ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.4 (2021) 125–135
Zaprimljen: 7. lipnja 2021.
Prihvaćen: 30. srpnja 2021.

Geometrijska definicija morfnih brojeva

Luka Marohnić, Bojan Kovačić

Sažetak

U članku se najprije izlažu geometrijske definicije zlatnog reza i plastične konstante kao podjele dužine u dva, odnosno tri dijela te se pokazuje kako su to jedini tzv. morfni brojevi. Zatim se definira generalizacija tih definicija za podjelu dužine u n dijelova. Na koncu se pokazuje da je baza generalizirane definicije nužno morfni broj te da takva dekompozicija dužine ne postoji za $n \geq 2$.

Ključni pojmovi: zlatni rez, plastična konstanta, morfni broj, omjerna dekompozicija

1. Uvod

Antički matematičar Euklid[1] u 6. je svesku svojega djela „Elementi" dao prvu poznatu pisanu definiciju zlatnoga reza (definicija 1).

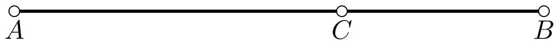
Definicija 1. *Dužina je prerezana u omjeru zlatnoga reza ako se cjelina prema većem dijelu odnosi jednako kao veći prema manjem dijelu.*

Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ i točka $C \in \overline{AB}$ takva da dijeli dužinu na veći dio $\overline{AC}$ i manji dio $\overline{BC}$ (vidi sliku 1), pri čemu je

$$\varphi = |AB| : |AC| = |AC| : |BC|. \tag{1}$$

Prema Euklidovoj definiciji, dužina $\overline{AB}$ je točkom C prerezana u omjeru

[1] Euklid iz Aleksandrije (3. st. p.n.e.), grčki matematičar, poznat i kao „otac geometrije"



Slika 1. Podjela dužine na dva dijela u omjeru zlatnog reza.

zlatnoga reza. Iz jednakosti (1) slijedi

$$\varphi + 1 = \frac{|AC|}{|BC|} + 1 = \frac{|AC| + |BC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \varphi^2 \quad (2)$$

i

$$\varphi - 1 = \frac{|AB|}{|AC|} - 1 = \frac{|AB| - |AC|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \varphi^{-1}. \quad (3)$$

Iz (2) slijedi da je broj φ nultočka polinoma $p(x) = x^2 - x - 1$. Lako se provjeri da su nultočke polinoma p realni brojevi $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Veličina φ je po definiciji omjer dviju duljina, dakle vrijedi $\varphi > 0$. Odatle slijedi

$$\varphi = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots$$

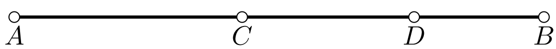
2. Plastična konstanta

Nizozemski arhitekt Hans van der Laan smatrao je da zlatni rez nije pogodan izbor za usklađivanje omjera veličina dvaju *tijela*. On je tragao za veličinom između 1 i φ koja bi bila posljedica neke geometrijske definicije analogne definiciji 1. Tako je 1928. godine definirao realan broj ψ koji je nazvao *plastična konstanta*. Na toj je konstanti utemeljio vlastitu teoriju sustava proporcija u arhitekturi, koja je opisana u [5].

Hans van der Laan pri konstrukciji plastične konstante polazi od podjele dužine $\overline{AB}$ dvjema točkama C i D na tri dijela (vidi sliku 2) tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \psi = |AB| : |AD| = |AD| : |BC| = |BC| : |AC| \\ = |AC| : |CD| = |CD| : |BD|. \quad (4) \end{aligned}$$

Slično kao u slučaju zlatnoga reza, iz jednakosti (4) slijedi



Slika 2. Podjela dužine na tri dijela koji se odnose u omjeru plastične konstante.

