Postavljanje pitanja samima sebi

Jens Carstensen, Alija Muminagić

U ovom članku želimo pokazati kako postavljanjem pitanja samima sebi, nalazimo puno interesantnih stvari. Krenuli smo od dobro poznatog (i zanimljivog) zadatka, koji se može rješavati na mnogo različitih načina (planimetrijski, trigonometrijski, stereometrijski, pomoću analitičke geometrije), no odabrali smo rješavanje pomoću kompleksnih brojeva i propitujući se dolazimo do zanimljivih dokaza. Istina je da do njih možemo doći na razne načine.

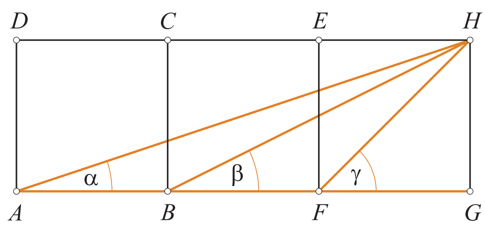
Promatrajmo ovaj zadatak.

Dana su tri povezana kvadrata: $ABCD$, $BFEC$, $FGHE$. Dokažimo

$$\sphericalangle HAG + \sphericalangle HBG + \sphericalangle HFG = 90^\circ.$$

Rješenje. Neka je $\sphericalangle HAG = \alpha$, $\sphericalangle HBG = \beta$, $\sphericalangle HFG = \gamma = 45^\circ$. Tako je $\alpha + \beta + 45^\circ = 90^\circ$, odakle je $\alpha + \beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Neka je $|AB| = 1$. Imamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}45^\circ = 1, \quad \text{tj.} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}1.$$



Slika 1.

Dokazat ćemo

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

Kompleksni brojevi $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 + i$ imaju argumente:

$$\arg(3+i) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}, \quad \arg(2+i) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

Nadalje, zbog $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 \cdot z_2)$, imamo

$$\arg(3+i) + \arg(2+i) = \arg((3+i)(2+i)) = \arg(5(1+i)) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Sada se možemo zapitati: za koje pozitivne cijele brojeve a i b vrijedi

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b} = \frac{\pi}{4}?$$

Rješenje. Imamo $(a+i)(b+i)=k(1+i) \iff ab+(a+b)i-1=k+ki$ i nakon izjednačavanja realnih i imaginarnih dijelova dobivamo

$$ab-1=k, \quad a+b=k \implies ab-1=a+b \iff (a-1)(b-1)=2.$$

Dakle, $a-1=1$ i $b-1=2$ (ili obrnuto) pa je jedno rješenje već nađeno: $a=2$, $b=3$.

2. Potražimo sada za koje pozitivne cijele brojeve a, b, c vrijedi

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c}=\frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Rješenje. Sada imamo:

$$(a+i)(b+i)(c+i)=k(1+i) \iff abc-a-b-c+(ab+bc+ca-1)i=k(1+i)$$

te

$$abc-a-b-c=ab+bc+ca-1. \tag{3}$$

Treba odrediti sve uređene trojke (a,b,c) prirodnih brojeva takvih da vrijedi (3).

Jednadžbu (3) možemo pisati u obliku

$$(a-1)(b-1)(c-1)=2(a+b+c-1).$$

Smjenom

$$x=a-1, \quad y=b-1, \quad z=c-1$$

dobivamo

$$xyz=2(x+y+z+2) \iff xy=2\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1+\frac{2}{z}\right).$$

Ne smanjujući općenitost možemo pretpostavti

$$a\le b\le c \iff x\le y\le z.$$

Dobivamo

$$2\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1+\frac{2}{z}\right)\le 2(1+1+1+2)=10$$

tj.

$$xy\le 10 \iff (a-1)(b-1)\le 10.$$

Zato su rješenja $(a,b,c)\in\{(2,5,8),(2,4,13),(3,3,7)\}$ jedina.

