ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2022. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/288.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3833. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$. Odredi $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$.

3834. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a,b) tako da vrijedi

$$a^2+b^2-2a+b=5.$$

3835. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$x+2y+4z=12$$
$$xy+4yz+2xz=22$$
$$xyz=6.$$

3836. Nađi sva rješenja sustava jednadžbi

$$a^xb^y=m$$
$$x+y=n$$

gdje je $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

3837. Neka su a, b pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b=1$. Ako su x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1x_2x_3x_4x_5=1$ dokaži nejednakost

$$(ax_1+b)\ldots(ax_5+b)\geq 1.$$

3838. Odredi najveću vrijednost izraza

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$$

ako je $|x|\leq 1$ i $|y|\leq 1$.

3839. Dokaži da su kružnice

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$$
$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$$

međusobno okomite ako i samo ako je

$$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2.$$

3840. Pravi kut pravokutnog trokuta ABC je u točki C, a H je nožište visine na hipotenuzu. Pokaži da je zbroj polumjera upisanih kružnica u trokute ABC, ACH i BCH jednak duljini visine.

3841. Dan je četverokut $ABCD$ s pravim kutovima u vrhovima A i C. Ortogonalne projekcije vrhova D i B na dijagonalu $\overline{AC}$ su redom točke E i F. Ako je $|AE|=3$, $|DE|=5$ i $|CE|=7$, koliko je $|BF|$?

3842. Upisana kružnica trokuta ABC sa središtem I dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Pravac ID siječe dužinu $\overline{EF}$ u K. Dokaži da su točke A, K i M kolinearne, gdje je M polovište od $\overline{BC}$.

3843. U trokutu ABC je $\sphericalangle ABC=60^\circ$ i $\sphericalangle ACB=70^\circ$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da je $\sphericalangle BAD=20^\circ$. Dokaži

$$|AB|+|BD|=|AD|+|CD|.$$

3844. Ako za kutove trokuta vrijedi $3\beta+2\gamma=\pi$, dokaži da duljine njegovih stranica zadovoljavaju jednakost

$$a^2-c^2=\left(1+\frac{c}{a}\right)b^2.$$

3845. Dokaži da je trokut sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ jednakostraničan ako i samo ako vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{4P}(a^2+b^2+c^2),$$

gdje je P površina torkuta.

3846. Dan je skup $\{1,2,3,\ldots,24\}$. Na koliko načina se mogu izabrati tri broja iz tog skupa koji su članovi aritmetičkog niza.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 494. Kumulonimbusi su olujni oblaci koji donose jake kiše, ponekad i tuču. Vozeći autocestom vozač je uočio da mu ravno u susret dolazi takav oblak. Ušavši u njega morao je, zbog obilne kiše, smanjiti brzinu na 60 km/h. Prolazak kroz oluju je trajao 5 minuta. Širina takvih oblaka iznosi od 8 do 10 km. Odredite raspon brzine samog oblaka.

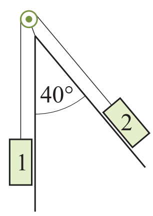
OŠ – 495. U menzuru promjera 3 cm je prvo ulivena voda do visine 15 cm i nakon toga sloj ulja debljine 5 cm. Izračunajte ukupni tlak na dno menzure. Gustoća ulja iznosi

800 kg/m^3, a vode 1000 kg/m^3. Atmosferski je tlak iznosio 101 000 Pa (paskala).

OŠ – 496. Kad na tijelo mase 3 kg, koje miruje na horizontalnoj podlozi, djeluje sila od 1.5 N ono dobije akceleraciju od 0.4 m/s^2. Koliki je koeficijent trenja između tijela i podloge?

OŠ – 497. Skijaš se spušta po stazi dugačkoj 2.5 km. Podnožje staze je 100 m niže od vrha. Na dnu staze njegova je kinetička energija 4000 J. Masa skijaša zajedno s opremom iznosi 80 kg. Kolika je prosječna sila trenja između skija i snijega?

1770. Sklop dvaju utega na slici giba se jednoliko ubrzano (zdesna nalijevo) akceleracijom 1.4 m/s^2. Ako su mase utega $m_1 = 0.8$ kg i $m_2 = 0.5$ kg, odredi koeficijent trenja tijela 2 s podlogom. Uzeti $g = 9.81$ m/s^2.



1771. Uzorak ima 10^{10} radioaktivnih jezgri jednog izotopa. Ako ih se u prvih 8 sekundi raspadne 25 000, koliko je vrijeme poluraspada?

