Polialternativne konačne sume u eksplicitnom obliku, 2. dio

Petar Svirčević[1]

Zadatak 13. Dokažimo

$$\begin{aligned}
S(n) &= 1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7-7\cdot 9-9\cdot 11-11\cdot 13+\ldots+f_3(n)\,(2n-1)\,(2n+1)\\
&= \left(-2n^2+6n-1\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+5}{6}-\left\lfloor\frac{n+5}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\left(2n^2+10n-10\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+4}{6}-\left\lfloor\frac{n+4}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\left(6n^2+6n-19\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{6}-\left\lfloor\frac{n+3}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\left(2n^2-6n-18\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{6}-\left\lfloor\frac{n+2}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\left(-2n^2-10n-9\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{6}-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\left(-6n^2-6n\right)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{6}-\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right)\right).
\end{aligned}\tag{74}$$

Uputa. Budući je $S(n)=4\overline{S}_{3,2}(n)-\overline{S}_{3,0}(n)$, ako uvrstimo (60) i (71), dobivamo (74).

Provjera. I u ovom slučaju ćemo napraviti malo detaljniju kontrolu formule (74).

Ako je $n=1$, $S(1)=1\cdot 3=3$.

$$S(1)=\left(-2\cdot 1^2+6\cdot 1-1\right)\cdot 1+0+0+0+0+0=3,$$

dakle formula je točna.

Ako je $n=2$, $S(2)=1\cdot 3+3\cdot 5=18$, a iz (74)

$$S(2)=0+\left(2\cdot 2^2+10\cdot 2-10\right)\cdot 1+0+0+0+0=18,$$

dakle formula je točna.

Ako je $n=3$, $S(3)=1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7=53$, a iz (74)

$$S(3)=0+0+\left(6\cdot 3^2+6\cdot 3-19\right)\cdot 1+0+0+0=53,$$

dakle formula je točna.

Ako je $n=4$, $S(3)=1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7-7\cdot 9=-10$, a iz (74)

$$S(4)=0+0+0+\left(2\cdot 4^2-6\cdot 4-18\right)\cdot 1+0+0=-10,$$

dakle formula je točna.

Ako je $n=5$, $S(5)=1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7-7\cdot 9-9\cdot 11=-109$, a iz (74)

$$S(5)=0+0+0+0+\left(-2\cdot 5^2-10\cdot 5-9\right)\cdot 1+0=-109,$$

dakle formula je točna.

Ako je $n=6$, $S(6)=1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7-7\cdot 9-9\cdot 11-11\cdot 13=-252$, a iz (74)

$$S(6)=0+0+0+0+0+\left(-6\cdot 6^2-6\cdot 6\right)\cdot 1=-252,$$

dakle formula je i ovdje točna.

[1] Autor je profesor u mirovini na Tehničkoj školi Zagreb; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

Zadatak 14. Dokažimo

$$\begin{aligned}
S(n) &= (1a+b)+(2a+b)-(3a+b)-(4a+b)+\ldots+f_2(n)\,(na+b)\\
&= (a+b)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{4}-\left\lfloor\frac{n+3}{4}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+(an+a+2b)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{4}-\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+b\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{4}-\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor\right)\right)+(-an)\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{4}-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)\right).
\end{aligned}\tag{75}$$

Uputa. Vidimo $S(n)=a\overline{S}_{2,1}(n)+b\overline{S}_{2,0}(n)$, a iz (35) i (70) dobivamo (75).

Provjera. Ako je $n=2$, izravnim računom dobijemo $S(2)=(1a+b)+(2a+b)=3a+2b$, a isto i pomoću (75): $S(2)=0+(2a+a+2b)+0+0=3a+2b$.

Ako je $n=5$, izravno je $S(5)=(1a+b)+(2a+b)-(3a+b)-(4a+b)+(5a+b)=a+b$, a pomoću (75) je isto: $S(5)=(a+b)1+0+0+0=a+b$.

