ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.4 (2021) 73–87
Zaprimljen: 12. lipnja 2021.
Prihvaćen: 22. lipnja 2021.

Dudeneyjev Haberdasherov problem

Milka Grubić, Nives Baranović

Sažetak

U radu se obrađuje jedan stari, ali još uvijek aktualni, problem dijeljenja jednakostraničnog trokuta na najmanji broj dijelova tako da se preslagivanjem nastalih dijelova, bez preokretanja, može oblikovati kvadrat. Problem je poznat pod nazivom *Haberdasherov problem*, ali unatoč brojnim pokušajima, jedino do danas poznato valjano rješenje dao je engleski matematičar Dudeney još 1903. godine.

Uz opis konstrukcije i opravdanja valjanosti Dudeneyjeva rješenja, posebno se razmatra jedno rješenje koje se pokazalo pogrešnim, a zapravo se radi samo o dobroj aproksimaciji kvadrata. Također, razmatra se klasa rješenja dijeljenja trokuta na dijelove koji se daju oblikovati u pravokutnik među kojima je i jedan kvadrat.

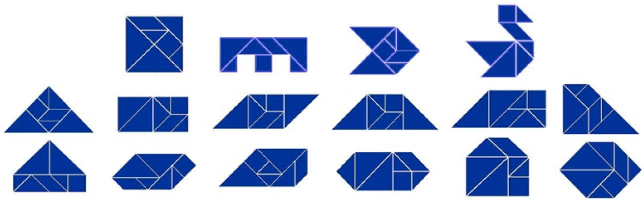
Konačno, navode se i razlozi zašto su ovakvi i slični problemi korisni i prikladni za korištenje na svim razinama obrazovanja.

Ključni pojmovi: disekcija mnogokuta, geometrijska konstrukcija, geometrijski dokaz, vizualni dokaz

1. Geometrijska disekcija

Prema Fredericksonu, geometrijska disekcija podrazumijeva dijeljenje geometrijskog lika na konačan broj dijelova tako da se oni mogu presložiti u neki drugi geometrijski lik ([3]).

Problemi geometrijske disekcije mogu se podijeliti u dvije grupe. Prva grupa obuhvaća dijeljenje geometrijskog lika na dijelove s namjerom da se od nastalih dijelova može oblikovati veći broj drugih geometrijskih likova. Primjer takve vrste disekcije jest slagalica *tangram* koja se koristi više od 200 godina u različite svrhe. *Tangram* je nastao dijeljenjem kvadrata na sedam dijelova od kojih se zatim može oblikovati još 12 različitih konveksnih likova (slika 1), ali i na tisuće raznih drugih oblika ([5]).



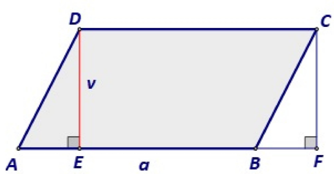
Slika 1. Tangram likovi.

Druga grupa obuhvaća samo dva geometrijska lika pri čemu je potrebno pronaći podjelu jednog lika s namjerom da se preslagivanjem tih dijelova oblikuje drugi lik, odnosno traži se jednaki rastav dvaju geometrijskih likova. Kada su dva lika jednako rastavljiva za njih se još kaže da su ekvivalentni po disekciji. Prema Bolyai i Gerwien, dva lika su ekvivalentna po disekciji ako i samo ako su jednakih površina ([4, str. 215]). Primjeri takvih disekcija koriste se u nastavi geometrije, najčešće u svrhu određivanja površine jednog lika poznavanjem površine drugog lika ili u svrhu rješavanja problema primjenom metode površine.

Tako se, na primjer, svaki paralelogram može presložiti u pravokutnik, pa se formula za površinu paralelograma izvodi preko formule za površinu pravokutnika (slika 2).

S obzirom da su trokuti $\triangle AED$ i $\triangle BFC$ sa slike sukladni po poučku $SSK^{>}$, paralelogram $ABCD$ i pravokutnik $EFCD$ jednakih su površina pa vrijedi:

$$P_{ABCD} = P_{AED} + P_{EBCD} = P_{BFC} + P_{EBCD} = P_{EFCD} = a \cdot v$$



Slika 2. Reorganiziranje paralelograma u pravokutnik.

Jedan posebno istaknut primjer druge grupe disekcije podjela je jednakostraničnog trokuta na četiri dijela od kojih se može oblikovati kvadrat, poznat pod nazivom *Haberdasherov problem*, čime se dalje bavimo u ovom radu.