1772. Motor koji okreće ploču tvrdog diska (HDD) ima maksimalnu snagu 2.4 W. Uzmimo da su ploče idealni cilindri ukupne mase 20 grama i radijusa 4 cm. Koliko minimalno vremena treba da ploče iz stanja mirovanja dosegnu punu kutnu brzinu od 7200 okreta u minuti?

1773. Zemlja se oko Sunca giba približno po kružnici radijusa 1 a.j. Kad bi neko tijelo na toj udaljenosti od Sunca u nekom trenutku mirovalo u odnosu na Sunce, koliko bi mu vremena, od tada, trebalo da padne na Sunce? Koristi treći Keplerov zakon i činjenicu da Zemlji treba 1 godina da obiđe Sunce.

1774. Ako u kalorimetar s 0.3 kg leda temperature 0 °C ulijemo 0.8 kg vode temperature 51 °C i dobijemo ravnotežnu temperaturu 12 °C, koliki je toplinski kapacitet kalorimetra? Specifični toplinski kapacitet vode je 4190 J/kgK, a latentna toplina taljenja leda 330 000 J/kg.

1775. Neka je vanjska temperatura 5 °C, a u sobi 21 °C. Vanjski zrak ima 90 % vlage. Nakon prozračivanja (potpune izmjene zraka), kolika će biti vlažnost u sobi kad se zrak ponovo ugrije na 21 °C? Parcijalni tlak vodene pare je 872.6 Pa na 5 °C i 2486.5 Pa na 21 °C.

1776. Sunčeva konstanta (snaga zračenja Sunca na vrhu Zemljine atmosfere) mijenja se od 1321 W/m^2 kad je Zemlja u afelu, do 1412 W/m^2 kad je zemlja u perihelu putanje. Pomoću zadanih veličina odredi ekscentričnost Zemljine putanje oko Sunca.

C) Rješenja iz matematike

3805. *Dokaži da je* $2222^{5555} + 5555^{2222}$ *djeljivo sa* 7.

Rješenje. Koristit ćemo poznate formule. Za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$x^n - y^n = (x-y)\cdot(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \qquad (1)$$

a za svaki neparan prirodan broj n:

$$x^n + y^n = (x+y)\cdot(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}). \qquad (2)$$

Napišimo dani broj u obliku:

$$\begin{aligned} A &= 2222^{5555} + 5555^{2222} \\ &= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) \\ &\quad - (4^{5555} - 4^{2222}). \end{aligned}$$

Sada je, zbog (2):

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 4^{5555} &\equiv 0 \pmod{2226} \\ &\equiv 0 \pmod{7\cdot 318}, \end{aligned}$$

zbog (1) je:

$$\begin{aligned} 5555^{2222} - 4^{2222} &\equiv 0 \pmod{5551} \\ &\equiv 0 \pmod{7\cdot 793}, \end{aligned}$$

te je još

$$\begin{aligned} 4^{5555} - 4^{2222} &= 4^{2222}\cdot(4^{3333} - 1) \\ &= 4^{2222}\cdot(64^{1111} - 1), \end{aligned}$$

i opet zbog (1):

$$64^{1111} - 1 \equiv 0 \pmod{63} \equiv 0 \pmod{7 \cdot 9}.$$

Ovim smo dokazali da su sva tri broja u zagradama djeljivi sa 7, pa je i sam broj A djeljiv sa 7.

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3806. *Dani su pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da je $x+y+z=3$. Odredi maksimalnu vrijednost izraza*

$$\sqrt{2x+13} + \sqrt[3]{3y+5} + \sqrt[4]{8z+12}.$$

Rješenje. Koristeći A-G nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+13} + \sqrt[3]{3y+5} + \sqrt[4]{8z+12} \\
&= \sqrt{\frac{2x+13}{4}} \cdot \sqrt{4} + \sqrt[3]{\frac{3y+5}{4}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \\
&\quad + \sqrt[4]{\frac{8z+12}{8}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \\
&\leqslant \frac{\frac{2x+13}{4}+4}{2} + \frac{\frac{3y+5}{4}+2+2}{3} \\
&\quad + \frac{\frac{8z+12}{8}+2+2+2}{4} \\
&= \frac{1}{4}(x+y+z) + \frac{29}{4} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Jednakost se postiže za

$$\begin{aligned}
\frac{2x+13}{4} &= 4 \implies x = \frac{3}{2} \\
\frac{3y+5}{4} &= 2 \implies y = 1 \\
\frac{8z+12}{8} &= 2 \implies z = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3807. *Nađi sve parove cijelih brojeva (x,y) takve da vrijedi*

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

Prvo rješenje. Neka su x i y cijeli brojevi koji zadovoljavaju danu jednadžbu. Imamo četiri moguća slučaja.

