstvo vrijedi i za sljedbenika od *n* budući da vrijedi za n. Prema tome, jer svojstvo vrijedi za 1, vrijedi i za sljedbenika od 1, a to je 2. Jer svojstvo vrijedi za 2, vrijedi i za sljedbenika od 2, to znači, vrijedi i za 3. Jasno je da nas princip matematičke indukcije ne zavodi na krivi put. Ali izgleda da se uspjeh primjene principa temelji na prirodi domene prirodnih brojeva. Njegova primjena funkcionira jer se niz prirodnih brojeva sastoji od 1, sljedbenika od 1, sljedbenika sljedbenika od 1, itd. Ali ako je matematička indukcija oblik zaključka svojstven domeni brojeva, njezini se rezultati ne mogu izvoditi samo iz logike.

Jedan je od Fregeovih uvida i to da princip matematičke indukcije nije poseban princip izveden iz svojevrsne prirode domene brojeva. Karakteristika niza prirodnih brojeva koja nam omogućava primijeniti matematičku indukciju za dokazivanje općih istina o brojevima nije svojstvena nizu prirodnih brojeva. Razmotrimo odnos dvoje ljudi, *x* i *y*, ako je *x* izravni nasljednik od *y* – što znači ako je *y* dijete od *x*; ili je *y* dijete djeteta od *x*; ili je *y* dijete od djetetova djeteta od *x*, itd. Niz prirodnih brojeva (1, sljedbenik od 1, sljedbenik sljedbenika od 1...) vrlo je sličan nizu koji čini određena osoba i njezin izravni sljedbenik (primjerice, Ana, Anina djeca, Anine djece djeca, itd.). Oba se niza određuju prvim članom i relacijom – u jednom slučaju, brojem jedan i relacijom *je neposredni sljedbenik od*; u drugom slučaju Anom i relacijom *je dijete od*.

Princip je matematičke indukcije moguće primijeniti gotovo neprimjetno za utvrđivanje činjenica niza koji čine Ana i njezini sljedbenici. Kako bismo pokazali da svi članovi niza prirodnih brojeva imaju određeno svojstvo, princip nam matematičke indukcije pokazuje kako samo trebamo pokazati da prvi član ima svojstvo i da je to svojstvo nasljedno u nizu prirodnih brojeva. Na trenutak pretpostavimo da je svojstvo smeđih očiju uvijek nasljedno u nizu koji čine Ana i njezini sljedbenici. Znači, pretpostavimo kako u toj određenoj populaciji svako dijete osobe sa smeđim očima ima smeđe oči. Nadalje, pretpostavimo da i Ana ima smeđe oči. Kad bismo mogli utvrditi obje činjenice – to da je svojstvo smeđih očiju nasljedno u nizu i da prvi član niza (Ana) ima smeđe oči – lako bismo zaključili kako svaki član niza ima smeđe oči. Ako postoji sumnja, možemo proći kroz isti proces zaključivanja koji smo koristili kako bismo se uvjerili da dokazi matematičke indukcije imaju svoju primjenu u aritmetici.

Zaključak je potonjeg argumenta sintetički *a posteriori* – može se utvrditi samo pozivanjem na dokaz osjetila. Ali takva su pozivanja potrebna samo pri utvrđivanju istine premisa. Kako smo vidjeli ranije, valjan argument ne mora imati istinite premise. Kako bismo odredili radi li se o valjanom argumentu, moramo odrediti je li istina premisa sve potrebno za naš sud o tomu da je zaključak istinit. Primjenjujući takav standard, navedeni se argument čini valjanim. I bez pozivanja na osjetila, intuiciju ili dodatne činjenice, pretpostavivši da su premise argumenta istinite, vidjet ćemo da je zaključak istinit. U stvari, potrebna je samo analiza obuhvaćenih pojmova i relacija.

Takva promatranja daju povoda mišljenju da zaključak koji koristi matematičku indukciju ne počiva na karakteristikama svojstvenim domeni brojeva. Kako smo vidjeli ranije, matematička nam indukcija omogućava zaključiti da, budući da svojstvo vrijedi za prvi član niza prirodnih brojeva i budući da je sljedbenik u nizu prirodnih brojeva, vrijedi i za svaki član niza prirodnih brojeva. Ali, kako smo upravo vidjeli, legitimnost takva zaključka ne počiva na nekoj specifičnoj karakteristici brojeva. Isto tako, pretpostavivši da svojstvo vrijedi za prvi član niza koji čine Ana i njezini sljedbenici i pretpostavivši da je sljedbenik u ovom nizu, možemo zaključiti da svojstvo vrijedi za svaki član tog niza. Legitimnost nijednog zaključka ne počiva na karakteristici svojstvenoj ljudima i brojevima. Važna je samo struktura niza - zapravo, činjenica da prvi član i relacija određuju svaki niz. Nepotrebno je misliti kako postoje nizovi za samo određene predmete. Zaključci o nizovima i njihovim svojstvima mogu biti zaključci o nizovima raznovrsnih predmeta. Znači, zaključci imaju obilježja zaključaka opravdanih samom logikom.

Aristotelova nam logika govori drukčije jer Aristotelova logika ovisi o razumijevanju sudova koji onemogućavaju prepoznati složene argumente koji obuhvaćaju logički valjane relacije. Fregeov je prvi zadatak bio potkrijepiti svoje uvjerenje o tomu da su takvi opći zaključci o nizovima valjani. To je učinio odbacujući subjektno-predikatnu analizu o kojoj ovisi Aristotelova logika i razvio novu, učinkovitiju logiku. Rezultat je svoje revolucionarno nove logike iznio u monografiji *Begriffsschrift*, objavljenoj 1879. godine.

3

Fregeova nova koncepcija logike

Da bismo razumjeli revolucionarnu prirodu Fregeove nove logike, korisno je početi s razmatranjima o nekim ograničenjima logičkih metoda dostupnih prije Fregeova projekta. Frege nije bio jedini koji je prepoznao da se Aristotelova logika ne može uvijek primjenjivati za ispravno vrednovanje zaključaka. Poznato je i mnogo prije nego je Frege započeo sa svojim projektom da neki logički valjani zaključci nisu valjani Aristotelovi silogizmi. Sljedeći je zaključak takav primjer:

Ako je Ralph papiga, onda Ralph nije mekušac.
Ralph je papiga.
Dakle, Ralph nije mekušac.

Jasno je da se radi o valjanom argumentu. No, trebat će nam dokaz osjetila za određivanje istinitosti premisa. Međutim, dokaz nam osjetila ili zora - te nijedan drugi dokaz izuzev onog što je već dostupan u samom zaključku – nije potreban da shvatimo kako konkluzija slijedi iz premisa. Znači, izgleda da je zaključak logički valjan. Ali zaključak uopće nije silogizam. Silogizam je argument u kojem se predikat konkluzije pojavljuje u jednoj od premisa, a subjekt se konkluzije pojavljuje u drugoj premisi. Prva premisa navedenog argumenta nema čak ni subjektno-predikatni oblik. Točnije, premisa je sastavljeni iskaz, kondicional koji oblikujemo kombiniranjem dviju tvrdnji: antecedenta/prednjaka

Ralph je papiga.
i konsekvensa/posljetka
Ralph nije mekušac.

