Numerički izračun derivacije funkcije u točki preko brzine

Roko Pešić[1]

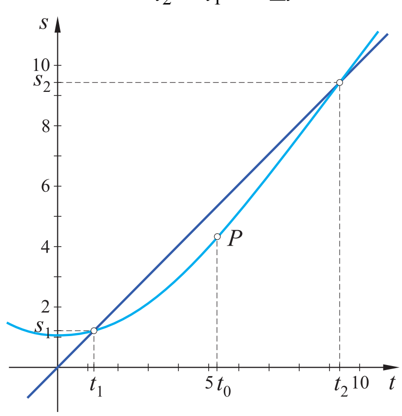
S definicijom brzine susreli ste se već u osnovnoj školi. Kako se ona definira? Kao što je dobro poznato, promatramo gibanje tijela na nekom intervalu puta Δs i prijeđeni put podijelimo s vremenskim intervalom Δt potrebnim da ga ono prijeđe. Dobiveni kvocijent naziva se srednjom brzinom $\overline{v}$ na tom putu:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1}$$

Potrebno je naglasiti da se, u općem slučaju nejednolikog gibanja, tijelo stvarno ne giba srednjom brzinom, nego tzv. pravom ili trenutnom brzinom – brzinom koju ono ima u određenom trenutku gibanja, a koja se u pojedinim točkama puta može znatno razlikovati od srednje brzine. Dakle, srednja brzina tijela nije stvarna brzina kojom se tijelo giba, nego samo zamišljena brzina, kojom bi se ono na čitavom putu moralo jednoliko gibati, da bi taj put prevalilo u istom vremenu, u kojem ga stvarno prevali gibajući se nejednoliko (1). Zanima nas može li se i kako odrediti prava ili trenutna brzina tijela u bilo kojem trenutku gibanja. Ovdje ćemo pokušati odgovoriti na ovo pitanje konkretnim numeričkim primjerom. Za početak, razumno je pretpostaviti da što je vrijeme motrenja kraće, to će se srednja brzina manje razlikovati od prave. Zašto? Intuitivno je jasno da u vrlo kratkim vremenskim intervalima tijelo, da se tako izrazimo, "nema dovoljno vremena" za značajnu promjenu brzine, pa će se srednja brzina u tom vrlo kratkom intervalu neznatno razlikovati od prave brzine. No, prije nego to i egzaktno provjerimo, treba definirati gore spomenutu trenutnu brzinu gibanja tijela.

Na slici 1a prikazana je ovisnost prijeđenog puta s o vremenu t koja opisuje neko nejednoliko gibanje, matematički rečeno, put je funkcija vremena: $s = s(t)$. Pretpostavimo da smo izmjerili položaj s_1 tijela u trenutku t_1 i položaj s_2 u nekom trenutku $t_2 > t_1$. Prema definiciji (1) srednja brzina tijela je:

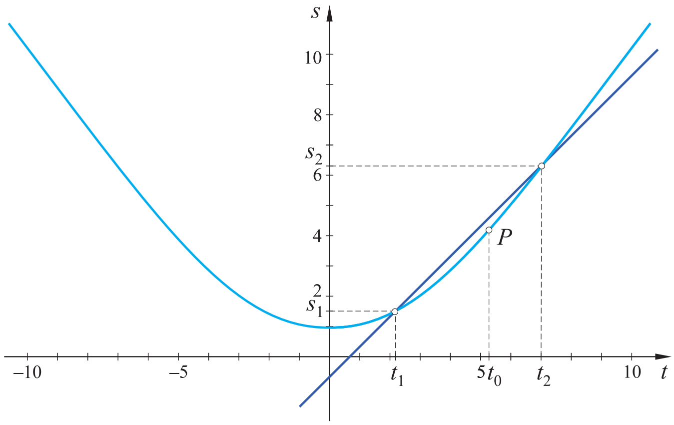
$$\overline{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$



Slika 1a.

[1] Autor je profesor fizike; e-pošta: `rpesic@net.hr`

Zanima nas kolika je trenutna brzina u točki P putanje, u trenutku t_0, pod uvjetom da je $t_1 < t_0 < t_2$ (slika 1a).

