ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.4 (2021) 89–96
Zaprimljen: 28. veljače 2021.
Prihvaćen: 9. ožujka 2021.

# O vezi Laplaceove transformacije i eksponencijalne razdiobe

Ivana Tokić, Bojan Kovačić

**Sažetak**

U radu se opisuje primjena Laplaceove transformacije na određivanje osnovnih statističkih pokazatelja (očekivanje, varijanca i standardna devijacija) proizvoljne eksponencijalne slučajne varijable. Komentiraju se i uočene poteškoće koje studenti imaju u razumijevanju ove primjene.

*Ključni pojmovi: Laplaceova transformacija, eksponencijalna razdioba*

## 1. Uvod

Na preddiplomskom stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu u okviru predmeta „Matematika 2" (2. semestar, 1. godina studija) obrađuje se Laplaceova transformacija i njezina primjena na rješavanje Cauchyjevih problema s nehomogenom linearnom običnom diferencijalnom jednadžbom 2. reda s konstantnim koeficijentima. Pritom se razmatranje Laplaceove transformacije ograničava na neprekidne funkcije eksponencijalnoga rasta, pa se osnovni rezultati iskazuju samo za tu klasu funkcija.

Na istom stručnom studiju u okviru predmeta „Vjerojatnost i statistika" (3. semestar, 2. godina studija), između ostaloga, obrađuje se i eksponencijalna razdioba te se izvode izrazi za njezine osnovne statističke pokazatelje (očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju). To se najčešće čini izravno iz definicije tih pokazatelja, tj. određivanjem odgovarajućih nepravih integrala izravno iz njihove definicije. Te standardne izvode ovdje izostavljamo, a zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [4] i [1].

U ovom ćemo radu spomenute izraze izvesti kraće i jednostavnije koristeći Laplaceovu transformaciju. U trenutku kad se obrađuju ti izvodi, svi studenti koji su upisali predmet „Vjerojatnost i statistika" odslušali su predmet „Matematika 2", a većina njih je i položila taj predmet. Zbog toga se pretpostavlja da su studenti otprije upoznati s definicijom Laplaceove transformacije i njezinim osnovnim svojstvima.

## 2. Pregled potrebnih rezultata o Laplaceovoj transformaciji

U ovoj točki navodimo pregled rezultata koji se odnose na Laplaceovu transformaciju, a koje ćemo kasnije efektivno koristiti.

**Definicija 1.** *Kažemo da je funkcija* $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija eksponencijalnoga rasta ako postoje konstante* $a, M > 0$ *takve da za svaki* $x > 0$ *vrijedi:*

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}. \tag{1}$$

**Definicija 2.** *Neka je* $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija eksponencijalnoga rasta. Neka je* $F$ *funkcija definirana pravilom*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-sx}\, dx \tag{2}$$

*Preslikavanje* $L$ *koje funkciji* $f$ *pridružuje funkciju* $F$ *naziva se Laplaceova transformacija. Pišemo:* $L\{f\} = F$.

**Napomena 3.** *Može se pokazati da je preslikavanje* $L$ *dobro definirano za sve funkcije eksponencijalnoga rasta. Detalje ovdje izostavljamo, a zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [3] i [2].*

Osnovna svojstva Laplaceove transformacije koja ćemo koristiti u ovom članku izriču sljedeća tri teorema. Njihove dokaze ovdje izostavljamo, a zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [3] i [2].

**Teorem 4.** *Laplaceova transformacija je linearan operator, tj. za svake dvije funkcije eksponencijalnoga rasta* $f, g$ *i sve* $a, b \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$L\{a \cdot f + b \cdot g\} = a \cdot L\{f\} + b \cdot \{g\}. \tag{3}$$

**Teorem 5** (Teorem o derivaciji originala)**.** *Neka je* $f$ *funkcija eksponencijalnoga rasta i neka je njezina derivacija po dijelovima neprekidna funkcija na* $[0,+\infty\rangle$*. Tada postoji Laplaceov transformat funkcije* $f'$ *i vrijedi:*

$$L\{f'\}(s) = s \cdot L\{f\}(s) - f(0). \tag{4}$$

**Teorem 6** (Teorem o integraciji originala)**.** *Neka je $f$ funkcija eksponencijalnoga rasta čiji je Laplaceov transformat funkcija $F$. Neka je*

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{5}$$

*Tada je*

$$L\{f_1\}(s) = \frac{F(s)}{s}. \tag{6}$$

Koristeći ova tri teorema dokazujemo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 7** (neki osnovni Laplaceovi transformati)**.**

a) $L\{a\}(s) = \dfrac{a}{s},\ \forall a \in \mathbb{R}$ (7)

b) $L\{x\}(s) = \dfrac{1}{s^2};$ (8)

c) $L\{x^2\}(s) = \dfrac{2}{s^3}.$ (9)