Štoviše, iako druga premisa ima subjektno-predikatni oblik, mi ne moramo znati njezin oblik (njezine subjekte i predikate) kako bismo vrednovali zaključak. Ako se bavimo vrednovanjem zaključka, onda se članovi premisa i konkluzije moraju prikazati kao tvrdnje, a ne subjekti i predikati. Ono što moramo znati, da bismo razumjeli kako je zaključak valjan, jest sljedeće: to da je jedna od premisa kondicional; druga je premisa antecedent kondicionala; a konkluzija je zaključka konsekvens kondicionala. To je duži put da se kaže kako zaključak ima sljedeći oblik:

Ako *B*, onda *A*
B
Dakle, *A*

Sva su slova koja se pojavljuju u ovom argumentu držači mjesta/ *place-holders*, ne za izraze pojma (kao što je bio slučaj u argumentima o sisavcima i kralježnjacima koje smo razmatrali u prethodnom poglavlju), nego za rečenice. Izgleda kako formalni dio argumenta čine odnosi među stavcima, a ne pojmovima. Logika koja vrednuje takve argumente naziva se propozicionalna logika. Pravilo *Modus Ponens* omogućava tu vrstu zaključka.

Povezivanje dviju logika

Iako su se propozicionalna i Aristotelova logika u ranoj povijesti logike smatrale suprotstavljenima, od devetnaestog su stoljeća prihvaćene kao važan doprinos općem projektu vrednovanja zaključka. No, također im se drukčije pristupalo. Obično se smatralo kako je Aristotelova logika omogućila metodu za vrednovanje zaključaka čija se valjanost temeljila na odnosima među pojmovima, dok je propozicionalna logika omogućila metodu za vrednovanje zaključaka utemeljenih na odnosima među propozicijama. Dvije metode koriste različite načine promatranja i prikaza konstrukcije premisa i konkluzije zaključaka.

Postoji li način konstrukcije neke unificirane logike koji omogućava prepoznati valjane zaključke i propozicionalne i Aristotelove logike? Jedan je od Fregeovih najslavnijih prethodnika, George Boole (1815.-1864.), uveo novu simboličku notaciju u kojoj je moguće prikazati i silogizme i propozicionalne argumente. Kad zaključak iznesemo u Boolovoj notaciji, možemo nastaviti s vrednovanjem zaključka mehanički računajući. Ali takva tehnika i dalje oštro razdvaja dvije vrste zaključaka. Budući da Boolova notacija može prikazati logičku strukturu bitnu ili za propozicionalni ili za Aristotelov zaključak, ne može istodobno prikazati oba. To je rezultat Boolove primjene simbola. Simbol Boolove notacije, primijenjen u izražavanju silogizma, ima drukčiju vrstu značenja, nego kad se primjenjuje u izražavanju propozicionalnog argumenta. Da bismo primijenili Boolove tehnike za vrednovanje nekog argumenta, moramo kao prvo odlučiti o kojoj se vrsti argumenta radi, te prema tome prikazati njegov oblik. Za mnoge je tvrdnje jedna od posljedica to što se Boolova notacija ne može koristiti za prikaz cijelog sadržaja važnog za zaključak. Primjerice, razmislimo o jednoj premisi navedenog argumenta:

Ako je Ralph papiga, onda Ralph nije mekušac.

Tvrdnja ima propozicionalnu složenost (radi se o kondicionalu) i subjektno-predikatnu složenost (njezin antecedent i konsekvens imaju subjektno/predikatni oblik). Kad god se tvrdnja prikaže u Boolovoj notaciji, jedna će se složenost izostaviti – kao što je slučaj u navedenom prikazu oblika zaključka omogućenog pravilom *Modus Ponens*.

S obzirom na to da neka tvrdnja ima i propozicionalnu i subjektno-predikatnu složenost, Boolova notacija ima granice. Nijedan simbolički izraz notacije ne može izraziti sav sadržaj potreban za bilo koji zaključak u kojem se pojavljuje. Ali, radi li se o nedostatku Boolove notacije? Najzad, ako želimo tehnike za vrednovanje određenih dokaza, bit će dovoljno za bilo koji dokaz izraziti sav sadržaj njegovih premisa i konkluzije potrebne za vrednovanje tog određenog dokaza. Boolova nam tehnika omogućava kao valjanima identificirati sve argumente koji se mogu kao valjani identificirati bilo Aristotelovom bilo propozicionalnom logikom. Zaista, kad bi to bili jedini valjani argumenti, Boolova bi notacija bila dovoljna za vrednovanje argumenata. Međutim, ispostavi li se da postoje valjani argumenti čija je valjanost posljedica kombinacije propozicionalne i nepropozicionalne složenosti, Boolova će metoda biti nedostatna. Svi koji misle da postoje takvi valjani argumenti, žele notaciju učinkovitiju od Booleove.

Logički savršen jezik

Frege je bio uvjeren da postoje valjani argumenti koji se ne mogu identificirati i kao Aristotelovski valjani i kao propozicionalno valjani argumenti. Kao zadatak si je uzeo uvesti novu logičku notaciju, Begriffsschrift („pojmopis“); notaciju kojom se za svaku tvrdnju može izraziti *sav* sadržaj važan za *bilo koji* zaključak u kojem se može shvatiti. To je nazvao „pojmovnim sadržajem“ tvrdnje. Na taj je način jednostavno uočiti razliku između notacije koja izražava pojmovni sadržaj i Boolove notacije. Iskaz tvrdnje u Boolovoj notaciji prikazuje samo dio njezina sadržaja – dio važan za vrednovanje određenog zaključka. Da bismo spoznali kako tvrdnju prikazati u Boolovoj notaciji, moramo znati koji zaključak uzimamo u obzir. Nasuprot tomu, iskaz je tvrdnje u Begriffsschriftu neovisan o bilo kojem zaključku u kojem se može pojaviti. Jer prikaz tvrdnje u Begriffsschriftu mora izraziti sav sadržaj koji je važan za *bilo koji* dokaz u kojem se može pojaviti. Frege je želio razviti notaciju koja se ne smatra samo sredstvom za određivanje valjanosti argumenata nego i nekim jezikom.

Iako Begriffsschrif ima namjenu kao jezik, znatne su razlike između Begriffsschrifta i prirodnog jezika – jezika kojim se svakodnevno služimo. Fregeov je jezik umjetan i nije osmišljen za svakodnevne potrebe. Kao što spominje u predgovoru *Begriffsschrift*a, počevši rad na svojemu projektu, Frege otkriva da je prirodni jezik nedovoljan za potrebe njegova projekta. Prirodnim je jezikom teško precizno iskazati složene pojmovne sadržaje. Nadalje, kako Frege tvrdi tijekom cijele karijere, prirodni jezik ima brojne logičke nedostatnosti. Međutim, njegov cilj nije usavršiti prirodni jezik ili ga nadomjestiti logički savršenim jezikom. S druge strane, on svoj logički savršen jezik, Begriffsschrift, smatra nekim znanstvenim sredstvom. Fregeova je notacija, kao i Booleova, uvedena da se koristi kao metoda za vrednovanje zaključaka.