2. Nastanak i razvoj *Haberdasherova problema*

Povijest geometrijske disekcije izrazito je bogata, a proteže se od vremena starogrčkih matematičara Platona i Pitagore pa sve do današnjih dana. Geometrijska disekcija posebno zaokuplja rekreativce, među kojima su i amateri i profesionalni matematičari. Iako se pokazalo da amateri mogu otkriti vrlo zanimljive disekcije, oni ipak ne mogu bez matematičara utvrditi njihovu valjanost. Tako se geometrijska disekcija posebno popularizira kroz rekreacijsku matematiku, a nerijetko je sastavni dio kolumni raznih novina i časopisa.

Amerikanac Sam Loyd i Britanac Henry Ernest Dudeney dva su istaknuta imena koja su matematiku popularizirala kroz razne časopise, a njihova je posebnost u tome što su pri postavljanju zagonetki i problema s geometrijskim disekcijama zahtijevali rješenja s najmanjim brojem dijelova. Među njima posebno se ističe zagonetka koja govori o galanteristu (*Haberdasher*) koji izaziva društvo postavljanjem problema rezanja materijala oblika savršenog jednakostraničnog trokuta na četiri dijela koja će se potom, bez preokretanja, moći presložiti u kvadrat (slika 3).

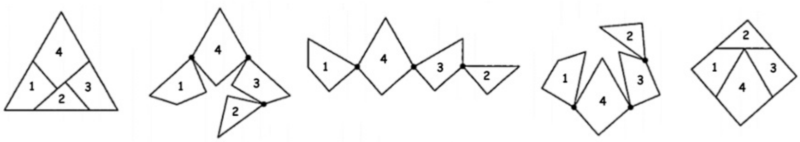
Zagonetku je postavio Dudeney još davne 1902. godine najprije u *The Weekly Dispatch* časopisu, a poslije i u svojoj zbirci slagalica *The Canterbury Puzzles* ([2, str. 50]). Tako je zagonetka postala poznata pod imenom *Dudeneyjev Haberdasherov problem*. Dudeneyjev originalni problem glasi: *Koristeći se s tri reza podijelite jednakostranični trokut na četiri dijela, tako da se njihovim preslagivanjem može oblikovati kvadrat, bez preokretanja dijelova.*

Slika 3. Izvorna ilustracija Haberdasherova problema.[1]

[1]Ilustracija preuzeta iz Dudeneyjeve zbirke *The Canterbury Puzzles*, 1919 (vidjeti [2]).

Iako naizgled jednostavan, ovaj je nimalo lagan geometrijski problem kod mnogih matematičara i matematičkih rekreativaca pobudio značajan interes od prvog objavljivanja. U prilog tome govori i činjenica da je zagonetka, nakon prvog objavljivanja 1902. u *The Weekly Dispatch* časopisu, ponovno objavljena u *Daily Mail* časopisu 1905. (izdanja od 1. i 8. veljače), a zatim u mnogim knjigama rekreacijske matematike. Posebno, Dudeney u svojoj knjizi *The Canterbury Puzzles* pridaje zasluge gospodinu Charlesu W. McElroyju koji je jedini ponudio točno rješenje među stotinama drugih koji su pristizali ([2, str. 180]). Uočavajući teškoću problema, kako ne bi poljuljao vjeru čitatelja u mogućnost pronalaska točnoga rješenja, Dudeney je na samome kraju zagonetke stavio da četverodijelno rješenje zaista postoji, a svoje rješenje je ponudio tek nakon godinu dana prikupljanja netočnih rješenja ([3, str. 131–132]).

Osim rješenja opisanog geometrijskom konstrukcijom, Dudeney je 1905. godine pred Kraljevsko društvo predstavio i svoj zglobno rasklopni model (slika 4) izrađen od mahagonija čime je dodatno potaknuo interes za istraživanjem geometrijskih disekcija i izradom odgovarajućih rasklopnih modela.



Slika 4. Dudeneyjev zglobno rasklopni model.

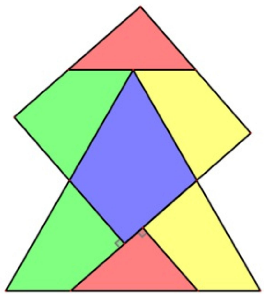
Interes za *Dudeneyjev Haberdasherov problem* traje sve do danas. Naime, mnogi svjetski matematičari uvrstili su ga i obradili u svojim matematičkim zbirkama kao i brojnim drugim knjigama za popularizaciju matematike. Tako ga Martin Gardner uvrštava u knjigu *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Ian Stewart u *The Problems of Mathematics*, David Wells u *The Penguin Dictionary of Curios and Interesting Geometry*, Greg N. Frederickson u *Hinged Dissections: Swinging and Twisting*, Hugo Steinhous u *Mathematical Snapshots*, a to su samo neki koji su se u svojim knjigama dotaknuli ovoga problema.