Zadatak 15. Dokažimo

$$\overline{S}_{2,3}(4n)=\sum_{m=1}^{4n} f_2(m)\,m^3=-64n^3-24n^2+6n. \tag{76}$$

Rješenje. U rješenju ovoga zadatka ćemo koristiti formule (34), (52) i (73):

$$\overline{S}_3(n)=\frac{1}{8}\left[-1+(-1)^{n+1}(4n^3+6n^2-1)\right]. \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{2,3}(4n) &= \sum_{m=1}^{4n} m^3\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{2m-1}{4}\pi\right)=1^3+2^3-3^3-4^3+5^3+6^3\\
&\quad-\ldots-(4n-1)^3-(4n)^3\\
&=(1^3-3^3+5^3-\ldots-(4n-1)^3)+8(1^3-2^3+3^3-\ldots-(2n)^3)\\
&=(2\cdot1-1)^3-(2\cdot2-1)^3+(2\cdot3-1)^3-\ldots-(2(2n)-1)^3+8\overline{S}_3(2n)\\
&=16\overline{S}_3(2n)-12\overline{S}_2(2n)+6\overline{S}_1(2n)=\ldots=-64n^3-24n^2+6n,
\end{aligned}$$

dakle (76) je točno.

Provjera. Ako je $n=1$, izravno je $\overline{S}_{2,3}\,(4\cdot1)=1^3+2^3-3^3-4^3=-82$. Pomoću (76) je $\overline{S}_{2,3}\,(4\cdot1)=-64-24+6=-82$.

Zadatak 16. Dokažimo

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{2,3}(n) &= 1^3+2^3-3^3-4^3+5^3+6^3-\ldots+f_2(n)n^3\\
&=\frac{3n^2+3n-4}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{4}-\left\lfloor\frac{n+3}{4}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{2n^3+3n^2-3n-4}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{4}-\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-3n^2-3n}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{4}-\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-2n^3-3n^2+3n}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{4}-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)\right).
\end{aligned}\tag{78}$$

Rješenje. Koristimo (76):

$$1^3+2^3-3^3-4^3+\ldots-(4n-1)^3-(4n)^3=-(4n)^3-\frac{3}{2}(4n)^2+\frac{3}{2}(4n), \tag{79}$$

$$1^3+2^3-3^3-4^3+\ldots+(4n-2)^3-(4n-1)^3=\ldots=-\frac{3}{2}(4n-1)^2-\frac{3}{2}(4n-1), \tag{80}$$

$$\begin{aligned} &1^3+2^3-3^3-4^3+\ldots+(4n-3)^3+(4n-2)^3\\ &=\ldots=(4n-2)^3+\frac{3}{2}(4n-2)^2-\frac{3}{2}(4n-2)-2, \end{aligned} \tag{81}$$

$$1^3+2^3-3^3-4^3+\ldots-(4n-4)^3+(4n-3)^3=\ldots=\frac{3}{2}(4n-3)^2+\frac{3}{2}(4n-3)-2. \tag{82}$$

Od (82) do (79) lagano provjerimo (78).

Provjera. Provjera za $n=5$. Dakle $\overline{S}_{2,3}(5)=1^3+2^3-3^3-4^3+5^3=\ldots=43$, a pomoću (78) se dobiva ista vrijednost:

$$\overline{S}_{2,3}(5)=\frac{3\cdot 5^2+3\cdot 5-4}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{5+3}{4}-\left\lfloor\frac{5+3}{4}\right\rfloor\right)\right)+0-0+0=\ldots=43$$

Zadatak 17. Dokažimo

$$\begin{aligned} S(n)&=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4-3\cdot4\cdot5-4\cdot5\cdot6+\ldots+f_2(n)n\,(n+1)\,(n+2)\\ &=\frac{3n^2+9n}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{4}-\left\lfloor\frac{n+3}{4}\right\rfloor\right)\right)\\ &+\frac{2n^3+9n^2+7n-6}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{4}-\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor\right)\right)\\ &+\frac{-3n^2-9n-6}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{4}-\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor\right)\right)\\ &+\frac{-2n^3-9n^2-7n}{2}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{4}-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Uputa. Vidimo $S(n)=\overline{S}_{2,3}(n)+3\overline{S}_{2,2}(n)+2\overline{S}_{2,1}(n)$, pa ako uvrstimo (78), (55) i (35), dobivamo (83).