U predgovoru *Begriffsschrift*a Frege uspoređuje svoj savršeni logički jezik s mikroskopom. Njegov je logički savršen jezik, kao i mikroskop, koristan za određene znanstvene ciljeve, ali potpuno beskoristan za neke druge znanstvene ciljeve. U većini nam je slučajeva u promatranjima bolje koristiti golo oko nego neki mikroskop. Slično tomu, u većini slučajeva bolje nam je tvrdnje iznositi u prirodnom jeziku nego u Begriffsschriftu. Samo je u slučaju vrednovanja zaključaka Begriffsschrift bolje sredstvo iskazivanja naših tvrdnji od prirodnog jezika. Nakon što je zaključak iznesen u Begriffsschriftu, cilj je uvesti sustav vrednovanja koji će mehanički odrediti je li zaključak ispravan i čvrst. To uključuje i uvođenje manje skupine osnovnih logičkih istina kao i pravilo koje dopušta zaključke određenog oblika.

Nakratko ćemo se vratiti detaljima Fregeove nove koncepcije logike i kontekstu u kojem je takva logika poboljšanje ranijih logika. Međutim, prije toga, bit će korisno reći nešto više o riječima i njihovim sadržajima te eksplicitno pojasniti terminologiju koju već naširoko koristim.

Svaka rasprava o pojmovnom sadržaju zahtijeva prepoznavanje razlike između riječi i njihova sadržaja. To možemo ilustrirati razmatranjem riječi „i“ i „ali“. Razmislimo o tome što možemo zaključiti iz sljedeće istinite tvrdnje o noju:

(∗) Noj je ptica, ali ne može letjeti.

Možemo zaključiti da se radi o ptici, jer nam istina od (∗) *jamči* da se radi o ptici. Da se ne radi o ptici, onda (∗) ne bi bilo istinito. Slično tomu, možemo zaključiti da noj ne može letjeti. Čini se da možemo zaključiti još ponešto: da većina ptica leti. Ali, to je pogrešno. Jer istina od (∗) ne jamči da većina ptica može letjeti. I da većina ptica ne leti, *i dalje* bi bilo istinito da je noj ptica, ali da ne može letjeti – iako bi bilo neobično uporabiti riječ „ali“. Prema Fregeovu gledištu, iz

A, ali B
možemo zaključiti točno iste tvrdnje koje možemo zaključiti iz A i B.

Znači, dvije su riječi „i“ i „ali“ podjednako važne za zaključak; imaju, upotrijebimo Fregeov tehnički pojam - isti *pojmovni sadržaj*. Tako Fregeov projekt od nas traži razlikovati riječi od pripisana im sadržaja. Naravno, reći kako te dvije riječi imaju isti pojmovni sadržaj, nije isto što i reći da pripisujemo isti sadržaj riječima „i“ i „ali“ – jer nakon toga ne bi bilo neobično uporabiti „ali“ u gore opisanoj situaciji. Fregeov projekt također od nas traži prepoznati određenu vrstu sadržaja – pojmovni sadržaj – čijem je iznošenju Begrifftsschrift i namijenjen.

Možemo naći ne samo dvije različite riječi nego i dvije različite rečenice koje imaju isti pojmovni sadržaj. Frege, za primjer, koristi dvije sljedeće rečenice:

Hidrogen je lakši od ugljičnog dioksida.
i
Ugljični dioksid je teži od hidrogena.

Obje rečenice iznose nešto što može biti ili istinito ili neistinito. U *Begriffsschrift*u, Frege upućuje na pojmovni sadržaj – ili na ono što se iskazuje – takvom vrstom rečenice, kao na „sadržaj koji može postati neki sud“. Ja ću upotrijebiti taj izraz kao i izraze „stavak“ i „tvrdnja“ za ono što se iskazuje rečenicom koja može biti ili istinita ili neistinita.

Iznošenje dokaza u Begriffsschriftu

Sada smo u mogućnosti početi s istraživanjem Fregeove logičke notacije. Begriffsschrift se koristi za iznošenje zaključaka. Kako izgleda iznošenje zaključka? Zaključci su nizovi tvrdnji. U zaključku se neki stavci, premise, jednostavno tvrde, a drugi se stavci, konkluzije, iznose na temelju premisa. Ali nije svaki izraz stavka tvrdnja. Razmotrimo sljedeći zaključak:

Ako je 3 kvadratni korijen od 4, onda je 3 kubni korijen od 8.
3 nije kubni korijen od 8.
Dakle, 3 nije kvadratni korijen od 4.

Rečenica „3 je kvadratni korijen od 4“ čini prvi dio premise. Tako se stavak koji rečenica izražava navodi u prvoj premisi. Ali se ne tvrdi u prvoj premisi. Zaista, smisao je izražavanja u zaključku pokazati zašto se ne tvrdi. U konkluziji se negira.

Crta suda i crta sadržaja

Na razliku se između tvrđenja i izražavanja u Fregeovu Begriffsschriftu ukazuje s prva dva znaka koja uvodi: znakovi koje naziva „crta suda„ i „crta sadržaja“. Crta suda je kratka okomita crta, a crta sadržaja je duga vodoravna crta. Prikazu sadržaja koji može postati sud (propozicionalni sadržaj), u Begriffsschriftu uvijek prethodi crta sadržaja. Ako se takav sadržaj ustvrdi u zaključku, onda crta sadržaja prethodi crti suda. Primjerice, u prvom je razmotrenom zaključku poglavlja, zaključku izvedenom pravilom *Modus Ponens*, jedna od premisa bila: Ralph je mekušac. Na trenutak pretpostavimo da je rečenica „Ralph je morski puž bez kućice“ rečenica u Fregeovu logičkom jeziku, tad bi se tvrdnja te premise mogla u zaključku prikazati na sljedeći način:

$\vdash$ Ralph je mekušac.

Crta uvjetovanja i crta negacije

Begriffsschrift također ima dva simbola za prikazivanje propozicionalne složenosti: crta uvjetovanja i crta negacije. Počnimo s crtom uvjetovanja. Druga premisa u našem *Modus Ponens* zaključku je kondicional: Ako je Ralph papiga, onda Ralph nije mekušac. Ovo je složeni stavak s dvije propozicionalne sastavnice. Kako ćemo ga prikazati u logičkoj notaciji? Možemo pretpostaviti da je Fregeova zadaća izraz prirodnoga jezika „ako ... onda ...“ nadomjestiti notacijom koja prikazuje sadržaj izraza prirodnog jezika. No Frege tako ne shvaća svoju zadaću jer je, tvrdi Frege, kondicional koji se izražava primjenom riječi „ako“ uzročni kondicional. Za to daje primjer:

Ako je Mjesec kvadrature Sunca, Mjesec se pojavljuje kao polukrug.

Frege ukazuje na to kako je ono što se izražava u toj tvrdnji uzročna veza između Mjesečeve kvadrature Sunca i Mjesečeva pojavljivanja kao polukruga. Ali uzročne se veze pojavljuju samo u fizičkom području. Ne bi postojali *logički* simboli za odnose koji vrijede samo u fizičkom području. Naravno, nije ispravno reći da primjena izraza „ako ... onda ...“ uvijek izražava neki uzročni odnos. Fregeov je cilj uvesti Begriffsschriftov simbol za kondicional koji se može koristiti bez obzira na predmet stvari.