I hrvatski matematičar te autor brojnih matematičkih udžbenika i knjiga za popularizaciju matematike, Branimir Dakić, u jednom od svojih djela, u knjižici *Matematika u boji — Dokazi bez riječi*, uvrštava *Dudeneyjev Haberdasherov problem.* Naime, Dakić svojim čitateljima na dvije stranice donosi ključne informacije o samome problemu i njegovom autoru. Uz sliku konstrukcije donosi i njezin opisani postupak koji je Dudeney ponudio kao rješenje, ali uključuje i informaciju o još jednom, naočigled jednostavnijem rješenju. Dakić iznosi: „Da je ovaj problem jedna od perjanica zabavne matematike, svjedoči i njegova zastupljenost na internetu kao i u interesu koji je pobudio kod dijela uglednih matematičara znanstvenika. Tako ga je zapazio i Hugo Steinhaus uvrstivši ga u svoj *Matematički kaleidoskop*. Steinhausovo rješenje jednostavno je rekonstruirati." ([1, str. 78–79]).

U daljnjem radu bavimo se analizom rješenja *Haberdasherova problema*.

3. Dudeneyjevo rješenje *Haberdasherova problema*

Dudeney u svom rješenju opisuje kako se konstruktivno mogu odrediti dvije točke na osnovici jednakostraničnog trokuta, koje zatim omogućavaju podjelu trokuta pomoću tri reza na četiri dijela. Preslagivanjem dobivenih dijelova, bez preokretanja, oblikuje se kvadrat (slika 5).



Slika 5. Dudeneyjevo rješenje *Haberdasherova problema.*

Opis konstrukcije[2] po koracima prema Dudeneyu ([2, str. 179–180]):

1) Neka je točka D polovište dužine $\overline{AC}$, a točka E polovište dužine $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$.

2) Produlji dužinu $\overline{AE}$ do točke F tako da vrijedi $|EF| = |EB|$.

3) Polovište dužine $\overline{AF}$ označi točkom G te opiši kružnicu k_1 sa središtem u G radijusa $|AG|$; $k_1(G, |AG|)$.

[2]**Napomena:** U opisu konstrukcije napravljene su neke izmjene u oznakama na slici i odabiru pojmova u odnosu na originalni opis radi usklađivanja s preostalim dijelom teksta.

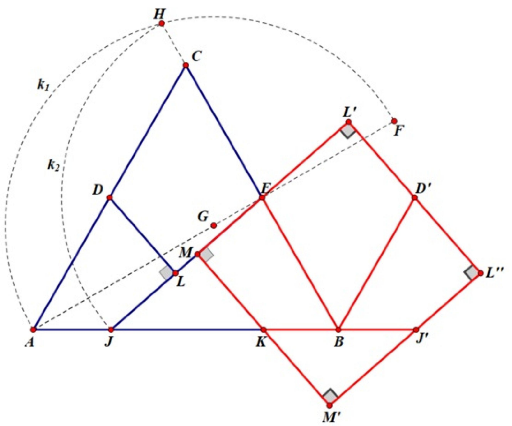
4) Sjecište pravca EC s kružnicom k_1 označi točkom H. Stranica traženog kvadrata je duljine $|EH|$.

5) Iz točke E opiši kružnicu k_2 radijusa $|EH|$; $k_2(E, |EH|)$. Sjecište kružnice k_2 s dužinom $\overline{AB}$ označi točkom J.

6) Na dužini $\overline{AB}$ istakni točku K tako da je $|JK| = |EB|$.

7) Sada iz točaka D i K spusti okomice na dužinu $\overline{JE}$. Nožišta okomica označi točkama L i M, redom.

Ako su svi koraci ispravno napravljeni, jednakostranični je trokut $\triangle ABC$ dužinama $\overline{JE}, \overline{DL}$ i $\overline{MK}$ podijeljen na četiri dijela, od kojih se preslagivanjem može sastaviti kvadrat $MM'L''L'$ (slika 6).



Slika 6. Konstrukcija Dudeneyjeva rješenja.

3.1. Provjera valjanosti konstrukcije

S obzirom da su svi jednakostranični trokuti međusobno slični, radi jednostavnosti i provjere valjanosti konstrukcije, a bez smanjenja općenitosti, za stranicu jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ uzima se da je duljine $a = 4$ cm. U tom slučaju, visina trokuta $\triangle ABC$ je duljine $v_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm, a površina je $P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm^2. Budući da su kvadrat i trokut sastavljeni od jednakih dijelova, njihove su površine jednake pa je površina kvadrata $P_{MM'L''L'} = 4\sqrt{3}$ cm^2. Duljina stranice kvadrata je $b = \sqrt{4\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$ cm.