Neka je $x > 0$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
(x^3+1)^2 &= x^6 + 2x^3 + 1 \\
&< x^6 + 3x^3 + 1 \\
&= y^4 < x^6 + 4x^3 + 4 \\
&= (x^3+2)^2 \\
&\implies x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2
\end{aligned}$$

pa y ne može biti cijeli broj.

Neka je sada $x \leq -2$. Tada je $x^3 + 3 < 0$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
(x^3+2)^2 &= x^6 + 4x^3 + 4 \\
&< x^6 + 3x^3 + 1 \\
&= y^4 < x^6 + 2x^3 + 1 \\
&= (x^3+1)^2 \\
&\implies -(x^3+2) = |x^3+2| < y^2 \\
&\qquad < |x^3+1| = -(x^3+1)
\end{aligned}$$

što ne vrijedi za niti jedan cijeli broj y.

Treći slučaj je $x = -1 \implies y^4 = -1$, što je isto tako nemoguće.

Na koncu, za $x = 0 \implies y^4 = 1 \implies y = \pm 1$.

Znači imamo dva cjelobrojna rješenja:

$$(x,y) = \{(0,-1),(0,1)\}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(x^3+1)^2 + (x^3+1) = y^4 + 1$$
$$(2x^3+2)^2 + 2(2x^3+1) + 1 - 4y^4 = 5$$

tj.

$$(2x^3+3)^2 - 4y^4 = 5$$
$$(2x^3 - 2y^2 + 3)(2x^3 + 2y^2 + 3) = 5.$$

Dobivamo četiri sustava jednadžbi

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 1 \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -1 \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 5 \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -5 \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -1 \end{cases}$$

Samo prvi i četvrti sustav imaju cjelobrojna rješenja $(0,1)$, $(0,-1)$.

Borna Gojšić (3), Gimnazija Karlovac, Karlovac

3808. *Riješi sustav jednadžbi*

$$64^{2x} + 64^{2y} = 12$$
$$64^{x+y} = 4\sqrt{2}.$$

Rješenje. Kvadrirajmo drugu jednadžbu u sustavu:

$$64^{2x+2y} = 32.$$

U sustav uvedimo supstitucije $t = 64^{2x}$ i $u = 64^{2y}$. Time sustav poprima oblik:

$$t + u = 12$$
$$tu = 32.$$

Taj sustav rješava se eliminacijom jedne nepoznanice (neka to bude t):

$$u(12-u) = 32 \iff u^2 - 12u + 32 = 0,$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su:

$$u_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2},$$

odnosno $u_1 = 8$ i $u_2 = 4$. Pripadna rješenja za t jesu $t_1 = 4$ i $t_2 = 8$. Kako je $t = 64^{2x} = 2^{12x}$ i $u = 64^{2y} = 2^{12y}$, jedina rješenja su

$$(x,y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$$

i simetrično rješenje

$$(x,y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right).$$

Filip Vučić (3), I. gimnazija, Zagreb

3809. *Odredi jednadžbu kružnice opisane trokutu čije stranice leže na pravcima* $x+y-1=0$, $x-2y+8=0$, $2x-y+1=0$.

Rješenje. Označimo zadane pravce

$$p_1 \ldots\ x + y - 1 = 0$$
$$p_2 \ldots\ x - 2y + 8 = 0$$
$$p_3 \ldots\ 2x - y + 1 = 0.$$

Rješavajući linearne sustave jednostavno dobivamo:

$$p_1 \cap p_2 = \{A\} \implies A(-2,3);$$
$$p_1 \cap p_3 = \{B\} \implies B(0,1);$$
$$p_2 \cap p_3 = \{C\} \implies C(2,5).$$

Tražimo jednadžbu kružnice

$$k \ldots\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

kroz tri točke:

$$(-2-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$$
$$p^2 + (1-q)^2 = r^2$$
$$(2-p)^2 + (5-q)^2 = r^2.$$

Kvadriranjem, potom oduzimanjem prve dvije jednadžbe ovog sustava dobivamo

$$p - q = -3.$$

Kvadriramo i oduzmemo drugu i treću jednadžbu

$$p + 2q = 7.$$

Posljednje dvije jednadžbe stavimo u sustav i imamo: $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{10}{3}$. Sada iz bilo koje jednadžbe gornjeg sustava dobijemo $r^2 = \frac{50}{9}$.