Provjera. Provjera za $n=3$. Izravno je $S(3)=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4-3\cdot4\cdot5=\ldots=-30$, a pomoću (83) dobivamo istu vrijednost.

Zadatak 18. Dokažimo

$$\begin{aligned} \overline{S}_{3,3}(6n)&=1^3+2^3+3^3-4^3-5^3-6^3+\ldots-(6n-2)^3-(6n-1)^3-(6n)^3\\ &=-324n^3-81n^2+36n=\frac{-6(6n)^3-9(6n)^2+24(6n)}{4}. \end{aligned} \tag{84}$$

Uputa.

$$\begin{aligned} \overline{S}_{3,3}(6n)&=(1^3-4^3+7^3-\ldots-(6n-2)^3)+(2^3-5^3+8^3-\ldots-(6n-1)^3)\\ &+\left(3^3-6^3+9^3-\ldots-(6n)^3\right)=((3\cdot1-2)^3-(3\cdot2-2)^3+(3\cdot3-2)^3\\ &-\ldots-(3(2n)-2)^3)\\ &+(3^3-6^3+9^3-\ldots-(6n)^3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((3\cdot 1-2)^3-(3\cdot 2-2)^3+-\ldots-(3\cdot(2n)-2)^3)\\
&\quad+((3\cdot 1-1)^3-(3\cdot 2-1)^3+(3\cdot 3-1)^3-\ldots-(3(2n)-1)^3)\\
&\quad+27(1^3-2^3+3^3-\ldots-(2n)^3)\\
&= \ldots = 81\overline{S}_3(2n)-81\overline{S}_2(2n)+45\overline{S}_1(2n).
\end{aligned}
$$

Ovdje koristimo (77), (54) i (34): umjesto n stavljamo $2n$ i dobivamo (84).

Provjera. Ako je $n=1$, tada je $S(6\cdot 1)=1^3+2^3+3^3-4^3-5^3-6^3=-369$.

Pomoću (84) dobivamo istu vrijednost: $S(6\cdot 1)=-324\cdot 1^3-81\cdot 1^2+36\cdot 1=-369$.

Zadatak 19. Dokažimo općeniti slučaj

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_{3,3}(n) &= 1^3+2^3+3^3-4^3-5^3-6^3+\ldots+f_3(n)n^3\\
&= \frac{-2n^3+9n^2+24n-27}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+5}{6}-\left\lfloor\frac{n+5}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{2n^3+15n^2-40}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+4}{6}-\left\lfloor\frac{n+4}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{6n^3+9n^2-24n-27}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{6}-\left\lfloor\frac{n+3}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{2n^3-9n^2-24n}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{6}-\left\lfloor\frac{n+2}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-2n^3-15n^2+13}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{6}-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-6n^3-9n^2+24n}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{6}-\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right)\right).
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Rješenje. Iz (80) redom slijedi:

$$1^3+\ldots-(6n-1)^3-(6n)^3=-324n^3-81n^2+36n=\frac{-6\,(6n)^3-9(6n)^2+24(6n)}{4},\tag{86}$$

$$1^3+\ldots-(6n-2)^3-(6n-1)^3=\ldots=\frac{-2\,(6n-1)^3-15(6n-1)^2+13}{4},\tag{87}$$

$$1^3+\ldots-(6n-3)^3-(6n-2)^3=\ldots=\frac{2\,(6n-2)^3-9(6n-2)^2-24(6n-2)}{4},\tag{88}$$