Pokažimo da je Dudeneyjeva konstrukcija zaista valjana, odnosno da kada je stranica jednakostraničnog trokuta duljine $a = 4$ cm, onda je četverokut dobiven na opisani način kvadrat sa stranicom duljine $b = 2\sqrt[4]{3}$ cm. Kako bi utvrdili je li promatrani četverokut kvadrat, treba utvrditi da su svi unutrašnji kutovi pravi i da su susjedne stranice jednakih duljina.

Prema opisanoj konstrukciji, kutovi četverokuta $MM'L''L'$ jesu pravi: (1) kut pri vrhu M je pravi, (2) kut pri vrhu M' nastao je rotacijom kuta pri vrhu M, (3) kut pri vrhu L" nastao je rotacijom kuta pri vrhu L, koji je pravi, i (4) kut pri vrhu L' nastao je rotacijom kuta pri vrhu L. Dakle, četverokut $MM'L''L'$ je pravokutnik te vrijedi:

$$|MM'| = |L'L''| \quad \text{i} \quad |ML'| = |M'L''|.$$

Budući da je točka E polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi $|CE| = |EB| = 2$ cm. Dužinu $\overline{AE}$ produljili smo do točke F tako da je $|EF| = |EB|$ pa je $|EF| = 2$ cm. Za radijus kružnice $k_1(G, |AG|)$ vrijedi:

$$|AG| = \frac{|AF|}{2} = \frac{|AE| + |EF|}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3}+1, |AG| = (\sqrt{3}+1) \text{ cm}.$$

Duljinu stranice kvadrata $|EH|$ odredit ćemo iz pravokutnog trokuta $\triangle GEH$. Kako je $|GH| = |AG| = (\sqrt{3}+1)$ cm, a $|GE| = |AE| - |AG| = (\sqrt{3} - 1)$ cm, prema Pitagorinom poučku vrijedi:

$$\begin{aligned} |EH|^2 &= |GH|^2 - |GE|^2 \\ |EH|^2 &= 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ |EH| &= 2\sqrt[4]{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Dakle, duljina stranice kvadrata jednaka je $|EH| = 2\sqrt[4]{3}$ cm, a to je upravo duljina stranice kvadrata koji želimo konstruirati. Provjerimo još odgovara li ta duljina za stranice $\overline{MM'}$ i $\overline{ML'}$.

Budući da kružnica k_2 radijusa $|EH|$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki J, vrijedi: $|JE| = |EH| = 2\sqrt[4]{3}$ cm. Prema poučku o sinusima za trokut $\triangle JBE$, uz oznaku $\alpha = |\angle BJE|$, vrijedi:

$$\frac{|EB|}{\sin\alpha} = \frac{|JE|}{\sin 60^\circ} \text{ iz čega slijedi da je } \sin\alpha = \frac{|EB|}{|JE|} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \text{ cm.}$$

Prema konstrukciji točke K na stranici $\overline{AB}$ vrijedi: $|JK| = |EB| = 2$ cm pa prema definiciji sinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu $\triangle JKM$ imamo:

$$\sin\alpha = \frac{|MK|}{|JK|} \text{ iz čega slijedi da je } |MK| = |JK| \cdot \sin\alpha = \sqrt[4]{3} \text{ cm.}$$

Konačno, iz Dudeneyjeve konstrukcije četverokuta $MM'L''L'$ slijedi:

$$|MM'| = 2 \cdot |MK| = 2\sqrt[4]{3} \text{ cm}$$

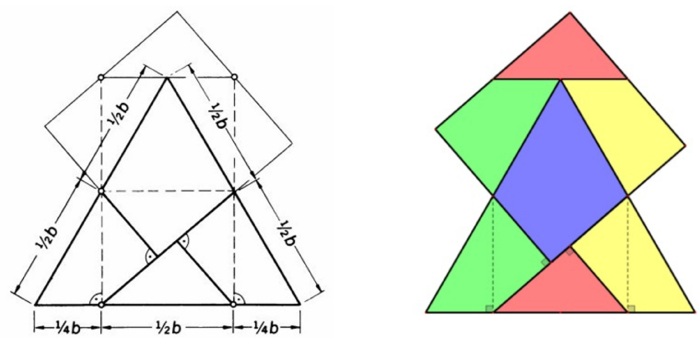
$$|ML'| = |ME| + |EL'| = |JL| + |LE| = |JE| = 2\sqrt[4]{3}\ \text{cm.}$$ [3]

To znači da su duljine susjednih stranica četverokuta $MM'L''L'$ jednake i odgovaraju duljini stranice kvadrata koji želimo konstruirati.

