ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.4 (2021) 97–111
Zaprimljen: 14. listopada 2020.
Prihvaćen: 14. siječnja 2021.

Sturm-Liouvilleov problem

Marija Čatipović, Saša Krešić-Jurić

Sažetak

Klasična Sturm-Liouvilleova jednadžba, nazvana po Jacquesu Sturmu i Josephu Liouvilleu, obična je diferencijalna jednadžba drugog reda oblika

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u = -\lambda w(x)u. \tag{1}$$

Vrijednost λ nije određena i pronalaženje te vrijednosti za koju postoje netrivijalna rješenja jednadžbe (1) i koja zadovoljavaju rubne uvjete dio je problema koji nazivamo Sturm-Liouvilleov problem. Pokazat ćemo da se proizvoljni linearni operator drugog reda može transformirati u Sturm-Liouvilleov operator tj. da je Sturm-Liouvilleov operator kanonski oblik diferencijalnog operatora drugog reda. Vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema su realne, prebrojive i tvore strogo rastući niz $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ tako da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Također, za svaku vlastitu vrijednost λ_n postoji odgovarajuća vlastita funkcija $u_n(x)$ jedinstveno određena do na multiplikativnu konstantu koja ima točno n nultočaka u intervalu $[a, b]$. Ovo je jedan od fundamentalnih rezultata za Sturm-Liouvilleove operatore.

Ključni pojmovi: Sturm-Liouvilleov problem, vlastite vrijednosti, vlastite funkcije, regularni

1. Vrste Sturm-Liouvilleovog problema

Promotrimo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$Lu + \lambda w(x)u = 0 \tag{2}$$

gdje je L diferencijalni operator definiran sa

$$Lu = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u. \tag{3}$$

Diferencijalni operator L nazivamo Sturm-Liouvilleov operator. Diferencijalne jednadžbe oblika (2) javljaju se kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi matematičke fizike metodom separacije varijabli. Ako je $\hat{L}$ proizvoljni diferencijalni operator drugog reda

$$\hat{L}u = a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u, \quad a_2(x) \neq 0, \forall x \in [a,b],$$

tada se $\hat{L}$ može transformirati u Sturm-Liouvilleov operator množenjem sa funkcijom

$$s(x) = \frac{1}{a_2(x)} \exp\Big(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, dx\Big).$$

Doista, uočavamo da vrijedi

$$(s(x)\hat{L})u = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u$$

gdje je

$$p(x) = \exp\Big(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, dx\Big), \quad q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \exp\Big(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, dx\Big).$$

Iz ovoga proizlazi da je Sturm-Liouvilleov operator kanonski oblik diferencijalnog operatora drugog reda.

Definicija 1. *Regularni Sturm-Liouvilleov problem sastoji se od diferencijalne jednadžbe*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b, \tag{4}$$

gdje je L operator oblika (3) *i rubnih uvjeta*

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \tag{5}$$

$$b_1u(b) + b_2u'(b) = 0. \tag{6}$$

gdje je $a_1^2 + a_2^2 > 0$ i $b_1^2 + b_2^2 > 0$. Funkcije p, p', q i w su neprekidne na $[a,b]$ i $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Kada je Sturm-Liouvilleov problem definiran na otvorenom ili poluotvorenom intervalu, ili ako $p(x)$ ili $w(x)$ iščezavaju u jednoj ili obje rubne točke intervala $[a,b]$, ili ako $p(x)$ ili $w(x)$ u rubnoj točki konvergiraju ka beskonačnosti, tada se on naziva singularni Sturm-Liouvilleov problem.

Također, Sturm-Liouvilleov problem je singularan ako je definiran na beskonačnom intervalu [3, 4, 5].

Definicija 2. *U Sturm-Liouvilleovom problemu domena operatora L, koju označavamo sa $D(L)$, prostor je svih kompleksnih funkcija $u\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ za koje vrijedi $u'' \in L^2([a,b])$. Tada imamo $L\colon D(L) \to L^2([a,b])$.*

Za funkciju $u\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kažemo da je kvadratno integrabilna ako je $\int_a^b |u(x)|^2\,dx$ konačan. Prostor svih takvih funkcija označavamo sa $L^2([a,b])$ i zovemo Lebesgueovim prostorom kvadratno integrabilnih funkcija [1, 2].