$$\psi + 1 = \frac{|AC|}{|CD|} + 1 = \frac{|AC| + |CD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|CD|} = \psi^3 \tag{5}$$

i

$$\begin{aligned} \psi - 1 = \frac{|AB|}{|AD|} - 1 = \frac{|AB| - |AD|}{|AD|} &= \frac{|BD|}{|AD|} \\ &= \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CD|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|AD|} = \psi^{-4}. \end{aligned} \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) slijedi da je plastična konstanta realna nultočka polinoma $q(x) = x^3 - x - 1$. Uz oznaku $r(x) = x^5 - x^4 - 1$, direktnim računom lako se pokazuje da vrijedi

$$r(x) = q(x)(x^2 - x + 1). \tag{7}$$

Prema tome, ψ je također nultočka polinoma r.

Primjenom Cardanove formule za rješenja jednadžbe $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ trećeg stupnja

$$x = \sqrt[3]{V + \sqrt{V^2 + (W - U^2)^3}} + \sqrt[3]{V - \sqrt{V^2 + (W - U^2)^3}}$$

gdje je

$$U = -\frac{b}{3a},\ V = U^3 + \frac{bc - 3ad}{6a^2},\ Q = \frac{c}{3a},$$

lako se pokazuje da je ψ jedinstvena realna nultočka polinoma q i da vrijedi

$$\psi = \frac{\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}}}{6} = 1.324717\ldots$$

Iz jednakosti (7) slijedi da je ψ jedinstvena realna nultočka polinoma r, budući da je diskriminanta faktora $x^2 - x + 1$ na desnoj strani te jednakosti jednaka -3, što znači da isti nema realnih nultočaka.

Jednakosti u (4) nisu međusobno nezavisne. Točnije, vrijede sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 2. *Neka je $\overline{AB}$ zadana dužina. Tada postoje jedinstvene točke $C, D \in \overline{AB}$ takve da je $A \neq C \neq D \neq B$ i*

$$|AB| : |AD| = |AD| : |BC| = |BC| : |AC|.$$

Dokaz. Radi jednostavnosti, a bez smanjenja općenitosti, može se pretpostaviti da je $|AB| = 1$. Nadalje, neka su $c = |AC|$ i $d = |AD|$. Budući da je $|AB| = |AC| + |BC|$, vrijedi $|BC| = 1 - c$. Sada iz jednakosti $|AB| : |AD| = |AD| : |BC|$ slijedi

$$1 : d = d : (1 - c) \implies d^2 = 1 - c.$$

S druge strane, iz jednakosti $|AD| : |BC| = |BC| : |AC|$ slijedi

$$d : (1 - c) = (1 - c) : c \implies d = \frac{(1 - c)^2}{c}.$$

Time se dobiva sustav jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} d^2 = 1 - c, \\ \ d = \dfrac{(1 - c)^2}{c}. \end{cases} \tag{8}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe tog sustava u prvu dobiva se

$$\left(\frac{(1 - c)^2}{c}\right)^2 = 1 - c. \tag{9}$$

Za $c = 1$ dobiva se $B = C$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $A \neq B \neq C \neq D$. Prema tome, $c \neq 1$, pa se dijeljenjem jednadžbe (9) s $1 - c$ dobiva

$$\frac{(1 - c)^3}{c^2} = 1 \implies c^3 - 2c^2 + 3c - 1 = 0. \tag{10}$$

Primjenom Cardanove formule slijedi da jednadžba (10) ima jedinstveno realno rješenje $c \approx 0.43016$. Sada iz prve jednadžbe sustava (8), uvažavajući nejednakost $0 < d < 1$, slijedi $d \approx 0.75488$. Time je dokaz propozicije završen. $\square$

Propozicija 3. *Za točke A, B, C i D iz propozicije 2 vrijede sljedeće jednakosti:*

a) $|AB| : |AD| = |AC| : |CD|$,
b) $|AC| : |CD| = |CD| : |BD|$.