Jednadžba tražene kružnice je:

$$k \ldots \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3810. *Dani su pozitivni realni brojevi* a, b, c *takvi da je* $ab+bc+ca=3$. *Dokaži nejednakost*

$$\frac{1}{a^2+5} + \frac{1}{b^2+5} + \frac{1}{c^2+5} \le \frac{1}{2}.$$

Prvo rješenje. Kako su a, b, c pozitivni i $ab+bc+ca=3$ možemo uvesti supstituciju $a = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $b = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $c = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, gdje su $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Sada iz uvjeta zadatka imamo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$$
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

tj. radi se o kutovima trokuta. Sada transformiramo lijevu stranu dane nejednakosti:

$$\begin{aligned}
L&=\frac{1}{a^2+5}+\frac{1}{b^2+5}+\frac{1}{c^2+5}\\
&=\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\alpha+5}+\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\beta+5}+\frac{1}{3\operatorname{tg}^2\gamma+5}\\
&=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+5\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{\beta}{2}+5\cos^2\frac{\beta}{2}}\\
&\quad+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{3\sin^2\frac{\gamma}{2}+5\cos^2\frac{\gamma}{2}}\\
&=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{3+2\cos^2\frac{\beta}{2}}\\
&\quad+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{3+2\cos^2\frac{\gamma}{2}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}{3+1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}(1+\cos\beta)}{3+1+\cos\beta}\\
&\quad+\frac{\frac{1}{2}(1+\cos\gamma)}{3+1+\cos\gamma}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+\cos\alpha}{4+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\beta}{4+\cos\beta}+\frac{1+\cos\gamma}{4+\cos\gamma}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4+\cos\alpha}+1-\frac{3}{4+\cos\beta}\right.\\
&\quad\left.+1-\frac{3}{4+\cos\gamma}\right)\\
&=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4+\cos\alpha}+\frac{1}{4+\cos\beta}+\frac{1}{4+\cos\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Koristimo odnos aritmetičke i harmonijske sredine:

$$\frac{\frac{1}{4+\cos\alpha}+\frac{1}{4+\cos\beta}+\frac{1}{4+\cos\gamma}}{3}\geq\frac{3}{4+\cos\alpha+4+\cos\beta+4+\cos\gamma}$$
$$\frac{1}{4+\cos\alpha}+\frac{1}{4+\cos\beta}+\frac{1}{4+\cos\gamma}\geq\frac{9}{12+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$$

Iskoristimo poznatu nejednakost za kutove trokuta:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2},$$

pa je dalje:

$$\frac{1}{4+\cos\alpha}+\frac{1}{4+\cos\beta}+\frac{1}{4+\cos\gamma}\geq\frac{9}{12+\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Na koncu je

$$L\leq\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

što smo i trebali dokazati.

Jednakost se postiže za jednakostraničan trokut $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, odnosno za $a=b=c=1$.

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Iz uvjeta $ab+bc+ca=3$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2+5}+\frac{1}{b^2+5}+\frac{1}{c^2+5}\\
&=\frac{3}{3a^2+5(ab+bc+ca)}\\
&\quad+\frac{3}{3b^2+5(ab+bc+ca)}\\
&\quad+\frac{3}{3c^2+5(ab+bc+ca)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{3(a+b)(a+c)+2(ab+bc+ca)} + \frac{9}{3(a+b)(b+c)+2(ab+bc+ca)} + \frac{9}{3(b+c)(a+c)+2(ab+c+ca)}\right). \tag{1}$$

Koristit ćemo sljedeću nejednakost za pozitivne brojeve x i y:

$$\frac{9}{3x+2y} \le \frac{4}{3x} + \frac{1}{2y} \tag{2}$$

$\left(\iff \frac{9x^2+16y^2}{2} \ge 12xy \text{ (A-G nejednakost)}\right)$.

Iz (1) i (2) imamo:

$$\frac{1}{a^2+5} + \frac{1}{b^2+5} + \frac{1}{c^2+5}$$
$$\le \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3(a+b)(a+c)} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} + \frac{4}{3(a+b)(b+c)} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} + \frac{4}{3(b+c)(a+c)} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)}\right)$$
$$= \frac{8(a+b+c)}{9(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)}. \tag{3}$$

Kako je

$9(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

iz (3) dobivamo

$$\frac{1}{a^2+5} + \frac{1}{b^2+5} + \frac{1}{c^2+5} \le \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}.$$

Ur.