To je kondicional koji se koristi u propozicionalnoj logici. Sljedeći je oblik zaključka izvedenog pravilom *Modus Ponens* valjan propozicionalni zaključak:

Ako *B*, onda *A.*

B

Dakle, *A.*

Složimo li se da su svi zaključci takva oblika valjani, onda nam to govori nešto o sadržaju kondicionala. Kondicional mora dati potrebnu informaciju koja nam omogućava izvesti konsekvens iz antecedenta. Znači, ne možemo prihvatiti kondicional i njegov antecedent ne prihvaćajući njegov konsekvens. Prema tome, minimalni potrebni sadržaj kondicionala isključuje mogućnost da je antecedent istinit, a konsekvens neistinit. Štoviše, kao što nam naširoko rasprostranjeno prihvaćanje pravila *Modus Ponens* ukazuje, sadržaj je inherentan u većini naših svakodnevnih uporaba izraza „ako ... onda ...". To je sadržaj koji se Fregeovim kondicionalom mora obuhvatiti.

Kako ćemo shvatiti sadržaj? Budući da se kondicionalom isključuju određene mogućnosti, korisno je početi popisivanjem svih mogućnosti. Dva nas stavka interesiraju: *B*, antecedent i *A*, konsekvens. Kao ishod imamo četiri mogućnosti, koje Frege navodi na sljedeći način:

I. *A* i *B*

II. *A* i ne - *B*

III. ne - *A* i *B*

IV. ne - *A* i ne-*B*

Frege kaže da kondicional (ako *B*, onda *A*) odbacuje treću mogućnost. Upadljiva je karakteristika takva kondicionala to što se njegova istina potpuno određuje gledajući na to jesu li antecedent i konsekvens istiniti ili neistiniti. Takav se kondicional naziva „istinosno-funkcionalni" kondicional. Frege to ilustrira sljedećim primjerom:

Ako Sunce sija, onda je 3x7=21.

Budući da je konsekvens istinit, možemo isključiti treću mogućnost, mogućnost da je antecedent istinit, a konsekvens neistinit. Ali, ne postoji uzročna povezanost, zaista, uopće nema prepoznatljive povezanosti između sijanja Sunca i istinitosti toga da je 3x7 = 21.

Ali, je li Frege za tu svrhu izabrao ispravan istinosno-funkcionalni kondicional? Premda je jasno da kondicional isključuje mogućnost da je antecedent istinit, a konsekvens neistinit, možemo pretpostaviti da bi kondicional također trebao isključiti i druge mogućnosti. Zašto bi svi kondicionali s neistinitim antecedentom bili istiniti? Pretpostavimo da Ralph *nije* papiga. Ne čini li se da u takvoj situaciji zaista mislimo kako je istinito da *ako* je Ralph papiga, *onda* je Ralph mekušac.

Kao prvo, važno je primijetiti da nas prihvaćanje istinitog kondicionala, u takvoj situaciji, ne vodi teškoćama u našim zaključcima jer, budući da Ralph nije papiga, iz kondicionala ne možemo zaključiti bilo što drugo o Ralphu. Ali to je nedovoljno da objasni zašto *bismo* prihvatili istinitost kondicionala. Da bismo shvatili zašto kondicionale s neistinitim antecedentima prihvaćamo kao istinite, moramo pobliže promotriti koji su zadaci Fregeove logike.

To je najjednostavnije razumjeti prisjetimo li se da je Frege nastojao pronaći metodu za istodobno promatranje propozicionalnog i nepropozicionalnog pojmovnog sadržaja. Razmotrimo istinitu tvrdnju da je svaki kubni korijen od 8 kvadratni korijen od 4. To nam, prema Fregeovoj analizi, govori da bilo što da odaberemo, recimo *n*, ako je *n* kubni korijen od 8, *onda* je *n* kvadratni korijen od 4.

Pretpostavimo li takvu analizu – i pretpostavimo li da je istinito da je svaki kubni korijen od 8 kvadratni korijen od 4 – onda je, bez obzira na to što je *n*, istinito da ako je *n* kubni korijen od 8, *n* je kvadratni korijen od 4. Znači, svaki je sljedeći stavak istinit:

(a) Ako je 1 kubni korijen od 8, onda je 1 kvadratni korijen od 4.

(b) Ako je 2 kubni korijen od 8, onda je 2 kvadratni korijen od 4.

(c) Ako je -2 kubni korijen od 8, onda je -2 kvadratni korijen od 4.

Sada možemo pokazati zašto je svaki istinosno-funkcionalni kondicional s neistinitim antecedentom istinit. Istina se istinosno-funkcionalnog kondicionala potpuno određuje u odnosu na to jesu li antecedent i konsekvens istiniti ili neistiniti. Razmotrimo (a). Radi se o kondicionalu čiji su antecedent i konsekvens istiniti. Budući da je (a) istinito, *svaki* je kondicional čiji su antecedent i konsekvens neistiniti istinit. Sada razmotrimo (c). Radi se o kondicionalu čiji je antecedent neistinit, a konsekvens istinit. Budući da je istinit, istinit je *svaki* kondicional kojem je antecedent neistinit, a konsekvens istinit.

Zbog toga što Fregeova analiza zahtijeva da i (a) i (c) budu istiniti – te budući da njegova logika zahtijeva da se istina kondicionala potpuno odredi istinitošću ili neistinitošću antecedenta i konsekvensa – svaki je kondicional s neistinitim antecedentom istinit. Štoviše, budući da (b) ima istinit antecedent i istinit konsekvens, istinit je svaki kondicional čiji su antecedent i konsekvens istiniti. Znači, moramo shvatiti da kondicional isključuje *samo* jednu od četiri mogućnosti: slučaj u kojem je antecedent istinit, a konsekvens neistinit.

U Begriffsschriftu kondicionali prethodno prikazuju antecedent-izraz i konsekvens-izraz crtom sadržaja, te crtu sadržaja povezuju s vertikalnom crtom koju Frege naziva „crta uvjetovanosti“. Kako je Fregeove stvarne simbole teško ispisati i čitati, ja ću nadalje koristiti suvremene simbole. Jedan je od suvremenih simbola za kondicional strelica. Primjerice, možemo pisati:

1 je kubni korijen od 8 → 1 je kvadratni korijen od 4.

Uvodeći crtu uvjetovanosti, Frege neformalno uvodi *Modus Ponens* kao pravilo zaključivanja napominjući da takvo objašnjenje pokazuje da iz dva suda B i B→A slijedi novi sud A.

Fregeov je drugi simbol za propozicionalnu složenost crta negacije. Crta se negacije koristi za izražavanje negiranja stava. Ja ću upotrebljavati simbol „~“ umjesto Fregeove crte negacije. Zamislimo da je „-2 je kubni korijen od 8“ izraz Begriffsschrifta, tad bi tvrdnju da -2 *nije* kubni korijen od 8 prikazali na sljedeći način:

~ (-2 je kubni korijen od 8).

Kondicional i negacija su jedini propozicionalni veznici za koje Frege ima simbole. Većina današnjih sustava propozicionalne logike također koristi simbole i za druge propozicionalne veznike. Primjerice, u većini propozicionalnih sustava postoji poseban simbol za izražavanje konjukcije dviju propozicija (*A* i *B*). Međutim, Fregeova su dva simbola dovoljna da izraze svu propozicionalnu složenost. Primjerice, konjukcija se od *A* i *B* može izraziti samo primjenom strelice i znaka „~“, i to na sljedeći način:

~ (A → ~B).