*Dokaz.*

a) Primijetimo da iz (2) izravno slijedi

$$L\{0\}(s) = 0. \tag{10}$$

U (4) uvrstimo $f(x) = a$, pa primijenimo $f'(x) = 0,\ f(0) = a$ i (10). Dobivamo:

$$\begin{gathered} L\{0\}(s) = s \cdot L\{a\}(s) - f(0) \implies \\ 0 = s \cdot L\{a\}(s) - a \implies \\ L\{a\}(s) = \frac{a}{s}. \end{gathered}$$

b) U (5) uvrstimo $f(t) = 1$:

$$f_1(x) = \int_0^x dt = x - 0 = x. \tag{11}$$

Iz tvrdnje a) za $a = 1$ slijedi

$$L\{1\}(s) = \frac{1}{s}. \tag{12}$$

Koristeći (6) i (12) dobivamo:

$$L\{x\}(s) = \frac{L\{1\}(s)}{s} = \frac{\frac{1}{s}}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

c) U (5) uvrstimo $f(t) = t$ :

$$f_1(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2} \cdot x^2. \tag{13}$$

Tu funkciju uvrstimo u (6), pa koristeći teorem 4 i (8) dobivamo:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{1}{2}x^2\right\}(s) &= \frac{L\{x\}(s)}{s} \implies \\ \frac{1}{2}L\left\{x^2\right\}(s) &= \frac{\frac{1}{s^2}}{s} \implies \\ L\left\{x^2\right\}(s) &= \frac{2}{s^3}. \end{aligned}$$

□

Napomenimo da se Laplaceovi transformati (7)–(9) obično izvode izravno iz definicije Laplaceove transformacije, tj. pomoću (2). Te izvode ostavljamo čitatelju za vježbu.

Za druga korisna i zanimljiva svojstva Laplaceove transformacije čitatelja upućujemo na literaturu [2].

# 3. Pregled potrebnih rezultata o eksponencijalnoj razdiobi

U ovoj točki navodimo pregled rezultata koji se odnose na eksponencijalnu razdiobu, a koje ćemo kasnije efektivno koristiti.

**Definicija 8.** *Neka je $a > 0$ konstanta. Kažemo da slučajna varijabla $X$ ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $a$ ili, ekvivalentno, da je $X$ eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $a$ (i pišemo $X \sim Ex(a)$) ako je funkcija gustoće varijable $X$ dana pravilom:*

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax}, \ za\ x > 0, \\ 0, \ inače. \end{cases} \tag{14}$$

Osnovni statistički pokazatelji svake slučajne varijable njezini su očekivanje, varijanca i standardna devijacija. Svaka eksponencijalna slučajna varijabla pripada u neprekidne (kontinuirane) slučajne varijable, pa se njezini osnovni statistički pokazatelji određuju prema formulama navedenima u sljedećoj definiciji.

**Definicija 9.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla i neka je $f$ njezina funkcija gustoće. Tada su očekivanje, varijanca i standardna devijacija varijable $X$ redom dani izrazima:*

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx, \tag{15}$$

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (\mathrm{E}(X))^2, \tag{16}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}. \tag{17}$$

Za druga zanimljiva svojstva eksponencijalne razdiobe zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [4] i [1].

# 4. Određivanje osnovnih statističkih pokazatelja eksponencijalne razdiobe pomoću Laplaceove transformacije

U ovoj točki izvodimo izraze za osnovne statističke pokazatelje eksponencijalne razdiobe pomoću Laplaceove transformacije, odnosno pomoću teorema 4 i osnovnih Laplaceovih transformata izvedenih u propoziciji 7. Pritom pretpostavljamo da je $X$ eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $a$, tj. $X \sim Ex(a)$ za neki $a > 0$.

**Propozicija 10.**

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{a}. \tag{18}$$

*Dokaz.* Budući da je $f(x) = 0,\ \forall x \leq 0$, donja granica intervala integracije u (15) jednaka je 0, tj. integriramo umnožak $x \cdot f(x)$ na intervalu $[0, +\infty\rangle$ . Primjenom (2) i (8) dobivamo:

$$\mathrm{E}(X) = a \cdot \int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-a \cdot x}\,dx = a\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a},$$

što je i trebalo dokazati. □

**Komentar 11.** *U gornjem dokazu studente često zbunjuje jednakost*

$$\int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-a \cdot x}\,dx = \frac{1}{a}. \tag{19}$$

*Oni pritom predviđaju da se u gornjem nepravom integralu integrira po varijabli $x$ i da veličinu $a$ u tom integralu treba smatrati konstantom, analogno kao i veličinu $s$ u (2).*

**Propozicija 12.**

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{a^2}. \tag{20}$$

*Dokaz.* Analogno kao u dokazu propozicije 10 zaključujemo da je donja granica intervala integracije u (16) jednaka 0. Dakle, integriramo umnožak $x^2 \cdot f(x)$ na intervalu $[0, +\infty\rangle$ . Primjenom (2) i (9) dobivamo:

$$\mathrm{V}(X) = a \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-a \cdot x}\, dx - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a \cdot \frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2},$$

što je i trebalo dokazati. □

**Komentar 13.** *U gornjem dokazu studente ponovno zbunjuje jednakost*

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-a \cdot x}\, dx = \frac{2}{a^3}. \tag{21}$$