Još jedan tip problema koji se često javlja u primjenama jest periodični Sturm-Liouvilleov problem. Sturm-Liouvilleova jednadžba

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

gdje je $p(a) = p(b)$, zajedno s periodičnim rubnim uvjetima $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$ naziva se periodični Sturm-Liouvilleov problem.

2. Vlastite vrijednosti i vlastite funkcije Sturm-Liouvilleovog problema

Definicija 3. *Funkcija u koja zadovoljava jednadžbu*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0$$

naziva se vlastita funkcija s pripadnom vlastitom vrijednošću λ [6].

Vlastite vrijednosti λ ovise o obliku operatora L i o rubnim uvjetima koje zadovoljava funkcija u, kako ilustriraju sljedeći primjeri.

Primjer 4. *Promotrimo diferencijalnu jednadžbu*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{7}$$

s rubnim uvjetima $u(0) = u(\pi) = 0$.

Uočavamo da je ovo regularni Sturm-Liouvilleov problem gdje je $p(x) = w(x) = 1$, $q(x) = 0$. Promotrimo sve moguće slučajeve u ovisnosti o vrijednosti λ.
Ako je $\lambda < 0$, tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}.$$

Rubni uvjeti su zadovoljeni ako i samo ako je

$$u(0) = A + B = 0 \tag{8}$$

$$u(\pi) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}\pi} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} = 0. \tag{9}$$

Kako je determinanta matrice sustava (8)–(9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} & e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} - e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} \neq 0,$$

sustav (8)–(9) ima samo trivijalno rješenje $A = B = 0$. Dakle, sustav nema netrivijalnih rješenja za $\lambda < 0$ pa sustav nema vlastite vrijednosti za $\lambda < 0$. Ako je $\lambda = 0$, tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = A + Bx.$$

Iz rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} u(0) &= A = 0, \\ u(\pi) &= A + B\pi = 0, \end{aligned}$$

slijedi da je $A = B = 0$. Dakle, $\lambda = 0$ također nije vlastita vrijednost sustava. Neka je sada $\lambda > 0$. Tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

pa rubni uvjeti impliciraju

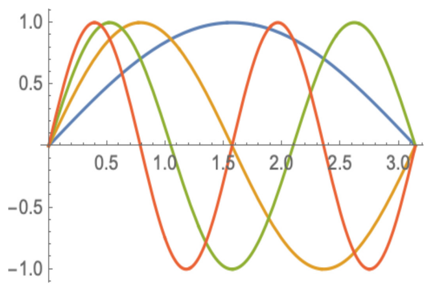
$$\begin{aligned} u(0) &= A \cdot 1 + 0 = A = 0, \\ u(\pi) &= A\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima netrivijalna rješenja ako je

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

odnosno $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dakle, vlastite su vrijednosti dane sa

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Slika 1. Vlastite funkcije $u_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

a pripadne vlastite funkcije (do na multiplikativnu konstantu) su

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da $\lambda_n \to \infty$ kada $n \to \infty$; što je tipično za vlastite vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema.

Primjer 5. *Promotrimo Eulerovu jednadžbu*

$$x^2u'' + xu' + \lambda u = 0, \quad 1 \le x \le e,$$

s rubnim uvjetima

$$u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

Eulerova jednadžba se može napisati u Sturm-Liouvilleovom obliku

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda u = 0$$

gdje je $w(x) = \frac{1}{x}$, $p(x) = x$, a $q(x) = 0$. Rješenje ove jednadžbe dano je sa

$$u(x) = c_1x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2x^{-i\sqrt{\lambda}},$$

gdje je $x^{ia} = e^{ia\ln x} = \cos(a\ln x) + i\sin(a\ln x)$. Stoga rješenje $u(x)$ prelazi u oblik

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x),$$

gdje su A i B konstante vezane uz c_1 i c_2. Rubni uvjeti impliciraju sljedeće:

$$u(1) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln 1) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln 1) = A = 0,$$
$$u(e) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln e) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln e) = A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Ovaj sustav ima netrivijalna rješenja ako je $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, $B \neq 0$, odnosno $\sqrt{\lambda} = n\pi$, za $n = 1, 2, 3, \dots$ Dakle, vlastite vrijednosti dane su sa