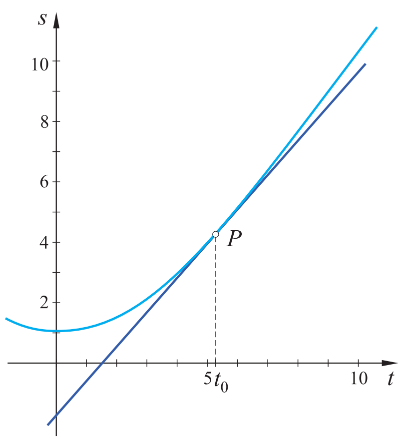


Slika 1b.

Zamislimo sada da se vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$ smanjuje, odnosno da se točka t_1 na apscisi približava točki t_0 slijeva, a točka t_2 zdesna (slika 1b).

Smanjivanjem intervala Δt, njegove krajnje točke s koordinatama (t_1, s_1) i (t_2, s_2) "klizit će" po krivulji sve bliže i bliže točki $P(t_0, s_0)$, dok se napoljetku potpuno ne "stope" s njom (slika 1c).

Ako kroz te dvije točke provučemo sekantu (pravac koji siječe krivulju u tim točkama) približavanjem spomenutih dviju točaka, ona će se sve više približavati točki P, da bi ju u konačnici dodirnula ili, kako se to u matematici kaže, postala tangenta na krivulju u točki P (slika 1c).



Slika 1c.

U graničnom slučaju kada vremenski interval $\Delta t \to 0$, srednja brzina $\overline{v}$ bit će jednaka pravoj ili trenutnoj brzini v tijela u trenutku t_0, što pišemo:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_0} = v_0. \tag{3}$$

Matematičkom terminologijom rečeno, trenutna brzina tijela jednaka je derivaciji puta po vremenu. Još preciznije, trenutna brzina v tijela u točki P putanje jednaka je iznosu derivacije funkcije prijeđenog puta $s = s(t)$, ako je ona dovoljno glatka, po neovisnoj (vremenskoj) varijabli u trenutku t_0.

Pokazat ćemo kako definicija (3) funkcionira u praksi, numeričkim izračunom derivacije funkcije $s = s(t)$ u točki, što je, u stvari, isto što i određenje iznosa prave brzine tijela u nekom trenutku na konkretnom primjeru.

Primjer 1. Neko tijelo giba se nejednoliko, na način da prijeđeni put ovisi o vremenu po zakonu: $s(t) = At^3$ [m], gdje je $A = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$ konstanta. U početnom trenutku $t = 0$ tijelo se nalazi u točki $s = 0$. Nađimo iznos brzine tijela dvije sekunde nakon početka gibanja.

Rješenje. Primijenit ćemo računski postupak smanjivanja vremenskog intervala Δt, prikazan na slikama 1a–1c, na funkciju $s(t) = At^3$, te koristeći definiciju (3), izračunat ćemo numerički iznos njene derivacije (odnosno trenutne brzine tijela) u točki $P(2,8)$. Najprije ćemo izračunati pređene putove za različite vrijednosti vremena kao što je prikazano u tablici.

vrijeme $[t]/\text{s}$	prijeđeni put $[s(t) = t^3]/\text{m}$
$t_1 = 0$	$s_1 = 0$
$t_2 = 1/3$	$s_2 = 1/27$
$t_3 = 2/3$	$s_3 = 8/27$
$t_4 = 1$	$s_4 = 1$
$t_5 = 4/3$	$s_5 = 64/27$
$t_6 = 5/3$	$s_6 = 125/27$
$t_7 = 16/9$	$s_7 = 4096/729$
$t_8 = 17/9$	$s_8 = 4913/729$
2	8
$t_{10} = 19/9$	$s_{10} = 6859/729$
$t_{11} = 20/9$	$s_{11} = 8000/729$
$t_{12} = 7/3$	$s_{12} = 343/27$
$t_{13} = 8/3$	$s_{13} = 512/27$
$t_{14} = 3$	$s_{14} = 27$
$t_{15} = 10/3$	$s_{15} = 1000/27$
$t_{16} = 11/3$	$s_{16} = 1331/27$
$t_{17} = 4$	$s_{17} = 64$

Izostavljajući jedinice za vrijeme i put, radi jednostavnosti, matematičkim rječnikom rečeno, promatramo spomenutu (kubnu) funkciju na intervalu $[0,4]$ koji sadrži točku $P(2,8)$ u kojoj tražimo derivaciju te funkcije.