Dokaz. Neka su c i d realni brojevi definirani kao u dokazu propozicije 2. Iz prve jednadžbe u (8) slijedi $(1 - c)^3 - c^2 = 0$, pa je

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AD|} - \frac{|AC|}{|CD|} &= \frac{1}{d} - \frac{c}{d - c} = \frac{d - c - cd}{d(d - c)} = \frac{d(1 - c) - c}{d(d - c)} \\ &= \frac{\frac{(1-c)^2}{c}(1 - c) - c}{d(d - c)} = \frac{(1 - c)^3 - c^2}{cd(d - c)} = 0, \end{aligned}$$

odakle izravno slijedi a). Analogno se dobiva

$$\begin{aligned}\frac{|AC|}{|CD|}-\frac{|CD|}{|BD|}&=\frac{c}{d-c}-\frac{d-c}{1-d}=\frac{c-cd-d^2-2cd-c^2}{(d-c)(1-d)}=\\&=\frac{c-d^2+cd-c^2}{(d-c)(1-d)}=\frac{c-(1-c)+(1-c)^2-c^2}{(d-c)(1-d)}=\\&=\frac{c-1+c+1-2c+c^2-c^2}{(d-c)(1-d)}=0,\end{aligned}$$

što povlači tvrdnju b). □

3. Morfni brojevi

Zlatni rez i plastična konstanta matematički su zanimljivi, između ostaloga, i zbog činjenice da vrijede jednakosti (2) i (3), odnosno (5) i (6). Naime, ti brojevi dodavanjem odnosno oduzimanjem jedinice prelaze u svoje cjelobrojne potencije, što je motivacija za sljedeću definiciju [1].

Definicija 4. *Realan broj $\mu > 1$ naziva se* morfni broj *ako postoje prirodni brojevi k i l takvi da vrijedi*

$$\mu+1=\mu^k,\quad \mu-1=\mu^l. \tag{11}$$

Prirodno se postavlja pitanje: postoje li još neki morfni brojevi osim φ i ψ? Odgovor daje sljedeći teorem, dokazan u [1].

Teorem 5. *Ako je μ morfni broj, tada je nužno $\mu \in \{\varphi, \psi\}$.*

Tvrdnja teorema 5 posljedica je sljedećih dvaju rezultata u teoriji polinoma (posebno, trinoma) koje su prije više od pola stoljeća objavila dvojica norveških matematičara, Ernst Selmer i Helge Tverberg. Prilično složeni dokazi tih tvrdnji na ovom su mjestu izostavljeni. Najprije dajemo definiciju ireducibilnosti polinoma.

Definicija 6. *Za polinom $p(x)$ kažemo da je* ireducibilan *u $\mathbb{Z}[x]$ ako se ne može prikazati kao umnožak dvaju polinoma s cjelobrojnim koeficijentima čiji su stupnjevi veći ili jednaki 1.*

Teorem 7 (Selmer, 1956)**.** *Trinom oblika $x^n - x - 1$ je ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$ za svaki prirodan broj $n \geq 3$.*

Dokaz. Vidjeti u [3]. □

Teorem 8 (Tverberg, 1960)**.** *Trinom oblika $x^m \pm x^k \pm 1$, gdje je $m \geq 3$ i $k < m$, je ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$ ili se može zapisati u obliku umnoška ireducibilnog polinoma i polinoma čije su nultočke po modulu jednake 1.*

Dokaz. Vidjeti u [4]. □

U dokazu teorema 5 važnu ulogu imaju sljedeće dvije leme.