Konačno se može zaključiti da je četverokut $MM'L''L'$, koji je dobiven preslagivanjem dijelova jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ na opisani način, kvadrat jer ima sva četiri kuta prava i susjedne stranice jednakih duljina.

4. Steinhausovo rješenje *Haberdasherova problema*

Steinhaus u svojoj knjizi *Mathematical Snapshots* ([6]) daje rješenje *Haberdasherova problema* kao prvi *matematički snimak* odnosno kao vizualni dokaz bez puno riječi, smatrajući da slikom na jednostavan način može uspješno prikazati rješenje problema (slika 7). Međutim, Morris Kline je u predgovoru Steinhausove knjige, u izdanju iz 1983., napisao da „matematički dokaz zahtijeva više od intuicije i zaključivanja na temelju posebnih slučajeva ili vizualnih dokaza”, možda i ne sluteći da se u njegovu vizualnom dokazu potkrala greška.



Slika 7. Steinhausov izvorni vizualni dokaz[4] i njegova rekonstrukcija.

Uspoređujući sliku Steinhausova rješenja (slika 7) sa slikom Dudeneyjeva rješenja (slika 5), zaista se na prvi pogled može zaključiti da se radi o istoj podjeli jednakostraničnog trokuta te da je Steinhaus to napravio na mnogo jednostavniji i praktičniji način. No, kako je Steinhausovo rješenje dano bez formalnog dokaza, a stara narodna izreka kaže

[3] Jednakost duljina korištena u ovom izrazu izvodi se kasnije, a temelji se na sukladnosti trokuta $\triangle DJL$ i $\triangle MKE$.

[4] Slika preuzeta iz Steinhausove knjige *Mathematical Snapshots*, 1983 (vidjeti [6]).

„previše je to dobro da bi bilo istinito”, rješenje smo izveli konstruktivno u programu dinamičke geometrije, a zatim dokazom provjerili valjanost konstrukcije.

Opis konstrukcije po koracima prema Steinhausovu vizualnom dokazu:

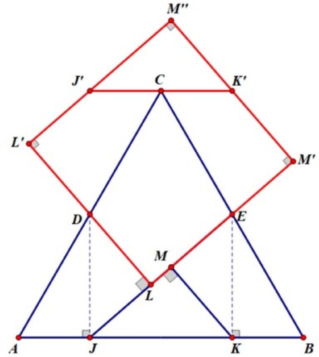
1) Prvo se konstruira jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ prema osnovnoj konstrukciji trokuta SSS.

2) Simetralama dužina konstruiraju se polovišta stranica trokuta: točka D polovište je stranice $\overline{AC}$, a točka E polovište stranice $\overline{BC}$.

3) Kroz točke D i E konstruiraju se okomice na stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Nožišta okomica točke su J i K, redom.

4) Zatim se kroz točke D i K konstruiraju okomice na dužinu $\overline{JE}$. Nožišta okomica točke su L i M, redom.

Ako su svi koraci ispravno napravljeni, jednakostranični je trokut $\triangle ABC$ dužinama $\overline{JE}$, $\overline{DL}$ i $\overline{MK}$ podijeljen na četiri dijela, od kojih se, prema Steinhausu, preslagivanjem kao na slici može sastaviti kvadrat $LM'M''L'$ (slika 8).



Slika 8. Konstrukcija Steinhausova rješenja.

Međutim, nakon provedene konstrukcije u programu dinamičke geometrije te mjerenjem duljina stranica nastalog četverokuta pokazalo se da su nasuprotne stranice jednakih duljina, ali susjedne nisu. To znači da ili konstrukcija nije korektna ili dano rješenje nije rješenje *Haberdasherova problema*. Svakako je potrebno provesti i formalnu provjeru izvedenih koraka.

4.1. Razmatranje je li dobiveni četverokut kvadrat

Slično kao i kod provjere Dudeneyjeva rješenja, radi jednostavnosti i bez smanjenja općenitosti, ali i radi usporedbe s prethodnim, uzimamo da je stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ duljine $a = 4$ cm. Dakle, treba provjeriti jesu li svi unutrašnji kutovi pravi i susjedne stranice jednakih duljina.

Prema opisanoj konstrukciji, kutovi četverokuta $LM'M''L'$ su pravi: (1) kut pri vrhu L je pravi, (2) kut pri vrhu L' nastao je rotacijom kuta pri vrhu L, (3) kut pri vrhu M' nastao je rotacijom kuta pri vrhu M, a (4) kut pri vrhu M'' translacijom kuta pri vrhu M, koji je pravi. Dakle, četverokut $LM'M''L'$ je pravokutnik te vrijedi:

$$|LM'| = |L'M''| \text{ i } |LL'| = |M'M''|.$$

Da bi bio kvadrat, još treba provjeriti jesu li susjedne stranice jednakih duljina, to jest vrijedi li $|LL'| = |LM'|$.