*iz istih razloga kao u komentaru 11. Nadalje, dio njih pogrešno uvrštava član* $(\mathrm{E}(X))^2$ *pod znak integrala i time dobiva pogrešno rješenje. Sve navedeno ukazuje da, unatoč odslušanom i položenom predmetu „Matematika 2", dio studenata ima poteškoće s razumijevanjem gradiva obrađenoga u tom predmetu, a posebno s integriranjem funkcija koje u svojim pravilima sadrže barem jedan realan parametar.*

**Propozicija 14.**

$$\sigma(X) = \frac{1}{a}. \tag{22}$$

*Dokaz.* Slijedi izravno iz (17) i (20). □

**Komentar 15.** *Prije dokaza propozicija 10, 12 i 14 na nastavi Vjerojatnosti i statistike obavezno se ponove osnovni Laplaceovi transformati iskazani u propoziciji 7 kako bi studenti mogli lakše pratiti i razumjeti ta tri dokaza. Pritom treba istaknuti da je vremensko razdoblje proteklo između obrade Laplaceove transformacije i obrade eksponencijalne razdiobe približno jednako pola godine, tj. 6 mjeseci. Time se još jednom naglašava važnost učenja matematičkoga gradiva s razumijevanjem i daljnjom primjenom u struci, a ne učenja samo radi polaganja ispita čemu je sklon znatan dio studenata.*

**Komentar 16.** *Dio studenata zbunjuje i jednakost*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a} \tag{23}$$

*koja se pojavljuje u dokazu propozicije 14. Poučeni vlastitim srednjoškolskim iskustvima oni će pogrešno zaključiti da vrijedi jednakost:*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \pm\frac{1}{a}. \tag{24}$$

*Ta česta pogreška uočava se još na nastavi iz predmeta Matematika 1 (1. semestar, 1. godina studija). Zbog toga se prilikom dokaza propozicije 14 napiše jednakost*

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \tag{25}$$

*te ponovi da prvi znak jednakosti vrijedi za svaki* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *dok drugi vrijedi jer je prema pretpostavci* $a > 0$.

# 5. Zaključak

Na preddiplomskim stručnim tehničkim studijima primjena matematičke analize u vjerojatnosti i statistici uglavnom se odnosi na određivanje osnovnih statističkih pokazatelja slučajnih varijabli. Pritom se koriste konvergentni redovi, granične vrijednosti funkcije slijeva i zdesna u točki, derivacije realne funkcije jedne realne varijable te određeni i nepravi integrali. Od studenata se pritom očekuje poznavanje osnova diferencijalnoga i integralnoga računa obično stečeno na matematičkim predmetima na 1. godini studija.

U ovom smo radu nastojali pokazati kako se isti matematički objekt (Laplaceova transformacija) može uspješno iskoristiti i u obradi gradiva vjerojatnosti i statistike, a ne samo za rješavanje Cauchyjevih problema. Pritom smo korištene Laplaceove transformate namjerno izveli koristeći osnovna svojstva te transformacije, a ne izravno iz njezine definicije. Takav pristup smatramo korisnim jer studenti mogu vidjeti kako se do istih rezultata može doći na dva bitno različita načina.

Za razliku od sveučilišnih studija, na preddiplomskim stručnim studijima uglavnom se ne inzistira na dokazivanju teorema, nego na razumijevanju iskaza. Opravdanost takvoga stava vidljiva je i u slučaju kojega smo razmatrali u članku. Nastavniku je zasigurno najlakše i najjednostavnije zadati studentima neka samostalno ponove gradivo potrebno za uspješno praćenje pojedine nastavne cjeline, ali višegodišnje nastavno iskustvo drugoga autora ovoga članka pokazuje da je ipak potrebno i korisno odvojiti malo vremena na redovnoj nastavi za kratko interaktivno ponavljanje, pogotovo kad se nastava održava za izvanredne studente. Time će nastavnik dobiti bitno kvalitetniju povratnu informaciju o stečenom predznanju svojih studenata i moći će bolje prilagoditi svoje izlaganje.

Naposljetku, slučajevi poput ovoga opisanoga u članku mogu dodatno poslužiti za bolje i kvalitetnije razumijevanje osnovnih statističkih pokazatelja, a posebno matematičkoga očekivanja. Studenti pod tim pojmom često pogrešno podrazumijevaju vrijednost slučajne varijable koja ima najveću vjerojatnost pojavljivanja. To i nije čudno jer se u svakodnevnom životu pridjev „očekivani” uglavnom odnosi upravo na takve vrijednosti. Relativno kratki izvodi formula pomoću kojih se određuju osnovni statistički pokazatelji omogućit će veći naglasak na njihovu interpretaciju, a time i njihovo bolje razumijevanje.

## Literatura

[1] N. Elezović, *Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2018.

[2] M. Katić, *Laplaceova transformacija*, završni rad, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2018.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] S. Suljagić, *Vjerojatnost i statistika*, interna skripta, Zagreb, 2005.

Ivana Tokić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Konavoska 2, 10000 Zagreb
*E-mail adresa:* ivana.tokic@tvz.hr

Bojan Kovačić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Konavoska 2, 10000 Zagreb
*E-mail adresa:* bojan.kovacic@tvz.hr