Lema 9. *Trinom oblika $x^m - x^{m-1} - 1$, gdje je $m \geq 3$, je ireducibilan ili se može zapisati u obliku umnoška ireducibilnog polinoma i trinoma $x^2 - x + 1$.*

Dokaz. Neka je $m \geq 3$. Prema teoremu 8, trinom $f(x) = x^m - x^{m-1} - 1$ je ireducibilan ili ga je moguće zapisati u obliku umnoška ireducibilnog polinoma i nekog polinoma g čije su nultočke po modulu jednake 1. Budući da za svaku nultočku $z \in \mathbb{C}$ trinoma $f(x)$ vrijedi

$$|z^m - z^{m-1}| = |z^{m-1}(z-1)| = 1 \implies |z|^{m-1} = \frac{1}{|z-1|},$$

ta jednakost mora vrijediti za svaku nultočku ξ polinoma g. Iz toga zbog $|\xi| = 1$ slijedi $|\xi - 1| = 1$. Posljednje dvije jednakosti, uz oznaku $\psi = x + \mathrm{i}y$, vode do sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Posljednja jednadžba raspisivanjem binoma $(x-1)^2$ prelazi u $x^2 + y^2 = 2x$, pa zbog prve jednadžbe mora biti $x = \frac{1}{2}$. Sada je $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\arg \xi = \pm\frac{\pi}{3}$. Dakle,

$$\xi = \mathrm{e}^{\pm\pi/3}.$$

To znači da je $g(x) = (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}) = x^2 - x + 1$, što je i trebalo pokazati. □

Lema 10. *Neka je K označeno polje racionalnih, realnih odnosno kompleksnih brojeva i neka je $f \in K[x]$ ireducibilni polinom. Ako f ima nultočku $\xi \in \mathbb{C}$, tada f dijeli svaki polinom $g \in K[x]$ za koji vrijedi $g(\xi) = 0$.*

U dokazu ove leme koristi se sljedeći dobro poznati rezultat u teoriji polinoma.

Teorem 11 (Bézoutov identitet za polinome)**.** *Za svaki par polinoma $f, g \in K[x]$ postoje polinomi $u, v \in K[x]$ takvi da vrijedi*

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \mathrm{NZD}(f, g),$$

gdje $\mathrm{NZD}(f,g)$ *označava najveći zajednički djelitelj polinoma f i g u prstenu $K[x]$.*

Dokaz Leme 10. Neka su $f, g \in K[x]$ polinomi koji imaju zajedničku nultočku $\xi \in \mathbb{C}$ i neka je f ireducibilan. Tada vrijedi

$$\mathrm{NZD}(f, g) \in \{1, f\} \tag{12}$$

budući da je f djeljiv samo jedinicom prstena $K[x]$ i samim sobom.

Pretpostavimo da je $\mathrm{NZD}(f, g) = 1$. Iz teorema 11 slijedi da postoje polinomi u i v takvi da vrijedi $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Budući da polinomi f i g imaju zajedničku nultočku ξ, lijeva strana posljednje jednakosti iščezava za $x = \xi$ što povlači $0 = 1$, a to je nemoguće. Prema tome, $\mathrm{NZD}(f, g) \neq 1$ pa iz (12) slijedi da mora biti $\mathrm{NZD}(f, g) = f$. Dakle, f dijeli g kako se i tvrdilo. □

Dokaz Teorema 5. Neka je μ morfni broj. Po definiciji, tada je $\mu > 1$ i vrijede jednakosti (11). Iz prve od te dvije jednakosti slijedi da je μ realna nultočka polinoma $f(x) = x^n - x - 1$ za $n = k$. Budući da množenjem druge jednakosti u (11) s μ^l slijedi $\mu^{l+1} - \mu^l = 1$, broj μ je ujedno i realna nultočka polinoma $g(x) = x^m - x^{m-1} - 1$ za $m = l + 1$.

Za $m = n = 2$ je $f(x) = g(x) = x^2 - x - 1$, odakle zbog $\mu > 1$ i jednakosti (2) slijedi $\mu = \varphi$.