Prema konstrukciji točaka D i E, dužina $\overline{DE}$ je srednjica trokuta $\triangle ABC$ te je ona paralelna sa stranicom $\overline{AB}$, a njezina duljina jednaka je polovini duljine te stranice, tj. $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$. Uz to, dužine $\overline{DJ}$ i $\overline{EK}$ okomite su na stranicu $\overline{AB}$, pa su one međusobno paralelne i jednakih duljina te vrijedi:

$$|DJ| = |EK| \text{ i } |JK| = |DE| = \frac{1}{2}|AB| = 2 \text{ cm},$$

tj. četverokut $DJKE$ je pravokutnik.

Nadalje, pravokutni trokuti $\triangle AJD$ i $\triangle BEK$ polovice su jednakostraničnih trokuta (kutovi veličine $60°$, $30°$ i $90°$) čija je stranica duljine $|AD| = |BE| = \frac{1}{2}|AB| = 2$ cm. Dužine $\overline{DJ}$ i $\overline{EK}$ visine su tih trokuta pa su njihove duljine: $|DJ| = |EK| = \sqrt{3}$ cm. To znači da je $|DJ| \neq |JK|$ pa pravokutnik $DJKE$ nije kvadrat.

Dužina $|JE|$ dijagonala je pravokutnika $DJKE$ te ga dijeli na dva sukladna pravokutna trokuta $\triangle DJE$ i $\triangle KEJ$. Dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ visine su tih trokuta na istu stranicu $\overline{JE}$ pa su međusobno sukladne, tj. $|DL| = |KM|$. Također, dužine $\overline{DL}$ i $\overline{KM}$ manje su od polovice dijagonale $\overline{DK}$.

Nadalje, trokuti $\triangle DJL$ i $\triangle KEM$ sukladni su po poučku $SSK^{>}$ jer se podudaraju u dva para stranica i kutu nasuprot većoj stranici ($|DL| = |KM|, |DJ| = |EK|$ i $|\angle DLJ| = 90° = |\angle KME|$). Iz sukladnosti slijedi: $|JL| = |ME| = |EM'|$ pa imamo:

$$|JL| + |ME| < |JL| + |LM| + |ME| = |JE| = |DK|.$$

Konačno, za stranice četverokuta $LM'M''L'$ vrijedi:[5]

$$|LM'| = |LM| + |ME| + |EM'| = |LM| + |ME| + |JL| = |JE| \quad (1)$$
$$|LL'| = 2 \cdot |DL| = |DL| + |KM| < |DK| = |JE| \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi: $|LL'| < |JE| = |LM'|$, tj. $|LL'| \neq |LM'|$, a to znači da četverokut $LM'M''L'$ nije kvadrat.

Drugim riječima, ako točke J i K dijele stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ u omjeru $1 : 2 : 1$, onda se opisanim dijeljenjem trokuta na četiri dijela te preslagivanjem tih dijelova ne dobiva kvadrat već pravokutnik. Odnosno, Steinhausovo rješenje nije rješenje *Haberdasherova problema.*

5. Podjela stranice trokuta u odgovarajućem omjeru

Upravo nas je Steinhausovo rješenje navelo da ispitamo u kojem omjeru točke J i K dijele stranicu $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ u Dudeneyjevu rješenju, kako bi se dobio kvadrat. U tu svrhu, jednakostranični trokut $\triangle ABC$ smjestimo u koordinatni sustav kako je prikazano na slici 9. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je stranica trokuta duljine 4 cm[6] pa su koordinate vrhova trokuta: $A(0,0), B(4,0)$ i $C(2, 2\sqrt{3})$. Točke D i E polovišta su stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, redom pa su njihove koordinate: $D(1, \sqrt{3}), E(3, \sqrt{3})$.

Neka se točka J nalazi na nekoj udaljenosti $t,\ t \in [0,2]$ od vrha A, na stranici $\overline{AB}$, tj. njezine koordinate su: $J(t,0)$. Tada se, prema opisanoj konstrukciji, i točka K nalazi na stranici $\overline{AB}$, a njezine koordinate su: $K(t+2, 0)$.