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a pripadne vlastite funkcije su

$$u_n(x) = \sin(n\pi\ln x), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Primjer 6. *Odredimo vlastite vrijednosti i vlastite funkcije periodičnog Sturm-Liouvilleovog problema*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad -\pi \le x \le \pi$$

s periodičnim rubnim uvjetima

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Uočavamo da je $p(x) = 1$, pa je uvjet $p(-\pi) = p(\pi)$ ispunjen. Kada je $\lambda > 0$, opće rješenje Sturm-Liouvilleove jednadžbe dano je sa

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Iz periodičnog rubnog uvjeta $u(-\pi) = u(\pi)$ dobivamo sljedeću jednakost

$$2B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Budući da je

$$u'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x),$$

uvjet $u'(-\pi) = u'(\pi)$ implicira

$$2A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Dakle, ako vrijedi

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

tada netrivijalna rješenja postoje, a vlastite vrijednosti dane su sa

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Kako je jednadžba $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ zadovoljena za proizvoljne A i B, dobivamo dvije linearno nezavisne vlastite funkcije

$$u_n(x) = \cos(nx) \text{ i } u_n(x) = \sin(nx)$$

koje odgovaraju istoj vlastitoj vrijednosti $\lambda_n = n^2$ za svaki $n = 1, 2, 3, \ldots$ Slično kao u primjeru 4 uočavamo da za $\lambda < 0$ rješenje Sturm–Liouvilleove jednadžbe ne zadovoljava periodične rubne uvjete. Ako je $\lambda = 0$, tada rješenje jednadžbe

$$u(x) = A + Bx$$

zadovoljava rubne uvjete ako je

$$2B\pi = 0,$$

odnosno $B = 0$. Stoga je $\lambda = 0$ vlastita vrijednost sa pripadnim rješenjem $u_0(x) = 1$. Dakle, vlastite vrijednosti ovog problema su

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a pripadne vlastite funkcije su dane sa

$$1, \ \cos(nx), \ \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

3. Svojstva vlastitih vrijednosti i vlastitih funkcija Sturm-Liouvilleovog problema

Promotrimo sada neka važna svojstva Sturm-Liouvilleovog problema.

Teorem 7 (Lagrangeov identitet)**.** *Neka su u i v funkcije u domeni Sturm-Liouvilleovog operatora L. Tada vrijedi [3]*

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}\Big(p(uv' - vu')\Big).$$

Dokaz. Koristeći definiciju (3) Sturm-Liouvilleovog operatora imamo:

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u\frac{d}{dx}\Big(p\frac{dv}{dx}\Big) + quv - v\frac{d}{dx}\Big(p\frac{du}{dx}\Big) - quv \\ &= u\frac{d}{dx}\Big(p\frac{dv}{dx}\Big) - v\frac{d}{dx}\Big(p\frac{du}{dx}\Big) \\ &= p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') \\ &= \frac{d}{dx}\Big(p\,(uv' - vu')\Big). \end{aligned}$$

□

Teorem 8 (Abelova formula)**.** *Ako su u i v dva rješenja jednadžbe*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \le x \le b,$$

tada je $p(x)W(x;u,v)$ konstanta, gdje je

$$W(x;u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

Wronskijan funkcija u i v [3].

Dokaz. Prema pretpostavci u i v su rješenja jednadžbe $Lu+\lambda w(x)u = 0$, pa imamo

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(pu') + (q + \lambda w(x))u = 0 \\ &\frac{d}{dx}(pv') + (q + \lambda w(x))v = 0. \end{aligned}$$

Množeći prvu jednadžbu s v, a drugu s u, oduzimanjem dobivamo

$$v\frac{d}{dx}(pu') - u\frac{d}{dx}(pv') = 0. \tag{10}$$

Parcijalnom integracijom jednakosti (10) imamo

$$\begin{aligned}
&\int_a^x v\frac{d}{dt}\left(pu'\right) dt - \int_a^x u\frac{d}{dt}\left(pv'\right) dt \\
&\quad = v(t)p(t)u'(t)\Big|_a^x - \int_a^x pv'u'dt - u(t)p(t)v'(t)\Big|_a^x + \int_a^x pu'v'dt \\
&\quad = p(x)\left(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right) - p(a)\left(u'(a)v(a) - u(a)v'(a)\right) \\
&\quad = p(x)W(x; u, v) - p(a)\left(u'(a)v(a) - u(a)v'(a)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $p(x)W(x; u, v)$ konstanta. □

Vlastitoj vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema može pripadati jedna ili više vlastitih funkcija. U primjeru 6 vlastita vrijednost $\lambda_0 = 0$ ima jednu vlastitu funkciju $u_0(x) = 1$, dok svakoj vlastitoj vrijednosti $\lambda_n = n^2, n \geq 1$, pripadaju dvije vlastite funkcije $u_n(x) = \cos(nx)$ i $u_n(x) = \sin(nx)$.