Neka su $m, n \geq 3$. Prema teoremu 7, polinom f je ireducibilan. Budući da polinomi f i g imaju zajedničku nultočku μ, iz leme 10 slijedi da f dijeli g. Dakle, polinom g može se zapisati u obliku umnoška ireducibilnog polinoma f i nekog polinoma h, pa je prema lemi 9 nužno $h(x) = x^2 - x + 1$, odnosno vrijedi

$$x^m - x^{m-1} - 1 = (x^n - x - 1)(x^2 - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gornja jednakost raspisivanjem desne strane prelazi u

$$x^m - x^{m-1} - 1 = x^{n+2} - x^{n+1} + x^n - x^3 - 1. \tag{13}$$

Ako su dva polinoma jednaka, tada nužno imaju isti stupanj, pa iz jednakosti (13) slijedi $m = n + 2$. Uvrštavanjem u (13) slijedi $x^n - x^3 = 0$, odakle je $n = 3$. Budući da je tada $m = 5$, polinomi f i g su jednoznačno određeni i vrijedi

$$f(x) = x^3 - x - 1 = q(x) \quad \text{i} \quad g(x) = x^5 - x^4 - 1 = r(x).$$

U prethodnom je odjeljku pokazano da je plastična konstanta jedinstvena realna nultočka polinoma q i r, pa vrijedi $\mu = \psi$, čime je dokaz završen. □

4. Morfni brojevi u geometriji

Način na koji je Hans van der Laan generalizirao Euklidovu geometrijsku definiciju zlatnog reza motivacija je za još općenitiju definiciju. Cilj je ustanoviti postoje li još neke (složenije) podjele zadane dužine analogne onima koje su dali Euklid i van der Laan.

U geometrijskim definicijama zlatnog reza i plastične konstante dužina $\overline{AB}$ dijeli na n dijelova, gdje je $n = 2$ u slučaju zlatnog reza a $n = 3$ u slučaju plastične konstante. No, sveukupno možemo identificirati $N = \frac{n(n+1)}{2}$ različitih dužina na slici 1, odnosno na slici 2, budući da se na $\overline{AB}$ nalazi ukupno $n + 1$ različitih točaka. Ako te dužine poredamo po duljini od najdulje do najkraće, npr. u niz $d_1, d_2, \ldots, d_N$, tada mora vrijediti $\frac{|d_k|}{|d_{k+1}|} = \mu$ za $k = 1, 2, \ldots, N-1$, pri čemu je $\mu = \varphi$ za $n = 2$ odnosno $\mu = \psi$ za $n = 3$. Uočimo da su duljine $|d_1|, |d_2|, \ldots, |d_N|$ uzastopni članovi geometrijskog niza s količnikom μ. Otuda motivacija za termin *omjerna dekompozicija* koji je definiran u nastavku, a skovan je za potrebe ovog teksta.

Definicija 12. *Neka su $n \geq 2$ prirodni broj i $A = P_0, P_1, \ldots, P_n = B$ međusobno različite kolinearne točke takve da vrijedi $P_k \in \overline{P_{k-1}P_n}$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ako vrijede jednakosti*

$$\beta = \frac{x_0^{(n)}}{x_0^{(n-1)}} = \frac{x_0^{(n-1)}}{x_1^{(n-1)}} = \tag{14}$$

$$= \frac{x_1^{(n-1)}}{x_0^{(n-2)}} = \frac{x_0^{(n-2)}}{x_1^{(n-2)}} = \frac{x_1^{(n-2)}}{x_2^{(n-2)}} =$$

$$\vdots$$

$$= \frac{x_{n-2}^{(2)}}{x_0^{(1)}} = \frac{x_0^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \cdots = \frac{x_{n-2}^{(1)}}{x_{n-1}^{(1)}}, \tag{15}$$

gdje je $x_3^{(s)} = |P_r P_{r+s}|$ za $r = 0, 1, \ldots, n-s$, tada podjelu dužine $\overline{AB}$ točkama $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ u n dijelova nazivamo omjerna dekompozicija reda *n, a broj β nazivamo* baza *te dekompozicije.*

Propozicija 13. *Za bazu β omjerne dekompozicije reda $n \geq 2$ vrijedi $\beta > 1$.*