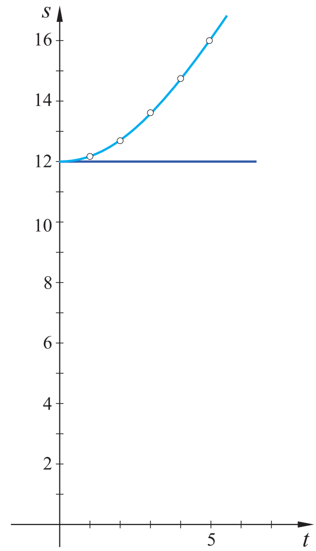
Uvedimo oznaku $\frac{\Delta s_j^i}{\Delta t_j^i} = \frac{s_i - s_j}{t_i - t_j}$, gdje su indeksi sukcesivno $i = 17, 16, \ldots, 10$, te $j = 1, 2, \ldots, 8$. Uvrštavajem numeričke vrijednosti iz tablice dobivamo:

$$\frac{\Delta s_1^{17}}{\Delta t_1^{17}} = \frac{64}{4} = 16; \qquad \frac{\Delta s_2^{16}}{\Delta t_2^{16}} = \frac{\frac{1330}{27}}{\frac{10}{3}} = 14.\dot{7};$$

$$\frac{\Delta s_3^{15}}{\Delta t_3^{15}} = \frac{\frac{992}{27}}{\frac{8}{3}} = 13.\dot{7}; \qquad \frac{\Delta s_4^{14}}{\Delta t_4^{14}} = \frac{26}{2} = 13;$$

$$\frac{\Delta s_5^{13}}{\Delta t_5^{13}} = \frac{\frac{448}{27}}{\frac{4}{3}} = 12.\dot{4}; \qquad \frac{\Delta s_6^{12}}{\Delta t_6^{12}} = \frac{\frac{218}{27}}{\frac{2}{3}} = 12.\dot{1};$$

$$\frac{\Delta s_7^{11}}{\Delta t_7^{11}} = \frac{\frac{3904}{729}}{\frac{4}{9}} = 12.05; \qquad \frac{\Delta s_8^{10}}{\Delta t_8^{10}} = \frac{\frac{1946}{729}}{\frac{2}{9}} = 12.01.$$



Slika 2.

Vidimo da se smanjivanjem intervala Δt kvocijent $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ asimptotski približava brojci 12, kao što se lijepo može vidjeti na slici 2. Iz toga, te iz definicije (3), zaključujemo da iznos trenutne brzine dvije sekunde nakon početka gibanja mora biti upravo $v = 12$ m/s, jer je to iznos derivacije funkcije $s(t) = t^3$ u točki P.

Taj rezultat možemo provjeriti standardnim postupkom deriviranja iste funkcije. Naime, derivacija funkcije $s(t) = At^3$ je $\frac{ds}{dt} = 3At^2$, što je prema definiciji (3) prava brzina tijela, pa uvrštavanjem $t = 2$ s, $A = 1$ m/s^3 dobivamo: $v_{t=2} = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, što se potpuno slaže s prethodnim proračunom.

Time smo ilustrirali intuitivnu pretpostavku da, kada se vremenski interval neograničeno smanjuje, srednja brzina se sve više približava trenutnoj brzini u određenom trenutku gibanja, što pišemo: $\Delta t \to 0 \implies \overline{v} \to v$ što proizlazi iz definicije (3) trenutne brzine.

Literatura

[1] Đuro Kurepa, Ignacije Smolec, Stjepan Škreblin, *Infinitezimalni račun: udžbenik matematike za VIII. razred gimnazije*, Zagreb, Školska knjiga, 1957.

[2] Desmond M. Burns, Simon G. G. MacDonald, *Fizika za biologe i medicinare*, Zagreb, Školska knjiga, 1980.