Definicija 9. *Maksimalni broj linearno nezavisnih funkcija koje pripadaju istoj vlastitoj vrijednosti naziva se multiplicitet vlastite vrijednosti [1].*

Teorem 10. *Vlastite funkcije regularnog Sturm-Liouvilleovog problema jedinstvene su do na multiplikativnu konstantu [3].*

Dokaz. Neka su u i v rješenja regularnog Sturm-Liouvilleovog problema

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Rubni uvjeti za funkcije u i v u točki $x = a$ daju

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \tag{11}$$

$$a_1 v(a) + a_2 v'(a) = 0. \tag{12}$$

Barem jedan od koeficijenata a_1 i a_2 različit je od nule jer je po pretpostavci $a_1^2 + a_2^2 > 0$, a to implicira da sustav (11)–(12) ima netrivijalna rješenja za a_1 i a_2. Uočavamo da tada vrijedi

$$W(a; u, v) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Prema Abelovoj formuli je

$$p(x)W(x; u, v) = c, \quad a \leq x \leq b \tag{14}$$

za neki $c \in \mathbb{R}$. Kada je $x = a$ imamo

$$p(a)W(a; u, v) = c,$$

pa jednakost (13) implicira da je $c = 0$ jer je $p(a) > 0$. S obzirom da je Sturm-Liouvilleov problem regularan pa vrijedi $p(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$, iz jednakosti (14) slijedi

$$W(x; u, v) = 0$$

za svaki $x \in [a, b]$. Ovo implicira da su funkcije u i v linearno zavisne, tj. da vrijedi $u = \alpha v$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$. □

Iz prethodnog teorema slijedi da vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema imaju multiplicitet jedan [3].
Ova tvrdnja je vidljiva u primjerima 4 i 5. Ona ne vrijedi za periodični Sturm-Liouvilleov problem što se vidi iz primjera 6.

Definicija 11. *Skalarni umnožak na prostoru $L^2([a, b])$ s težinskom funkcijom w, $w(x) > 0$ za sve $x \in [a, b]$ definiran je sa [1]*

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx.$$

Ako je $w(x) = 1$, za svaki $x \in [a, b]$, tada pišemo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{15}$$

Teorem 12. *Neka su u i v funkcije u domeni Sturm-Liouvilleovog operatora L koje zadovoljavaju rubne uvjete*

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \qquad b_1u(b) + b_2u'(b) = 0, \tag{16}$$
$$a_1v(a) + a_2v'(a) = 0, \qquad b_1v(b) + b_2v'(b) = 0, \tag{17}$$

gdje je $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$. Tada je [3]

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle.$$

Dokaz. Ako funkcija v zadovoljava rubni uvjet (17), tada konjugirana funkcija $\overline{v}$ zadovoljava uvjete

$$a_1\overline{v}(a) + a_2\overline{v}'(a) = 0, \tag{18}$$
$$b_1\overline{v}(b) + b_2\overline{v}'(b) = 0, \tag{19}$$

jer su a_i i b_i realni koeficijenti za $i = 1, 2$. Integracijom Lagrangeovog identiteta za funkcije u i $\overline{v}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(uL\overline{v} - \overline{v}Lu\big)\,dx &= p(x)\big(u(x)\overline{v}'(x) - \overline{v}(x)u'(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= p(b)\big(u(b)\overline{v}'(b) - \overline{v}(b)u'(b)\big) - p(a)\big(u(a)\overline{v}'(a) - \overline{v}(a)u'(a)\big).\end{aligned}$$