Dokaz. Budući da su A, P_{n-1} i B međusobno različite točke i $P_{n-1} \in \overline{AB}$, očito je $x_0^{(n-1)} = |AP_{n-1}| < |AB| = x_0^{(n)}$ pa iz prve jednakosti u (14) slijedi tvrdnja. □

Propozicija 14. *Jednakosti* (14)–(15) *podudaraju se s jednakostima* (1) *za* $n = 2$*, odnosno s jednakostima* (4) *za* $n = 3$*.*

Dokaz. Tvrdnja propozicije slijedi raspisivanjem definicije 12 za $n = 2$, odnosno za $n = 3$, uz oznake $C = P_1$ i $D = P_2$. Detalji su prepušteni čitatelju. □

Korolar 15. *Baza omjerne dekompozicije reda 2, odnosno reda 3 jednaka je zlatnom rezu* φ*, odnosno plastičnoj konstanti* ψ*.*

Sljedeći teorem pokazuje da omjerna dekompozicija može poslužiti kao geometrijska definicija morfnih brojeva.

Teorem 16. *Broj* μ *je morfni broj ako i samo ako je baza neke omjerne dekompozicije.*

Dokaz. Neka je μ morfni broj. Zbog teorema 5 tada je nužno $\mu = \varphi$ ili $\mu = \psi$, pa je prema korolaru 15 μ baza omjerne dekompozicije reda 2 ili reda 3.

Neka je sada μ jednak bazi β omjerne dekompozicije reda n dužine $\overline{AB}$. Uz oznake kao u definiciji 12, iz (15) slijedi

$$\beta = \frac{x_0^{(1)}}{x_1^{(1)}}, \quad \beta = \frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}}, \quad \ldots, \quad \beta = \frac{x_{n-2}^{(1)}}{x_{n-1}^{(1)}}. \tag{16}$$

Množenjem svih jednakosti u (16) dobiva se

$$\beta^{n-1} = \frac{x_0^{(1)}}{x_{n-1}^{(1)}}. \tag{17}$$

Po definiciji je $x_0^{(n-1)} = |P_0P_{n-1}| = |P_0P_n| - |P_{n-1}P_n| = x_0^{(n)} - x_{n-1}^{(1)}$, a na sličan način slijedi i $x_1^{(n-1)} = x_0^{(n)} - x_0^{(1)}$. Uvrštavanjem dobivenih jednakosti u (14) slijedi

$$\beta = \frac{x_0^{(n)}}{x_0^{(n)} - x_{n-1}^{(1)}} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{x_0^{(n)} - x_{n-1}^{(1)}}{x_0^{(n)} - x_0^{(1)}}. \tag{18}$$

Neka je radi jednostavnosti $a = x_0^{(1)}$, $b = x_{n-1}^{(1)}$ i $c = x_0^{(n)} = |AB|$. Uz navedene oznake, jednakosti (17) i (18) mogu se zapisati u obliku

$$\beta^{n-1} = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{c}{c-b} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{c-b}{c-a}. \tag{19}$$

Iz druge jednakosti u (19) dobiva se

$$\beta^{-1} = \frac{c-b}{c} = 1 - \frac{b}{c} \implies \frac{c}{b} = \frac{\beta}{\beta - 1}, \tag{20}$$

a zatim iz treće jednakosti u (19) slijedi

$$\beta = \frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}} = \frac{\frac{c}{b}-1}{\frac{c}{b}-\frac{a}{b}} = \frac{\frac{\beta}{\beta-1}-1}{\frac{\beta}{\beta-1}-\beta^{n-1}} = \frac{1}{\beta+\beta^{n-1}-\beta^n}.$$