3. Dajemo i jedan geometrijski dokaz jednakosti

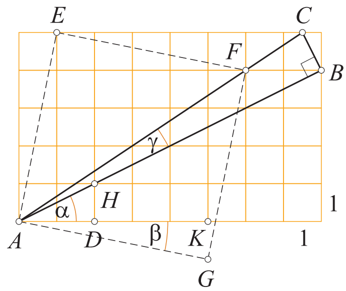
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Ovu formulu je dokazao austrijski matematičar Schulz von Strassnitzky (1803.–1852.), ali se dokaz često pripisuje Zachariausu Daseu (1824.–1861.), kojeg su od milja nazivali *čovjek računski stroj*.

Sa slike 2 imamo:

$$\measuredangle HAD=\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}, \quad \measuredangle KAG=\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}, \quad \measuredangle CAB=\gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

(Kod posljednje jednakosti koristimo sličnost i Pitagorin poučak.)



Slika 2.

Kako je $AEFG$ kvadrat, slijedi $\sphericalangle CAG = \frac{\pi}{4}$ i konačno $\alpha + \beta + \gamma = 45°$ ili

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Promatrajmo formule:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Odavde je

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}. \tag{5}$$

Ispitajmo da li je (5) jedina ispravna formula!

Neka je

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}.$$

U kompleksnoj notaciji je:

$$(a+i)(b+i) = k(3+i) \iff ab - 1 + (a+b)i = 3k + ki$$

pa je $ab - 1 = 3k$, $a + b = k$ i odavde

$$ab - 1 = 3(a+b) \iff (a-3)(b-3) = 10. \tag{6}$$

Radi simetrije između a i b dobivamo:

$$a - 3 = 2, \quad b - 3 = 5 \quad \text{tj.} \quad a = 5, \quad b = 8,$$

i

$$a - 3 = 1, \quad b - 3 = 10 \quad \text{tj.} \quad a = 4, \quad b = 13.$$

Dakle,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}, \tag{7}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}. \tag{8}$$

Uvrštavanjem (7) i (8) u (1) dobivamo:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4}.$$

(Usporedi i s (2).)

5. Promatrajući formulu (5) uočavamo brojeve 3, 5, 8. Podsjetimo se: brojevi definirani s

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{za} \quad n \geq 1 \tag{9}$$

nazivaju se Fibonaccijevi[1] brojevi. Osim toga postoji i tzv. Cassinijev[2] identitet:

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n. \tag{10}$$

Pogledajmo što dobivamo primjenjujući istu metodu rješavanja kao u (1). Tada je

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{tj.} \quad k(F+i) = (a+i)(b+i).$$

Odavde dobivamo

$$kF+ki = ab-1+(a+b)i \quad \text{tj.} \quad ab-1 = kF \quad \text{i} \quad a+b = k, \quad \text{a odavde} \quad ab-1 = (a+b)F$$

$$\iff (a-F)(b-F) = F^2 + 1. \tag{11}$$

Ako u (10) pomaknemo indeks $n \to 2n$, dobivamo

$$F_{2n-1}F_{2n+1} = F_{2n}^2 + 1 \tag{12}$$

i stavimo

$$a = F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}, \quad b = F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+2} \quad \text{i} \quad F = F_{2n}. \tag{13}$$

Uvrštavanjem (13) u (11) dobivamo

$$(F_{2n-1} + F_{2n} - F_{2n})(F_{2n+1} + F_{2n} - F_{2n}) = F_{2n-1}F_{2n+1} = F_{2n}^2 + 1.$$

Stoga (12) vrijedi.

Dakle,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$

Npr.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} \quad \text{i} \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{21}. \tag{14}$$

Tako je zbog (1) i (14):

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}\\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{21}.\end{aligned}$$

Generaliziraj!

Literatura

[1] J. Carstensen, A. Muminagić, *Matematiske perler*, Frederiksberg 2004, s. 64–67.

[1] Leonardo Pisano Fibonacci (1170. – 1250.), poznati talijanski matematičar.

[2] Jean Dominique Cassini (1625. – 1712.), francuski zvjezdoznanac.