$$1^3+\ldots+(6n-4)^3+(6n-3)^3=\ldots=\frac{6\,(6n-3)^3+9(6n-3)^2-24\,(6n-3)-27}{4},\tag{89}$$

$$1^3+\ldots+(6n-5)^3+(6n-4)^3=\ldots=\frac{2\,(6n-4)^3+15(6n-4)^2-40}{4},\tag{90}$$

$$1^3+\ldots+(6n-6)^3+(6n-5)^3=\ldots=\frac{-2\,(6n-5)^3+9(6n-5)^2+24\,(6n-5)-27}{4}.\tag{91}$$

Analogno kao u prethodnim zadatcima vidimo da vrijedi (85).

Provjera. Provjerimo (85) za $n=7$. Dakle izravno je $1^3+2^3+3^3-4^3-5^3-6^3+7^3=-26$ ili pomoću (85):

$$\overline{S}_{3,3}(7)=\frac{-2\cdot 7^3+9\cdot 7^2+2-274\cdot 7}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{7+5}{6}-\left\lfloor\frac{7+5}{6}\right\rfloor\right)\right)=\ldots=-26.$$

Zadatak 20. Dokažimo

$$\begin{aligned}
S(n)&=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5-4\cdot 5\cdot 6-5\cdot 6\cdot 7-6\cdot 7\cdot 8\\
&\quad+\ldots+f_2(n)n\,(n+1)\,(n+2)\\
&=\frac{-2n^3+3n^2+38n-15}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+5}{6}-\left\lfloor\frac{n+5}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{2n^3+21n^2+34n-48}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+4}{6}-\left\lfloor\frac{n+4}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{6n^3+27n^2+6n-63}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+3}{6}-\left\lfloor\frac{n+3}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{2n^3-3n^2-38n-48}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+2}{6}-\left\lfloor\frac{n+2}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-2n^3-21n^2-34n-15}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+1}{6}-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor\right)\right)\\
&\quad+\frac{-6n^3-27n^2+18n}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{6}-\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right)\right).
\end{aligned}\tag{92}$$

Uputa. $S(n)=\overline{S}_{3,3}(n)+3\overline{S}_{3,2}(n)+2\overline{S}_{3,1}(n)=\ldots$

Provjera. Za $n=1$ izravno je $S(1)=1\cdot 2\cdot 3=6$, a ista vrijednost se dobije i pomoću (92): $S(1)=\dfrac{-2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+38\cdot 1-15}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\dfrac{1+5}{6}-\left\lfloor\dfrac{1+5}{6}\right\rfloor\right)\right)+0+0+0+0+0=6$.

Za $n=2$ izravno je $S(2)=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4=30$, a ista vrijednost se dobiva i pomoću (92): $S(2)=0+\dfrac{2\cdot 2^3+21\cdot 2^2+34\cdot 2-48}{4}\left(1-\operatorname{sgn}\left(\dfrac{2+4}{6}-\left\lfloor\dfrac{2+4}{6}\right\rfloor\right)\right)+0+0+0+0=30$.

Napomena 5. Iz dosadašnjih razmatranja heuristički zaključujemo

$$\overline{S}_{k,k}(n)=\frac{1}{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k}a_{i,j}n^i\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{n+j}{2k}-\left\lfloor\frac{n+j}{2k}\right\rfloor\right)\right).$$

Jasno je, da bi razmatranje ovih općenitijih oblika bilo vrlo zahtjevno.

Napomena 6. Sada ćemo navesti nekoliko primjera, koji se odnose na bialternativne konvergentne redove.

Zadatak 21. Dokažimo da je suma bialternativnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_2(n)}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2. \tag{89}$$

Rješenje. U matematičkoj analizi su izvedene ove sume konvergentnih redova;

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}, \tag{90}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln 2. \tag{91}$$

Ako (90) i (91) uvrstimo u

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_2(n)}{n}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots\right),$$

dobivamo (89).