S obzirom da imamo koordinate točaka J i E, jednadžba pravca tim dvjema točkama $J(t,0)$ i $E(3,\sqrt{3})$ glasi:

$$JE \ldots \sqrt{3}x + (t-3)y - \sqrt{3}t = 0$$

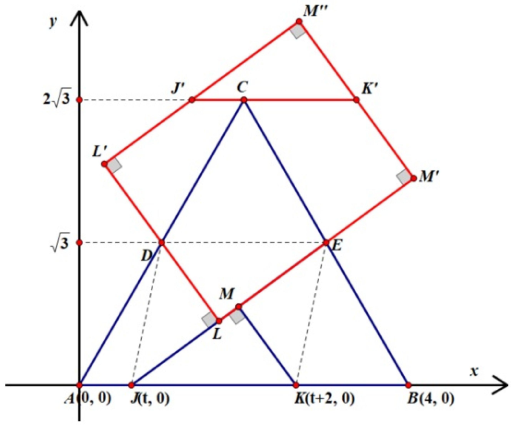
Koristeći formulu za određivanje udaljenosti točke od pravca, mogu se odrediti udaljenosti točaka $D(1,\sqrt{3})$ i $K(t+2,0)$ od pravca JE:

$$d(D, JE) = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + (t-3) \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}t|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (t-3)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (t-3)^2}},$$

$$d(K, JE) = \frac{|\sqrt{3} \cdot (t+2) + (t-3) \cdot 0 - \sqrt{3}t|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (t-3)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (t-3)^2}}.$$

[5]Izvođenje numeričkih vrijednosti stranica četverokuta prepuštamo čitatelju.

[6]U daljnjoj analizi, iz praktičnih razloga ispušta se mjerna jedinica.



Slika 9. Trokut u koordinatnom sustavu.

Iz dobivenih udaljenosti vidljivo je da vrijedi: $d(D, JE) = d(K, JE)$, za bilo koju vrijednost $t,\ t \in [0, 2]$, odnosno $|DL| = |KM|$.

Nadalje, četverokut $DJKE$ je paralelogram jer ima jedan par stranica koje su paralelne i jednakih duljina (stranice $\overline{DE}$ i $\overline{JK}$). Sada zaključujemo da su pravokutni trokuti $\triangle DJL$ i $\triangle KEM$ sukladni po poučku $SSK^{>}$ jer se podudaraju u dva para stranica i kutu nasuprot većoj stranici ($|DL| = |KM|, |DJ| = |EK|$ stranice paralelograma i $|\angle DLJ| = 90° = |\angle KME|$). Iz sukladnosti slijedi: $|JL| = |ME|$.

Budući da je $|JL| + |LE| = |JE| = |JM| + |ME|$, a $|JL| = |ME|$, slijedi da je i $|JM| = |LE|$.

Nadalje, jedna stranica pravokutnika je $\overline{LL'}$ i njezina duljina je:

$$|LL'| = 2 \cdot |DL| = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (t-3)^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (t-3)^2}}. \tag{3}$$

Druga stranica pravokutnika je $\overline{LM'}$ i njezina duljina je:

$$|LM'| = |LE| + |EM'| = |JM| + |ME| = |JE| = \sqrt{3 + (t-3)^2} \tag{4}$$

Na temelju (3) i (4) vidimo da se dani jednakostranični trokut uz opisanu podjelu može preoblikovati u pravokutnik, za bilo koju vrijednost parametra $t,\ t \in [0, 2]$.

Ako je $t = 1$, onda se radi o Steinhousovu rješenju te je: $|LL'| = \frac{4\sqrt{21}}{7} \approx 2,619$, $|LM'| = \sqrt{7} \approx 2,646$, što je zapravo dobra aproksimcija kvadrata, ali još uvijek se radi o pravokutniku.

Kako bismo odredili vrijednost parametra t za koju pravokutnik $LM'M''L'$ postaje kvadrat, promotrimo sljedeće.

Ako je stranica jednakostraničnog trokuta duljine $a = 4$, onda je površina trokuta $P_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, kao i površina pravokutnika $P_{LM'M''L'} = 4\sqrt{3}$ jer je sastavljen od jednakih dijelova kao i trokut. Ako je pravokutnik kvadrat, njegova je stranica duljine $b = 2\sqrt[4]{3}$. S druge strane, stranica kvadrata je $|LL'| = 2 \cdot |DL| = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}}$ iz čega se izjednačavanjem $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+(t-3)^2}} = 2\sqrt[4]{3}$ dobiva kvadratna jednadžba: $t^2 - 6t + 12 - 4\sqrt{3} = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe po parametru t dobiva se $t = 3 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$. Odnosno, za $t = 1.018$ pravokutnik $LM'M''L'$ postaje kvadrat.

Prema Dudeneyjevu rješenju, točke J i K stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ dijele u omjeru: 1.018:2:0.982.