Prema uvjetima (16) i (18) funkcije u i $\overline{v}$ zadovoljavaju

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \tag{20}$$

$$a_1\overline{v}(a) + a_2\overline{v}'(a) = 0. \tag{21}$$

Sustav (20)–(21) ima netrivijalna rješenja za a_1 i a_2 jer je barem jedan od koeficijenata a_1 i a_2 različit od nule, što implicira da je determinanta matrice sustava (20)–(21) jednaka

$$W(a; u, \overline{v}) = \begin{vmatrix} u(a) & \overline{v}(a) \\ u'(a) & \overline{v}'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Slično se pokazuje $W(b; u, \overline{v}) = 0$. Stoga slijedi

$$\int_a^b \big(uL\overline{v} - \overline{v}Lu\big)\, dx = 0. \tag{22}$$

Koeficijenti u operatoru L realne su funkcije pa vrijedi $L\overline{v} = \overline{Lv}$, stoga jednakost (22) možemo pisati u obliku

$$\int_a^b u\overline{Lv}\, dx = \int_a^b (Lu)\overline{v}\, dx,$$

odnosno

$$\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle.$$

□

Iz navedenog slijedi da je Sturm-Liouvilleov operator L hermitski operator jer vrijedi

$$\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle, \quad \forall u, v \in D(L).$$

Teorem 13. *Vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema su realne [3].*

Dokaz. Neka je λ vlastita vrijednost Sturm-Liouvilleovog problema i neka je u pripadna vlastita funkcija. Tada je $u \neq 0$ i

$$Lu = -\lambda w(x)u, \quad a \leq x \leq b.$$

Kako je operator Sturm-Liouvilleovog problema hermitski imamo

$$\langle Lu, u\rangle - \langle u, Lu\rangle = 0,$$

odnosno

$$\langle -\lambda wu, u\rangle - \langle u, -\lambda wu\rangle = 0.$$

Odavde slijedi

$$\lambda\langle wu, u\rangle - \overline{\lambda}\langle u, wu\rangle = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\int_a^b |u(x)|^2\, w(x)\, dx = 0. \tag{23}$$

Kako je

$$\int_a^b |u(x)|^2\, w(x)\, dx > 0$$

jer je $w(x) > 0$ za sve $x \in [a, b]$, jednakost (23) implicira $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, odnosno $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Iz navedenih se primjera vidi da vlastite vrijednosti λ_n Sturm-Liouvilleovog problema tvore rastući niz i $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$. Ovo zapažanje vrijedi općenito i dano je sljedećim teoremom.

Teorem 14. *Regularni Sturm-Liouvilleov problem ima beskonačan niz realnih vlastitih vrijednosti*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty. \tag{24}$$

Za svaku vrijednost λ_n odgovarajuća vlastita funkcija $u_n(x)$ jedinstveno je određena do na konstantu i ima točno n nultočaka u intervalu $[a, b]$ [3].

Umjesto dokaza, ilustrirajmo ovaj teorem sljedećim primjerom.

Primjer 15. *Promotrimo Sturm-Liouvilleov problem*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$
$$u(0) = 0,\ u(1) + hu'(1) = 0,\ \textit{gdje je } h > 0.$$

Uočavamo da je $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$. Rješenje ovog problema dano je sa

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Rubni uvjet $u(0) = 0$ daje $A = 0$ pa imamo

$$u(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Iz uvjeta $u(1) + hu'(1) = 0$ slijedi

$$B(\sin\sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Kako tražimo netrivijalna rješenja ($B \neq 0$), iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$\tan\sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}.$$

Ako definiramo $\alpha = \sqrt{\lambda}$, tada je

$$\tan\alpha = -h\alpha.$$

Ovo je transcendentalna jednadžba čija se rješenja mogu prikazati grafički pomoću presjeka grafova funkcija $\xi = \tan\alpha$ i $\xi = -h\alpha$, kao na slici 2. Uočavamo da postoji beskonačno mnogo rješenja α_n za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Svako rješenje α_n daje odgovarajuću vlastitu vrijednost

$$\lambda_n = \alpha_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prema tome, postoji uređeni niz vlastitih vrijednosti

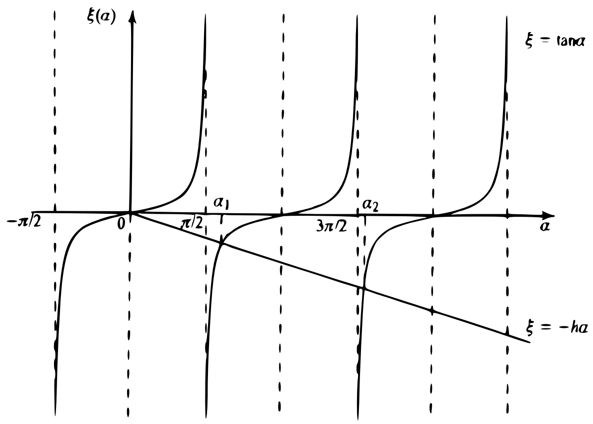
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Pripadna vlastita funkcija dana je sa

$$u_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$



Slika 2. Presjeci grafova funkcija $\xi = \tan\alpha$ i $\xi = -h\alpha$.