Da bismo to razumjeli, prisjetimo se da kondicional isključuje samo jednu mogućnost – i to da je antecedent istinit, a konsekvens neistinit.

Dakle,

A → ~B

isključuje mogućnost da je A istinit, a ~ B neistinit ili, drugim riječima, da su A i B istiniti. Stoga je negacija takva kondicionala istinita samo u slučaju da su i A i B istiniti. Iako se Frege ograničava na simbole za kondicional i negaciju, ponekad ću od toga odstupiti, iz praktičnih razloga, i koristiti suvremeni simbol za konjukciju „&“.

Znak za identitet/trocrtovlje

Sljedeći je simbol koji Frege uvodi njegov znak za identitet - tri crte. Iako ću koristiti znak „=“ umjesto Fregeove tri crte, važno je shvatiti kako je Fregeov pojam identiteta nepoznat. Počnimo s poznatim pojmom. U aritmetici znak identiteta stavljamo između imena brojeva. Imena brojeva mogu biti jednostavno brojke (primjerice, „1“, „2“, itd.) ili stavci (primjerice, „2x (3+5)“). Razmotrimo sljedeću tvrdnju:

2 x (3+5) = 4 x 4.

Što nam takva tvrdnja pokazuje? Fregeov je odgovor u *Begriffsschriftu* kako nam takva tvrdnja pokazuje da dva znaka „2 x

(3+5)“ i „4 x 4“ imaju isti sadržaj. Iako možemo pretpostaviti da je odmah jasno kad dva znaka imaju isti sadržaj, nakon kraćeg ćemo razmišljanja vidjeti da pri dovoljno složenim izračunima nije jasno jesu li dva znaka znakovi istog broja. Svakom se takvu znaku pripisuje drukčiji način određivanja odabira broja. Ali, možda je poučno otkriti da nas dva načina određivanja nekog broja vode istom rezultatu. Frege opisuje sadržaj od „A = B“ na sljedeći način:

Znak A i znak B imaju isti pojmovni sadržaj, tako da svagdje za B možemo staviti A i obratno. (*Begriffsschrift*, § 8).

Možda je na prvi pogled nejasno postojanje razlika između Fregeove i naše primjene znaka identiteta. No sada razmotrimo Fregeovu tvrdnju da njegov znak identiteta izražava identitet sadržaja između znakova. Premda Frege razlikuje rečenične izraze od nerečeničnih izraza (u stvari, crta se sadržaja može staviti kao prefiks samo za rečenične izraze), svi izrazi Begriffsschrifta imaju pojmovni sadržaj. Stoga se Fregeov znak identiteta može pojaviti ne samo među imenima brojeva i sličnih izraza nego i među rečeničnim izrazima. Zamislimo da su „Hidrogen je lakši od ugljičnog dioksida.“ i „Ugljični dioksid je teži od hidrogena.“ rečenice Begriffsschrifta, rečenica bi se u Begriffsschriftu prikazala na sljedeći način:

(Hidrogen je lakši od ugljičnog dioksida) = (Ugljični dioksid je teži od hidrogena)

Premda je Frege svoj stav o znaku identiteta mijenjalo tijekom karijere, nikad nije odbio koristiti znak identiteta. U njegovim se radovima znak identiteta pojavljuje ne samo između dva imena, nego također i između dva rečenična izraza. Da bismo shvatili zašto je to tako, konačno se trebamo vratiti ključnom mjestu Fregeova odstupanja od Aristotelove logike: njegovu odbacivanju subjektno-predikatne analize kao osnove za izražavanje pojmovnog sadržaja stavaka.

Analiza funkcija-argument

Fregeova se Begriffsschrift analiza temelji na mišljenju da su najjednostavnije tvrdnje funkcija-argument oblika, a ne subjektno-predikatnog oblika. Pojmovi se funkcija i argument isprva javljaju u matematici. Stoga, radi samog razumijevanja, moramo te matematičke pojmove istražiti. Pođimo od toga što je funkcija? Jedan je od odgovora taj da je funkcija neka vrsta operacije ili procesa transformacije. Za neki određeni predmet (koji nazivamo „argument“) funkcija dobiva vrijednost – neki drugi, ili možda isti, predmet. Neposredni sljedbenik određenog broja možemo smatrati vrijednošću neke funkcije – funkcija neposrednog sljedbenika – tog broja. Uzmemo li broj 1 kao argument, funkcija neposrednog sljedbenika kao vrijednost dobiva broj 2; uzmemo li broj 2 kao argument, funkcija neposrednog sljedbenika kao vrijednost dobiva broj 3, itd. Budući da svaki prirodni broj ima jedinstven neposredni sljedbenik, funkcija može prihvatiti bilo koji prirodni broj kao argument.

Funkcija se neposrednog sljedbenika naziva "jednomjesnom" funkcijom jer prihvaća samo jedan predmet kao argument. Dok druge poznate funkcije prihvaćaju više argumenata. Funkcija zbrajanja prihvaća dva broja kao argumente, a kao vrijednosti dobiva njihov zbroj. Primjerice, uzmemo li da su brojevi 1 i 2 argumenti, funkcija zbrajanja kao vrijednost dobiva broj 3. Funkciju možemo smatrati nečim što ima prazna mjesta (mjesta za argument) koja možemo ispuniti većim brojem argumenata. No, samo onda kad se prazna mjesta funkcije ispune argumentima, dobivamo vrijednost.

U matematičkom smislu, mi iznosimo opće tvrdnje o funkcijama upotrebljavajući složene simbole koji pokazuju gdje su mjesta argumenta. Mi koristimo stavke „x+y" za funkciju zbrajanja i „x+1" za funkciju neposrednog sljedbenika. Slova se tih izraza nazivaju „varijable" i pokazuju mjesta argumenata. Ako u izrazu „x+y", „x" i „y" zamijenimo imenima brojeva, rezultat je izraza ime vrijednosti koju funkcija zbrajanja dobiva za imenovane brojeve. Izraz „2+3" je ime broja: vrijednost se funkcije zbrajanja dobiva kad se funkcija primjenjuje za argumente 2 i 3.

Kako matematički pojmovi funkcije i argumenta čine temelj logičkog jezika? Vratimo se jednoj od ranije razmatranih rečenica:

Hidrogen je lakši od ugljičnog dioksida.

Sa stanovišta Aristotelove logike, te s gledišta gramatike prirodnog jezika, rečenicu bismo trebali shvatiti kao rečenicu subjektno-predikatnog oblika. Njezin je subjekt „hidrogen", a predikat „je lakši od ugljičnog dioksida". Međutim, vrijedno je naglasiti kako se pojavljuje nešto sumnjivo u vezi s Aristotelovom analizom. Smatramo da je subjekt rečenice ono o čemu ta rečenica govori. Ipak, ako je subjekt rečenice „hidrogen", rečenica ništa manje ne govori o ugljičnom dioksidu nego o hidrogenu. Štoviše, prema Fregeovoj analizi, subjekt i predikat ne postoje.

Umjesto da istražuje gramatičku strukturu svake rečenice, Frege od čitatelja traži da razmotri zamjenu riječi „hidrogen" u prvoj rečenici različitim drugim riječima, primjerice, „kisik" i „nitrogen". Znači, Frege od nas traži da razmislimo o hidrogenu, kisiku i nitrogenu kao o argumentima funkcije: _____ *je lakši od ugljičnog dioksida*.