Iz toga slijedi da $\beta^2 - 1 = \beta^{n+1} - \beta^n$, odnosno $(\beta-1)(\beta+1) = \beta^n(\beta-1)$. Prema propoziciji 13 je $\beta > 1$, pa se dobivena jednakost može podijeliti brojem $\beta - 1$, što daje

$$\beta + 1 = \beta^n. \tag{21}$$

Jednakost (21) je poseban slučaj prve jednakosti u (11) za $k = n$. Za zaključak da je β morfni broj dovoljno je dokazati da β zadovoljava i drugu jednakost u (11) za neki $l \in \mathbb{N}$. Iz k-te linije između (14) i (15) slijede jednakosti

$$\beta = \frac{x_{k-1}^{(n+1-k)}}{x_0^{(n-k)}}, \quad \beta = \frac{x_0^{(n-k)}}{x_1^{(n-k)}}, \quad \beta = \frac{x_1^{(n-k)}}{x_2^{(n-k)}}, \quad \ldots, \quad \beta = \frac{x_{k-1}^{(n-k)}}{x_k^{(n-k)}},$$

koje pomnožene daju

$$\beta^{k+1} = \frac{x_{k-1}^{(n+1-k)}}{x_k^{(n-k)}}. \tag{22}$$

Međusobnim množenjem jednakosti (22) za sve $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dobiva se

$$\beta^N = \frac{x_0^{(n)}}{x_1^{(n-1)}} \cdot \frac{x_1^{(n-1)}}{x_2^{(n-2)}} \cdot \frac{x_2^{(n-2)}}{x_3^{(n-3)}} \cdots \frac{x_{n-2}^{(2)}}{x_{n-1}^{(1)}} = \frac{x_0^{(n)}}{x_{n-1}^{(1)}}, \tag{23}$$

gdje je $N = \sum_{k=2}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \geq 2$. S obzirom na ranije uvedene oznake a, b i c, iz (23) slijedi $\beta^N = \frac{c}{b}$, a ta jednakost primjenom posljednje jednakosti u (20) prelazi u

$$\beta - 1 = \beta^{1-N}. \tag{24}$$

Jednakost (24) je poseban slučaj druge jednakosti u (11) za $l = N - 1$, čime je dokaz završen. □

Propozicija 17. *Ne postoji omjerna dekompozicija reda $n > 3$.*

Dokaz. Neka je $n > 3$ prirodni broj i pretpostavimo da je β baza omjerne dekompozicije reda n. Tada je prema teoremu 16 β morfni broj za koji je ispunjena jednakost(21), a prema teoremu 5 je $\beta \in \{\varphi, \psi\}$.

Pretpostavimo li da je $\beta = \varphi$, tada je β nultočka polinoma $p(x) = x^2 - x - 1$, a zbog (21) ujedno i nultočka polinoma $f(x) = x^n - x - 1$. Budući da su prema teoremu 7 polinomi p i f ireducibilni, iz leme 10 slijedi da p dijeli f i obratno. To znači da su p i f jednaki, odakle je $2 = \deg p = \deg f = n > 3$, što je nemoguće.

Na analogan način pokazuje se da ne može biti $\beta = \psi$. Dakle, pretpostavka da postoji omjerna dekompozicija reda $n > 3$ vodi proturječju, što potvrđuje tvrdnju propozicije. $\square$

Literatura

[1] J. Aarts, R. Fokkink, G. Kruijtzer, *Morphic numbers*, Nieuw Arch Wisk, **5**(2):56–58, 2001.

[2] L. N. Childs, *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, Springer Verlag, New York, 1995.

[3] E. Selmer, *On the irreducibility of certain trinomials*, Math Scand, **4**, 287–302, 1956.

[4] H. Tverberg, *On the irreducibility of the polynomials* $x^n \pm x^m \pm 1$, Math Scand, **8**, 121–126, 1960.

[5] D. H. van der Laan, *Arhitektonski prostor*. ArTresor naklada, Zagreb, 2012.

Luka Marohnić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Konavoska 2, Hrvatska
E-mail adresa: luka.marohnic@tvz.hr

Bojan Kovačić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Konavoska 2, Hrvatska
E-mail adresa: bojan.kovacic@tvz.hr