Teorem 16. *Vlastite funkcije koje pripadaju različitim vlastitim vrijednostima regularnog Sturm-Liouvilleovog operatora su ortogonalne u odnosu na skalarni umnožak* $\langle\, , \,\rangle_w$ *s težinskom funkcijom* w *[4].*

Dokaz. Neka su u i v vlastite funkcije regularnog Sturm-Liouvilleovog operatora L koje pripadaju vlastitim vrijednostima $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tada je

$$Lu = -\lambda_1 wu, \tag{25}$$

$$Lv = -\lambda_2 wv, \tag{26}$$

Također vrijedi

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \tag{27}$$

jer je L hermitski operator. Supstitucijom jednakosti (25) i (26) u jednakost (27) dobivamo

$$\langle \lambda_1 wu, v\rangle = \langle u, \lambda_2 wv\rangle,$$

odnosno, uzimajući u obzir da je w realna funkcija i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, imamo

$$\lambda_1 \int_a^b w(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx = \lambda_2 \int_a^b u(x)w(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

Iz toga slijedi

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u(x)\overline{v(x)}w(x)\,dx = 0.$$

Kako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, zaključujemo da je

$$\langle u, v\rangle_w = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}w(x)\,dx = 0. \tag{28}$$

Dakle, u i v su ortogonalne s obzirom na skalarni umnožak (28) s težinskom funkcijom w. □

Primjer 17. *Legendreova jednadžba*

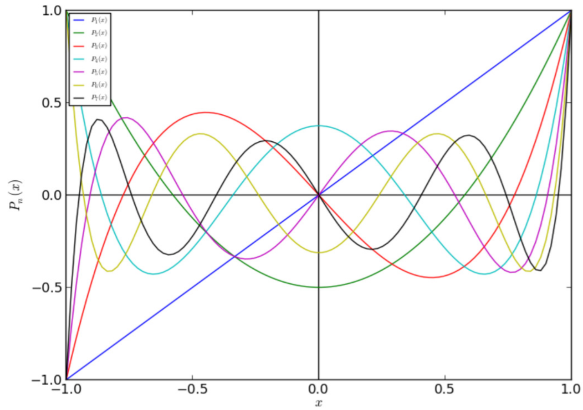
$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

s uvjetima da u i u' imaju konačan limes kada $x \to \pm 1$ singularni je Sturm-Liouvilleov problem.

U ovom problemu je $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$ pri čemu $p(x)$ iščezava za $x = \pm 1$. Legendreove funkcije (Legendreovi polinomi)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

su vlastite funkcije, a $\lambda_n = n(n+1)$ su vlastite vrijednosti ovog Sturm-Liouvilleovog problema. Uočavamo da vlastitih vrijednosti ima beskonačno mnogo i da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Također, vlastite funkcije $P_n(x)$ su ortogonalne u odnosu na skalarni produkt (15).



Slika 3. Legendreovi polinomi [7].

Literatura

[1] L. Debnath, P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, drugo izdanje, Academic Press, San Diego, 1999.

[2] A. N. Kolomogorov, S. V. Fomin, *Introductiory Real Analysis*, drugo izdanje, Dover Publications, New York, 1970.

[3] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations*, četvrto izdanje, Boston, 2007

[4] Y. Pinchover, J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambrige, 2007.

[5] Web link, `http://www.math.iitb.ac.in/~siva/ma41707/ode7.pdf`, Datum zadnjeg pristupa: 25.09.2020.

[6] Web link, `http://www.macs.hw.ac.uk/~robertw/F13YT2/chap6.pdf`, Datum zadnjeg pristupa: 20.09.2020.

[7] Web link, `http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html`, Datum zadnjeg pristupa: 25.09.2020.

Marija Čatipović
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,
Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Hrvatska
E-mail adresa: `mcatipov@fesb.hr`

Saša Krešić-Jurić
Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split, Hrvatska
E-mail adresa: skresic@pmfst.hr