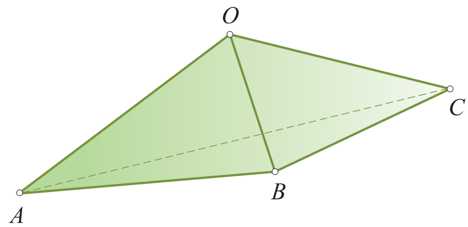
3811. *Tri strane OAB, OBC, OCA tetraedra $OABC$ su pravokutni trokuti s pravim kutovima u točki O. Ako je $|OA| = 7$, $|OB| = 2$, $|OC| = 6$, koliko je*

$$P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2 + P_{ABC}^2?$$

Prvo rješenje. Imamo

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 = 53$$
$$|BC|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 = 40$$
$$|CA|^2 = |OC|^2 + |OA|^2 = 85,$$

$$P_{OAB}^2 = \left(\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\right)^2 = 49$$
$$P_{OBC}^2 = \left(\frac{1}{2}|OB|\cdot|OC|\right)^2 = 36$$
$$P_{OCA}^2 = \left(\frac{1}{2}|OC|\cdot|OA|\right)^2 = 441.$$



Neka je s poluopseg trokuta ABC, tj.

$$s = \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{2} = \frac{\sqrt{53}+\sqrt{40}+\sqrt{85}}{2}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
P_{ABC}^2 &= s(s-|AB|)(s-|BC|)(s-|CA|)\\
&= \frac{1}{16}(\sqrt{53}+\sqrt{40}+\sqrt{85})\\
&\quad\cdot(-\sqrt{53}+\sqrt{40}+\sqrt{85})\\
&\quad\cdot(\sqrt{53}-\sqrt{40}+\sqrt{85})\\
&\quad\cdot(\sqrt{53}+\sqrt{40}-\sqrt{85})\\
&= \frac{1}{16}(-53+40+85+2\sqrt{40\cdot 85})\\
&\quad\cdot(53-40-85+2\sqrt{40\cdot 85})\\
&= \frac{1}{16}(2\sqrt{40\cdot 85}+72)(2\sqrt{40\cdot 85}-72)\\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{40\cdot 85}+36)(\sqrt{40\cdot 85}-36)\\
&= (\sqrt{850}+18)(\sqrt{850}-18)\\
&= 850-324 = 526.
\end{aligned}$$

Dakle, tražena suma je

$$P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2 + P_{ABC}^2 = 1052.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

Drugo rješenje. Površine bočnih strana tetraedra (pravokutnih trokuta) su:

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 7$$
$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$
$$P_{OCA} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21.$$

U zadatku 3798 je dokazano da za tetraedar kojem su svi kutovi pri vrhu O pravi vrijedi:

$$P_{ABC}^2 = P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2.$$

To iskoristimo, pa je:

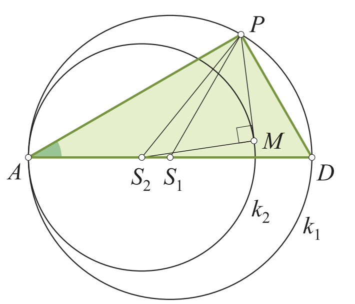
$$\begin{aligned} &P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2 + P_{ABC}^2 \\ &= 2 \cdot (P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2) \\ &= 2 \cdot (7^2 + 6^2 + 21^2) = 1052. \end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3812. *Kružnice k_1 i k_2 polumjera 10 i 8 su tangencijalne iznutra i dodiruju se u točki A. Promjer od k_1 je $\overline{AD}$, a P i M su točke na k_1 i k_2 tako da je PM tangenta na k_2. Ako je $|PM| = \sqrt{20}$, koliki je kut $\sphericalangle PAD$?*

Prvo rješenje. Označimo sve zadane elemente kao na slici. Tako je $|S_2M| = 8$, pa je po Pitagorinu poučku:

$$|S_2P| = \sqrt{8^2 + \sqrt{20}^2} = 2\sqrt{21}.$$



Sada koristimo kosinusov poučak za trokut S_1S_2P. Imamo:

$$\begin{aligned} |S_2P|^2 &= |S_1S_2|^2 + |S_1P|^2 \\ &\quad - 2 \cdot |S_1S_2| \cdot |S_1P| \cdot \cos \sphericalangle AS_1P \end{aligned}$$