Odnosno, vrijednosti su funkcije tih argumenata pojmovni sadržaji tvrdnji:

Hidrogen je lakši od ugljičnog dioksida.

Kisik je lakši od ugljičnog dioksida.

i

Nitrogen je lakši od ugljičnog dioksida.

Kao što smo vidjeli, Frege navodi da rečenica

Ugljični dioksid je teži od hidrogena

izražava istu tvrdnju kao i prva rečenica. Možda smo skloni analizirati tu tvrdnju kao vrijednost funkcije: _____ *je teži od hidrogena* za ugljični dioksid kao argument.

Za sad se čini kako ne postoji bitna razlika između Fregeove i Aristotelove analize. Najzad, svaka od navedenih rečenica ima sasma dobar Aristotelov predikat, ili „_____ je teži od hidrogena“ ili „_____ je lakši od ugljičnog dioksida“. Svaka ima i sasma dobar subjekt „kisik“, „hidrogen“, „nitrogen“ ili „ugljični dioksid“. Ali, prema funkcija-argument analizi o tvrdnjama, postoji još jedna strategija razmatranja takve tvrdnje – strategija kojom izbjegavamo Aristotelovom analizom nametnuti izbor. Uzmimo da su ugljični dioksid i hidrogen argumenti dvomjesne funkcije: ... *je lakši od* ___. Prema takvoj analizi ne postoji subjekt – tvrdnja je o ugljičnom dioksidu isto toliko koliko i o hidrogenu. Ne postoji predikat – umjesto predikata imamo funkciju koja nam daje potpunu tvrdnju kad se nadopuni argumentima koji stupaju na njezina dva mjesta praznog prostora. Funkcija se može shvatiti i kao dvomjesna relacija: relacija koja vrijedi između dva predmeta, kad je prvi lakši od drugog.

Izgleda da takva analiza objašnjava više o složenosti tvrdnje o kojoj govorimo nego o Aristotelovoj regimentaciji. Zapravo, uvođenje dvomjesnih funkcija kao elemenata pojmovnih sadržaja omogućava Fregeu izraziti svojevrsnu složenost potrebnu da pokaže kako se opće istine o nizovima mogu izvesti samo primjenom logike. Jer, kako sad vidimo, opće su istine o nizovima ovisne o karakteristikama dvomjesnih relacija.

Ranije smo vidjeli da Fregeovo uvjerenje o tomu da su aritmetičke istine analitičke djelomično proizlazi iz uvjerenja o tomu da je matematička indukcija primjena općih istina o nizovima. Brojni se niz sastoji od 1, neposrednog sljedbenika od 1 (znači, 2), neposrednog sljedbenika od 2 (znači, 3), itd. Jedna je od karakteristika takva niza ta da je određen dvomjesnom relacijom, relacijom koja vrijedi između dvaju brojeva, kad je drugi broj (možda ne neposredno) sljedbenik prvog. Ili, da upotrijebimo poznatiji izraz, niz je određen relacijom manje-od.

Broj je jedan najmanji u nizu: 1 je manje od 2, 1 je manje od 3, 2 je manje od 3, itd. Jedan je od načina opisivanja strukture niza opisati relaciju manje-od koja određuje sam niz. Primjerice, postoji najmanji član niza (član manji od svakog drugog člana), a za svaki član niza postoji i veći član niza. Tako, proširenje niza za ishod ima uvećanje broja. Znači, za svaka tri člana niza, recimo *x*, *y*, i *z*, ako je *x* manje od *y*, a *y* manje od *z*, onda je *x* manje od *z*. Te se karakteristike brojevnog niza, određene relacijom manje-od, mogu izraziti primjenom Begriffsschrifta, ali ne i primjenom Aristotelove regimentacije/ustrojavanja.

Problem sa subjektno - predikatnom analizom

Premda bi nas daleko odvelo točno istražiti nedostatnosti Aristotelove regimentacije/ustrojavanja, jednostavno je općenito sagledati problem. Razmotrimo jednu karakteristiku relacije manje-od, činjenicu da proširenje niza rezultira uvećanjem broja – znači, za bilo koji član niza *x*, *y*, i *z*, ako je *x* manje od *y*, a *y* manje od *z*, onda je *x* manje od *z*. U sljedećih ću nekoliko paragrafa ovu prilično dugu tvrdnju skratiti rekavši da je odnos manje-od tranzitivan. Uzevši da je relacija manje-od tranzitivna – i uzevši da je 1 manje od 2, a 2 manje od 3 – možemo zaključiti da je 1 manje od 3. Znači, naša bi logička notacija trebala biti dovoljno učinkovita da pokaže kako su karakteristike sljedećeg argumenta valjane:

1 je manje od 2
2 je manje od 3.
Relacija manje-od je tranzitivna.
Dakle, 1 je manje od 3.

Jasno je da će se pojaviti stanovite poteškoće pri prikazu oblika treće premise, tvrdnje o tranzitivnosti. Međutim, čak i da pozornost usmjerimo na prve dvije premise i konkluziju, Aristotelova analiza ne može obuhvatiti sav sadržaj bitan za zaključak. Jasno je da bi prve dvije premise i konkluzija trebale imati subjektno-predikatni oblik. Zaista, na prvi pogled može izgledati jasno kako započeti s našim prijevodom. Čini se kako konkluzija i dvije premise imaju zajednički predikat (*je manji od 3*). U svakoj od spomenutih tvrdnji nešto (u jednom slučaju 2, u drugom 1) navodno ima to svojstvo. Budući da nastojimo pokazati oblik svake tvrdnje, zajednički ćemo im predikat zamijeniti slovom. Upotrijebimo slovo „*P*“ za prikaz predikata. Kako ćemo sada prikazati prvu premisu? S obzirom na naša ranija rješenja, čini se da je njezin subjekt 1, a predikat *je manje od* 2. Budući da nemamo simbol za takav predikat, uvest ćemo novi: *R*. Za sada nam je prikaz ovakav:

1 je *R*

2 je *P.*

Relacija manje-od je tranzitivna.

Dakle, 1 je *P.*

Trebali bismo shvatiti kako je nešto krenulo po zlu. Jer, svrha je logičke regimentacije/ustrojavanja prikazati one karakteristike argumenta koje će nas navesti da povjerujemo kako je argument valjan. Dogodilo se u navedenom nastojanju logičke regimentacije/ustrojavanja našeg argumenta da se dio sadržaja bitnog za njegovo vrednovanje izgubio. Primjerice, u prvoj premisi prikaz oblika prikriva činjenicu da nam tvrdnja objašnjava nešto o 2. No, zaključak je i dalje djelomično valjan zbog činjenice da nam obje prve premise objašnjavaju nešto o 2.

Naravno, to je moguće ispraviti. Smatramo li da prva premisa tvrdi nešto o broju 2, broj 2 možemo smatrati subjektom, a *je veći od* 1 predikatom. Prema tome, trebamo uvesti novo predikatno slovo, recimo „*S*“. Sad je naš prikaz ovakav:

2 je *S*

2 je *P.*

Relacija manji-od je tranzitivna.