Sada je vidljivo zašto je Steinhausovo rješenje bilo vizualno uvjerljivo jer je u njegovom rješenju promatrani omjer 1:2:1. No, kad bi se uzeo trokut stranice duljine $a = 4$ m, onda bi odstupanje bilo uočljivije.

6. Primjena *Haberdasherova problema* u nastavi matematike

Opisani problem preslagivanja dijelova jednakostraničnog trokuta u kvadrat može se koristiti i u nastavi matematike na svim razinama obrazovanja, ali prilagođeno uzrastu, njihovom predznanju i s određenom svrhom.

Tako se za učenike nižih razreda osnovne škole može pripremiti slagalica *Haberdasherova problema*, čijim se slaganjem mogu uvesti u svijet geometrijske disekcije. U toj fazi učenici mogu osvijestiti da likovi mogu biti različitih oblika i jednakih površina.

U višim razredima osnovne škole učenici mogu provoditi konstrukcije, opisivati ih verbalno i simbolički. Na taj način primjenjuju osnovne konstrukcije u složenijem geometrijskom problemu, šire matematički rječnik, usvajaju odgovarajući simbolički zapis i, što je najvažnije, analiziraju svojstva i stvaraju veze među različitim oblicima prikazivanja. Ispravnost provedene konstrukcije u ovoj fazi učenici mogu provoditi mjerenjem i geometrijskim uspoređivanjem dužina.

Učenici srednje škole, ovisno o usmjerenju, mogu stvarati formalna opravdanja uz dekomponiranje slike (za što su potrebne vještine vizualizacije) te izvođenjem formalnih zaključaka na temelju poznatih definicija, aksioma i dokazanih tvrdnji. S obzirom na to da se problem može rješavati i argumentirati na različite načine, raspravom s učenicima o različitim pristupima i traženjem optimalnog rješenja razvijaju se različite strategije rješavanja problema te se postiže dublje razumijevanje i funkcionalno povezivanje naučenog. Proučavanjem graničnih slučajeva, na prirodan se način učenici uvode u proces dokazivanja i lakše shvaćaju potrebu za dokazivanjem.

7. Zaključak

U radu je opisan jedan problem geometrijske disekcije u kojemu se jednakostranični trokut treba podijeliti na četiri dijela tako da se od dobivenih dijelova preslagivanjem može oblikovati kvadrat, bez preokretanja dijelova. Iako je problem postavljen prije gotovo 120 godina, još uvijek je u fokusu razmatranja poseban jer je sam po sebi intrigantan, a do sada je poznato samo jedno točno rješenje.

Prirodno je baviti se zagonetkama, a kako sam Dudeney kaže: „Dobra zagonetka, poput vrline, sama je sebi nagrada. Kada čovjek uspije riješiti zagonetku, i sam osjećaj zadovoljstva dovoljna je nagrada za njegov trud. On voli biti suočen s misterijom i nije u potpunosti sretan dok je ne riješi.” ([2, str.12–13]).

Osim što problem disekcije geometrijskih likova spada u područje rekreacijske matematike, ciljanim osmišljavanjem aktivnosti može se učinkovito koristiti i u nastavi geometrije s različitim uzrastima i tako doprinijeti stvaranju vertikalne povezanosti nastavnih (geometrijskih) sadržaja. Svakako, učenicima treba dati priliku za otkrivanje matematičkih ideja, za argumentiranje uočenoga i posebno im osigurati okruženje unutar kojeg će razvijati proces dokazivanja.

Literatura

[1] B. Dakić, *Matematika u boji. Dokazi bez riječi.* Element, Zagreb, 2018.

[2] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles and other curious problems.* London, Edinburgh i New York: Thomas Nelson and sons, Ltd. 1919. Preuzeto s: `https://z-lib.org/` (8.3.2021.)

[3] G. N. Frederickson, *Hinged Dissections: Swinging and Twisting.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Preuzeto s: `https://z-lib.org/` (8.3.2021.)

[4] R. Hartshorne, Geometry: *Euclid and Beyond.* University of California, Berkeley, 2000.

[5] A. Kavajin, N. Baranović, *Tangram u nastavi matematike*, 2. dio. Matematika i škola, 21(102), 69–74, 2019.

[6] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots.* New York: Oxford University Press, 1983. Preuzeto s: `https://z-lib.org/` (27.3.2021.)

Milka Grubić
Studentica 4. godine integriranog Učiteljskog studija na Filozofskom fakultetu u Splitu
E-mail adresa: `mgrubic@ffst.hr`

Nives Baranović
Viši predavač na Odsjeku za učiteljski studij Filozofskog fakulteta u Splitu
E-mail adresa: `nives@ffst.hr`