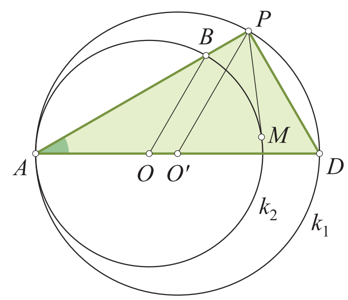
$$84 = 4 + 100 - 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot \cos \sphericalangle AS_1P$$
$$\cos \sphericalangle AS_1P = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sphericalangle AS_1P = 60^\circ.$$

Sada je:

$$\sphericalangle ADP = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AS_1P = 30^\circ$$
$$\Longrightarrow \sphericalangle PAD = 90^\circ - \sphericalangle ADP = 60^\circ.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je O središte od k_2 i PA siječe k_2 u B



k_1 i k_2 su koncentrične kružnice s koeficijentom $\frac{8}{10}$, pri čemu se B preslikava u P. Dakle,

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{8}{10}.$$

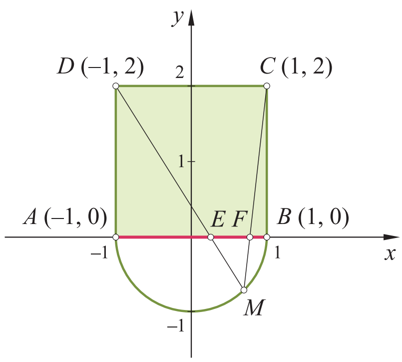
(To se može vidjeti spajanjem P sa središtem O' od k_1 pa su trokuti ABO i APO' slični.) Potencija točke u odnosu na k_2 je $|PM|^2 = 20$, pa je $|PB| \cdot |PA| = 20$ ili $(|PA| - |PB|)|PA| = 20$. Iz $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{8}{10}$ dobivamo $|AB| = 8$, $|AP| = 10$. Dakle, trokut ABO je jednakostraničan i

$$\sphericalangle PAD = \sphericalangle BAO = 60^\circ.$$

Ur.

3813. *Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ s njegove vanjske strane konstruirana je polukružnica. Na njoj je izabrana točka M čije spojnice s vrhovima D i C sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama E i F. Dokaži $|EF|^2 = |AE| \cdot |BF|$.*

Prvo rješenje. Možemo uzeti da dani kvadrat ima duljinu stranice 2 i smjestimo ga u koordinatni sustav kao na slici.



Jednadžba kružnice je sada:

$$k \dots\ x^2 + y^2 = 1,$$

a točka M, koja se nalazi na polukružnici smještenoj u negativnoj poluravnini, je $M(x_M, -\sqrt{1-x_M^2})$. Jednadžba pravca CM kroz dvije točke je:

$$CM \dots\ y - 2 = \frac{-\sqrt{1-x_M^2}-2}{x_M-1}(x-1)$$

$$y = \frac{-\sqrt{1-x_M^2}-2}{x_M-1}x + \frac{2x_M+\sqrt{1-x_M^2}}{x_M-1}.$$

Presjek toga pravca s osi apscisa je točka:

$$F\left(\frac{2x_M+\sqrt{1-x_M^2}}{2+\sqrt{1-x_M^2}}, 0\right).$$

Isto tako je:

$$DM \dots\ y - 2 = \frac{-\sqrt{1-x_M^2}-2}{x_M+1}(x+1)$$

$$y = \frac{-\sqrt{1-x_M^2}-2}{x_M+1}x + \frac{2x_M-\sqrt{1-x_M^2}}{x_M+1}.$$

Presjek toga pravca s osi apscisa je točka:

$$E\left(\frac{2x_M-\sqrt{1-x_M^2}}{2+\sqrt{1-x_M^2}}, 0\right).$$

Sada izračunamo:

$$|AE| = \frac{2(1+x_M)}{2+\sqrt{1-x_M^2}},$$

$$|BF| = \frac{2(1-x_M)}{2+\sqrt{1-x_M^2}},$$

$$|EF| = \frac{2\sqrt{1-x_M^2}}{2+\sqrt{1-x_M^2}}.$$

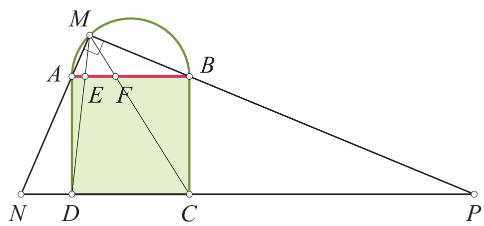
Očito je:

$$|EF|^2 = |AE| \cdot |BF| = \frac{4(1-x_M^2)}{(2+\sqrt{1-x_M^2})^2},$$

a to smo i trebali dokazati.