Dakle, 1 je *P.*

Ali ni takvo regimentiranje/ustrojavanje ne zadovoljava. Naime, sad smo izostavili nešto drugo bitno za naše vrednovanje zaključka: prva nam premisa objašnjava nešto o 1. Problem je u tomu što je naša prva premisa i o 1 i o 2. Ni 1 ni 2 ne mogu biti predikati, ali Aristotelovo regimentiranje/ustrojavanje od nas traži izabrati samo jedan subjekt – 1 i 2 ne mogu *oba* biti subjekti prve premise.

Sad smo u mogućnosti shvatiti prednosti Fregeova odbacivanja subjektno-predikatnog regimentiranja/ustrojavanja na uštrb regimentiranja/ustrojavanja funkcija-argument. Uvođenje dvomjesne funkcije kao sastavnog dijela pojmovnog sadržaja omogućava nam prikazati prvu premisu koja kao svoje sastavne dijelove ima i 1 i 2. Sastavni su dijelovi prve premise, primjenom Fregeova regimentiranja/ustrojavanja, 1, 2 i dvomjesna funkcija: _____ *je manje od* ... Takva nam vrsta regimentiranja/ustrojavanja dopušta shvatiti kako je prva premisa o 1 i 2; da je druga premisa o 2 i 3 te da je konkluzija o 1 i 3. Također nam dopušta shvatiti da postoji sastavni dio koji je zajednički svim trima tvrdnjama: relacija manje-od. Koristeći veliko slovo „*L*“, u cilju prikaza funkcije, sada smo u mogućnosti argument prikazati na sljedeći način:

L (1, 2)
L (2, 3).
Relacija manje-od (L) je tranzitivna.
Dakle, *L* (1,3).
No, što je s posljednjom premisom?

Posljednja je premisa kratica za složenu tvrdnju te je za pojašnjenje strukture takve složene tvrdnje korisno primijeniti matematički simbol „<" kao kraticu za „je manje od". Prema tome, reći da je relacija manje-od tranzitivna, isto je što i reći: za sve članove niza prirodnih bojeva, recimo x, y, i z, ako je $x < y$, a $y < z$, onda je $x < z$. Može li Fregeova notacija izraziti pozitivni sadržaj tvrdnje? To jest, može li Fregeova notacija izraziti sav sadržaj tvrdnje bitan za zaključak? Razmotrimo što možemo zaključiti iz takve premise. Za razliku od drugih tvrdnji, od kojih je svaka o određenom paru brojeva, posljednja je premisa opća tvrdnja. Ona nam pokazuje da je bez obzira na to što su x, y i z, ako je $x < y$, a $y < z$, onda je $x < z$. Stoga su, među tvrdnjama koje možemo izvesti iz općih tvrdnji, ove:

Ako je $1 < 2$, a $2 < 3$, onda je $1 < 3$.
Ako je $2 < 1$, a $1 < 3$, onda je $2 < 3$.
Ako je $4 < 3$, a $3 < 1$, onda je $4 < 1$.

Popis bi tvrdnji trebao izgledati poznato jer to nije jedina opća tvrdnja koju smo razmatrali u ovom poglavlju. Druga je takva tvrdnja da je svaki kubni korijen iz 8 kvadratni korijen iz 4, a njezine su konzekvencije:

Ako je 1 kubni korijen od 8, onda je 1 kvadratni korijen od 4.
Ako je 2 kubni korijen od 8, onda je 2 kvadratni korijen od 4.
Ako je -2 kubni korijen od 8, onda je -2 kvadratni korijen od 4.

Značenje je tvrdnje to da bez obzira na to što smatramo njezinim argumentom, funkcija *ako je x kubni korijen od 8, onda je x kvadratni korijen od 4*, iznosi istinu ili je – da primijenim Fregeov izraz iz *Begriffsschrift*a, činjenica.

Notacija koja rabi kvantifikator

Da bi izrazio općenitost u Begriffsschriftu, Frege uvodi notaciju koja rabi kvantifikator. Da bismo razumjeli kako notacija funkcionira, počnimo s izražavanjem opće tvrdnje na formalnom hrvatskom:

Odaberite što želite, nazovite to „*x*", ako je *x* kubni korijen od 8, onda je *x* kvadratni korijen od 4.

Ili:

Za svako *x*, ako je *x* kubni korijen od 8, onda je *x* kvadratni korijen od 4.

Izraz kojim počinje rečenica („za svako *x*“) je kvantifikatorski izraz. Mjesta na kojima se u preostalom dijelu rečenice pojavljuje „x“, mjesta su koja može zauzeti bilo koje ime broja. No, „x“ je varijabla, a ne ime broja. Za razliku od „1“, „x“ se ne koristi za govor o određenom predmetu, nego se koristi u kombinaciji s nekim kvantifikatorom kako bi izrazio općenitost. Naše razumijevanje pojavljivanja varijable „x“ u rečenici je vezano s kvantifikatorskim izrazom s kojim počinje rečenica. U tom slučaju kažemo da su sve pojave varijable „x“ u rečenici vezane kvantifikatorski izrazom, ili da kvantifikatorski izraz obuhvaća cijelu rečenicu. Frege notaciju uvodi u svoj logički jezik kako bi zamijenio formalni prirodni jezik kvantifikatorskim izrazom „za svako *x*“. Još jednom, iz praktičnih ću razloga koristiti suvremenu notaciju, „(*x*)“, umjesto Fregeove notacije. Na trenutak zamislimo da su izrazi „kubni korijen od 8“ i „kvadratni korijen od 4“ izrazi Begriffsschrifta, tada bi prijevod naše opće tvrdnje glasio:

(*x*) (*x* je kubni korijen od 8 → *x* je kvadratni korijen od 4).

Fregeova tehnika za izražavanje općenitosti ima dvije bitne karakteristike. Jedna je od karakteristika primjena varijabli. Uzimajući u obzir ono što izražavamo kad kažemo da je relacija manje od tranzitivna, lako je uvidjeti koliko su varijable korisne. Tvrdnja bi se, bez primjene varijabli, mogla izraziti na sljedeći način:

Za svake tri stvari, ako je prva manja od druge, a druga manja od treće, onda je prva manja od treće.

Međutim, tvrdnja nam je mnogo jasnija ako se izrazi primjenom varijabli:

Za svako *x*, *y*, i *z*, ako je $x < y$, a $y < z$, onda je $x < z$.

Druga je bitna karakteristika Fregeove tehnike izražavanja općenitosti njegova uporaba kvantifikatora koji ukazuju na područja općenitosti. Iako svaki od kvantifikatora koje smo vidjeli do sada ima cijelu rečenicu u svojemu području, to nije jedini način primjene kvantifikatora. Da bi mogao izraziti pojmovni sadržaj matematičkih zaključaka, Frege također mora primijeniti kvantifikatore koji imaju samo dio rečenice u svojemu području. Najlakše je zapaziti važnost označavanja područja kvantifikatora uzevši matematički primjer. Razmotrimo dvije sljedeće rečenice:

Sve je ili zeleno ili nije zeleno.

i

Sve je zeleno ili sve nije zeleno.