Napomena 7. Vidljivo je, da se (89) može prikazati u obliku alternativnog reda

$$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{7}{3\cdot 4}+\frac{11}{5\cdot 6}-\frac{15}{7\cdot 8}+\ldots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2<1.132.$$

Nadalje može se pokazati, da mu je konvergencija ubrzana ovom transformacijom, što se može provjeriti i pomoću računala.

Zadatak 22. Dokažimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_2(n)}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\ldots=\cos 1+\sin 1 \tag{92}$$

Rješenje. Iz matematičke analize poznati su ovi razvoji u *Taylorov red*: $\cos x=\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$, $\sin x=\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$, koji vrijede za svako realno x. Ako te formule zbrojimo i specijaliziramo za $x=1$, dobijemo (92).

Zadatak 23. Dokažimo

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4!}+\ldots=1-e^{-1}+\ln 2. \tag{93}$$

Rješenje. Ako u razvoj $\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=e^x$ uvrstimo $x=-1$, dobijemo $\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots=1-e^{-1}$ pa ako ovoj jednakosti dodamo (91), dobivamo (93).

Zadatak 24. Dokažimo

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}+\frac{7\pi^4}{720}. \tag{94}$$

Rješenje. Ako iskoristimo jednakosti $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}$ i $\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$, koje se dobiju iz specijaliziranog *Taylorovog reda*, sumiranjem slijedi (94).

Zadatak 25. Ako je $k \in \{1,2,3,\ldots\}$, dokažimo

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+2)}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(k+3)}+\ldots$$
$$=\frac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)!}-\frac{1}{(k-1)!}\left[\binom{k-1}{1}1+\binom{k-1}{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\ldots+\binom{k-1}{k-1}\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{k-1}\right)\right].$$

Uputa. Vidimo, da ako bi ovu monoalternativnu sumu specijalizirali za $k=1$, dobili bismo (91). No, ako bi ju htjeli dokazati, pošli bismo od veze

$$\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n}{i}}{x+i}\right),$$

iz koje se vidi kako se recipročna vrijednost produkta uzastopnih binoma rastavlja u parcijalne razlomke. Svakako, da i u ovome zadatku koristimo veze (90) i (91). Opširnije upute mogu se vidjeti u [2].

Zadatak 26. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+2)}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(k+3)}+\ldots$$
$$\leqslant\frac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)!}.$$

Uputa. Ova nejednakost slijedi iz zadatka 225, dakle ova alternativna beskonačna suma ima transcendentalnu vrijednost. Napomenimo da dokaz ove nejednakosti i nije odviše jednostavan, kada bi se posebno tražilo njezino dokazivanje.

Zaključak

U mnogim granama matematike pojavljuju se monoalternativni konačni i beskonačni konvergentni redovi, a ovdje smo se pozabavili s polialternativnim redovima i uočili da su njihove eksplicitne sume dosta glomazne i nije ih nužno primjenjivati za sumiranje malog broja članova, ali ako se treba izvršiti sumiranje velikog broja članova, tada one imaju praktičnu primjenu. Svakako, da bi se trebalo pomoću računala testirati vrijeme izvođenja operacija sumiranja i da se odgovori na pitanje kada govorimo o velikom broju sumirajućih članova i praktičnosti primjene izvedenih formula. Na kraju napomenimo, da bi bilo zanimljivo promatrati i sume s varijabilnim članovima i za očekivati je, da bi obrada tih slučajeva bila znatno složenija.

Literatura

[1] Petar Svirčević, *Formule rekurzije za alternativne konačne sume potencija prirodnih brojeva*, Matematičko-fizički list, 3/259, 2014./2015., Zagreb.

[2] Petar Svirčević, *Heuristika i sume recipročnih translatornih proizvoda*, TANGENTA – časopis za matematiku i računarstvo za učenike srednjih škola, broj 87/3, 2016./2017., Beograd.