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Pravac MA siječe CD u točki N, a pravac MB siječe CD u P.



Kako je $AF \| NC$ imamo

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|DC|}{|DN|}. \tag{1}$$

Trokuti AND i PBC su slični pa je

$$\frac{|CP|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DN|} \iff \frac{|CP|}{|DC|} = \frac{|DC|}{|DN|},$$

a iz (1) je

$$\frac{|CP|}{|DC|} = \frac{|EF|}{|AE|}. \tag{2}$$

U trokutima MDP i EBM je $BE \| DP$ pa je

$$\frac{|CP|}{|DC|} = \frac{|BF|}{|EF|}, \tag{3}$$

a iz (2) i (3) imamo

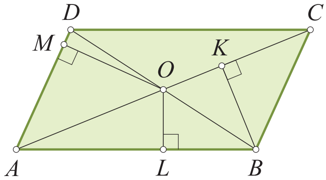
$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|BF|}{|EF|} \iff |EF|^2 = |AE| \cdot |BF|.$$

Ur.

3814. *U paralelogramu $ABCD$ dijagonale se sijeku u točki O. Točke L i M na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ su ortogonalne projekcije točke O na te dvije stranice. Dokaži*

$$|AB| \cdot |AL| + |AD| \cdot |AM| = 2|AO|^2.$$

Rješenje. Spustimo okomicu iz vrha paralelograma na dulju dijagonalu AC i neka je njeno nožište točka K.



Tako uočavamo sličnost dvaju trokuta:

$$\begin{aligned} &\Delta ABK \sim \Delta AOL \\ &\Longrightarrow \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|AK|}{|AL|} \\ &\Longrightarrow |AK| = \frac{|AB| \cdot |AL|}{|AO|} \qquad (1) \\ &\Delta CBK \sim \Delta AOM \\ &\Longrightarrow \frac{|BC|}{|AO|} = \frac{|KC|}{|AM|} \\ &\Longrightarrow |KC| = \frac{|BC| \cdot |AM|}{|AO|}. \qquad (2) \end{aligned}$$

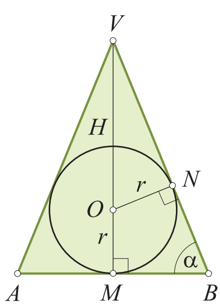
Zbrajanjem jednakosti (1) i (2) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{|AB| \cdot |AL|}{|AO|} + \frac{|BC| \cdot |AM|}{|AO|} &= |AK| + |KC| \\ &= |AC| = 2|AO| \\ |AB| \cdot |AL| + |AD| \cdot |AM| &= 2|AO|^2. \end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3815. *Ako je visina uspravnog stošca H, a kut između izvodnice i ravnine baze jednak α, kolika mu je površina upisane sfere.*

Rješenje. Istaknimo poprečni presjek stošca i upisane mu sfere na slici.



Tako je:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|MB|}{H} \Longrightarrow |MB| = H \operatorname{ctg}\alpha.$$

Po Pitagorinom poučku imamo

$$\begin{aligned} |VB| &= \sqrt{|MB|^2 + |MV|^2} \\ &= \sqrt{H^2 \operatorname{ctg}^2\alpha + H^2} \\ &= \frac{H}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Jer je $\Delta VON \sim \Delta VBM$ vrijedi:

$$\begin{aligned} |ON| : |MB| &= |OV| : |VB| \\ r : (H \operatorname{ctg}\alpha) &= (H - r) : \frac{H}{\sin\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha \cdot (H - r) &= \frac{r}{\sin\alpha} \\ r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) &= H \operatorname{ctg}\alpha \\ r &= \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot H. \end{aligned}$$

Površina upisane sfere je sada:

$$P = 4r^2\pi = 4\pi \left(\frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\right)^2 H^2.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3816. *Ako u trokutu ABC vrijedi $\alpha = 2\beta$, dokaži*

$$|BC|^2 = (|AC| + |AB|)|AC|.$$

Rješenje. Označimo standardno u trokutu $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ i kutove nasuprot tim stranicama redom s α, β, γ, a s R polumjer tom trokutu opisane kružnice.

$$\begin{aligned} &\alpha = 2\beta \\ &\Longleftrightarrow \alpha - \beta = \beta \\ &\Longleftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\beta \\ &\Longleftrightarrow \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cdot \sin\gamma \\ &\Longleftrightarrow (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ &\qquad \cdot (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \sin\beta\sin\gamma \\ &\Longleftrightarrow \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta \\ &\qquad = \sin\beta\sin\gamma \\ &\Longleftrightarrow \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) \\ &\qquad = \sin\beta\sin\gamma \end{aligned}$$

$$\iff \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta = \sin\beta\sin\gamma$$
$$\iff \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin\beta\sin\gamma$$
$$\iff (2R\sin\alpha)^2 - (2R\sin\beta)^2 = 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma$$
(sinusov poučak)
$$\iff a^2 - b^2 = bc$$
$$\iff a^2 = (b+c)\cdot b$$

Iz rješenja vidimo da vrijedi i obrat tvrdnje zadatka.