Nedvojbeno je da je prva rečenica istinita, dok je jasno da je druga neistinita. Na razliku se jasno ukazuje primjenom hrvatske kvantificirajuće riječi „sve“. Dok je u prvoj rečenici područje te riječi cijela rečenica, u drugoj su rečenici dvije kvantificirajuće riječi od kojih svaka ima samo dio rečenice kao svoje područje. Fregeova nam kvantifikatorska notacija omogućava prikazati razliku na sljedeći način:

(x) (x je zeleno ili x nije zeleno)

i

(x) (x je zeleno) ili (x) (x nije zeleno).

Također postoji i druga vrsta kvantificirane tvrdnje koju moramo izraziti u logičkoj notaciji. Nju nazivamo „egzistencijalna“ tvrdnja. Uzmimo sljedeći primjer: postoji broj koji je < 2. Danas je uobičajeno uvesti posebnu kvantifikatorsku notaciju za takvu tvrdnju. Pisat ćete: ($\exists x$) (x je broj koji je < 2). Međutim, nije nužno uvoditi neku posebnu notaciju za egzistencijalni kvantifikator. Jer, reći da postoji nešto što ima određeno svojstvo, znači jednostavno odbaciti da svemu nedostaje takvo svojstvo. Tako bi se naš primjer mogao izraziti samo primjenom Fregeova univerzalnog kvantifikatora, i to na sljedeći način:

$\sim$(x) $\sim$ (x je broj koji je < 2).

Ovim se upotpunjava naš prikaz Fregeove logičke notacije i njezina prikaza pojmovnog sadržaja. Fregeu nije potrebna samo logička notacija nego i tehnika za vrednovanje zaključaka. Uz notaciju, njegova logika obuhvaća i popis osnovnih logičkih zakona i pravila koja omogućavaju izvođenje jedne tvrdnje iz druge tvrdnje, znači, pravilo zaključivanja. U prvom dijelu *Begriffsschrifta* Frege iznosi popis osnovnih logičkih zakona i pravilo zaključivanja iz kojeg se, kako vjeruje, mogu izvesti sve istine logike. Uvođenje njegove logike prati širok prikaz onoga što logika može učiniti. Svi zaključci koji se mogu pokazati kao valjani, primjenom Aristotelove ili propozicionalne logike, također se mogu pokazati valjanima i primjenom Fregeove nove logike. Znači kad se premise i konkluzija izraze u Begriffsschriftu, tada je moguće konkluziju izvesti iz premisa samo uz primjenu Fregeovih zakona i pravila zaključivanja. U drugom dijelu Begriffsschrifta Frege pokazuje kako u svojoj logici izvesti tako brojne zaključke.

Ali rezultati se Fregeove logike ne ograničavaju na rezultate Aristotelove i propozicionalne logike. Treći je dio *Begriffsschrifta* posvećen izvođenjima argumenata koji pripadaju općoj teoriji niza. Kako vidjesmo pri kraju drugog poglavlja, postoje argumenti o nizovima koji, čini se, predstavljaju problem za Aristotelovu logiku. Čini se da ovise samo o analizi pojmova – zapravo čini se da za svoje opravdanje ne zahtijevaju pozivanja na dokaz osjetila ili na istine o prostornim odnosima. Stoga bi mogli biti logički valjani. No i dalje se ne mogu identificirati kao valjani primjenom Aristotelove logike. Jedan takav primjer jest sljedeći :

Ana je izravni potomak Charlesa.

Ana ima smeđe oči.

Sva djeca osoba smeđih očiju imaju smeđe oči.

Dakle, Charles ima smeđe oči.

Treća nam premisa pokazuje da je svojstvo smeđih očiju nasljedno u tom nizu potomaka. Fregeu njegova notacija dozvoljava izraziti pojmovni sadržaj općom tvrdnjom da je svojstvo, recimo *P*, nasljedno u nizu potomaka, recimo za relaciju *f*. Reći da je *P* nasljedno u *f*-nizu je isto što i reći da:

$(x)\ [P\ (x) \rightarrow (y)\ (f\ (x, y) \rightarrow P\ (y))]$.

Ili, na formalnom hrvatskom:

Za svaki predmet koji ima svojstvo *P*, svi neposredni nasljednici tog predmeta imaju *P.*

Ako smatramo da „$f\ (x, y)$" izražava tvrdnju da je *x* roditelj od *y*, a da „$P\ (x)$" izražava tvrdnju da *x* ima smeđe oči, onda prikazani izraz izražava našu treću premisu. Među propozicijama koje Frege dokazuje u trećem dijelu Begriffsschrifta je i propozicija 81, koja nam omogućava izvesti konkluziju gore navedenog argumenta iz njegovih premisa.

Matematička indukcija kao logički princip

U navedenom se argumentu radi o bitnom rezultatu. Jer, kako vidjesmo, argumenti s nizovima potomaka, što je slučaj i u navedenom argumentu, imaju posebnu relaciju s određenim argumentima koji su izgleda, i prije Fregeova rada, bili svojstveni domeni aritmetike: argumenti koji primjenjuju princip matematičke indukcije. Vjerojatno možemo pretpostaviti kako je matematička indukcija zakon omogućen samom prirodom brojeva. Ali ga također možemo protumačiti i kao poseban slučaj općeg zakona o nizovima. Naime, matematička nam indukcija pokazuje, pod pretpostavkom da možemo pokazati kako svojstvo vrijedi za 1 i da je nasljedno u nizu prirodnih brojeva, da svojstvo vrijedi za sve prirodne brojeve. Znači, ako svojstvo vrijedi za broj 1 i ako je nasljednik u nizu neposrednog sljedbenika, onda vrijedi i za sve članove tog niza. Stoga je jedan od Fregeovih ciljeva bio pokazati da se samo primjenom logike može pokazati valjanost određenih zaključaka o nasljednim svojstvima u nizu potomaka. Frege je to postigao u trećem dijelu *Begriffsschrift*a.

Na taj način, Frege pokazuje da se princip matematičke indukcije može opravdati bez pozivanja na prirodu neke posebne domene. To se može dokazati primjenom same logike. To je bitan iskorak u Fregeovu projektu. Ali, i dalje se radi samo o početnom koraku. Fregeov je cilj pokazati kako se sve aritmetičke istine mogu izvesti iz same logike. Stoga, također mora pokazati da konkluzije koje izvodimo primjenom matematičke indukcije zahtijevaju samo definicije i logičke zakone.

Da bismo vidjeli što je uz to potrebno, razmotrimo navedeni argument da Charles ima smeđe oči. Taj je argument ovisan o činjenicama o Charlesu, Ani i određenom nizu potomaka, Anom i njezinim potomcima. Želimo li utvrditi da Charles ima smeđe oči, trebat ćemo utvrditi sve premise argumenta: da Ana ima smeđe oči, da Charles slijedi Anu u nizu potomaka te da je svojstvo smeđih očiju nasljedno u nizu potomaka o kojem govorimo. Slično tomu, dokaz u kojem se primjenjuje princip matematičke indukcije ovisit će ne samo o tom principu nego i o tvrdnjama da 1 ima navedeno svojstvo i da je to svojstvo nasljedno u nizu prirodnih brojeva. Frege također mora pokazati kako se takve tvrdnje – da 1 ima određeno svojstvo i da je svojstvo nasljedno u nizu prirodnih brojeva – mogu izvesti samo primjenom definicija i logičkih zakona. Iz tog su mu razloga potrebne definicije broja 1 i pojma broja.

Prijevod: Igor Žontar