Marko Dodig (3), Zagreb

3817. *Dokaži da je umnožak*
$$P_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n$$
djeljiv s 2^n. *Koliko je* $\frac{P_n}{2^n}$ *?*

Rješenje.

$$\begin{aligned}P_n &= (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n = \frac{(2n)!}{n!}\\ &= \frac{[1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)]\cdot[2\cdot4\cdot6\ldots(2n)]}{n!}\\ &= \frac{[1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)]\cdot 2^n\cdot n!}{n!}\\ &= 2^n\cdot[1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)]\\ &= 2^n\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\end{aligned}$$

Znači, očito $2^n \mid P_n$ i traženi količnik iznosi
$$\frac{P_n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3818. *Ako su* α, β, γ *kutovi trokuta, dokaži nejednakost*
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

Kako je
$$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2},$$
$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$$
slijedi
$$0 < \cos\frac{\alpha+\beta}{2} < 1,$$
$$0 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 1,$$
pa je
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \le \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$
Sada je:
$$\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ &\le \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &\le \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\leqslant 0} + \frac{1}{8} \le \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 486. *Uzgon je sila koja djeluje na tijela uronjena u tekućinu. Može se izračunati po formuli* $F_u = \rho\cdot g\cdot V$, ρ *je gustoća tekućine, a* V *je obujam tijela. Uzgon djeluje prema gore pa su zbog toga tijela uronjena u tekućinu prividno lakša. Leon je mjerio koliko dugo pada kuglica mase 13.5 g kroz vodu u menzuri visokoj 40 cm. Izmjereno vrijeme iznosilo je 0.34 s. Kolika je gustoća kuglice? Gustoća vode je* 1000 kg/m^3, *a ubrzanje sile teže je* 10 m/s^2.

Rješenje.

$m = 13.5$ g $= 0.0135$ kg

$h = s = 40$ cm $= 0.4$ m

$t = 0.34$ s

$$\rho_{\text{vode}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$
$$\underline{g = 10 \text{ m/s}^2}$$
$$\rho_{\text{kuglice}} = ?$$
$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 0.4 \text{ m}}{(0.34 \text{ s})^2} = 6.92 \text{ m/s}^2$$
$$a_{\text{uzgon}} = g - a = 10 \text{ m/s}^2 - 6.92 \text{ m/s}^2 = 3.08 \text{ m/s}^2$$
$$F_u = m \cdot a_{\text{uzgon}} = 0.0135 \text{ kg} \cdot 3.08 \text{ m/s}^2 = 0.04158 \text{ N}$$
$$V = \frac{F_u}{\rho g} = \frac{0.04158 \text{ N}}{1000 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 4.158 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 4.158 \text{ cm}^3$$
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{13.5 \text{ g}}{4.158 \text{ cm}^3} = 3.247 \text{ g/cm}^3 = 3247 \text{ kg/m}^3.$$

Ur.

OŠ – 487. *Odredite gustoću svojeg trokuta. Navedite od kojeg je materijala napravljen.*

Rješenje. Trokut je od drva. Masu sam odredio na digitalnoj vagi iz pribora za kemiju: $m = 18.6$ g.

Obujam ravnala je jednak razlici vanjskog i unutarnjeg šupljeg dijela. To su dijelovi prizme kojima je baza pravokutan trokut:

$$a_v = 17.3 \text{ cm}, \quad b_v = 10 \text{ cm}$$
$$a_u = 6 \text{ cm}, \quad b_u = 3.5 \text{ cm}$$
$$\underline{c = 0.4 \text{ cm}}$$
$$V = V_v - V_u = \frac{a_v \cdot b_v \cdot c}{2} - \frac{a_u \cdot b_u \cdot c}{2} = \frac{17.3 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 0.4 \text{ cm}}{2} - \frac{6 \text{ cm} \cdot 3.5 \text{ cm} \cdot 0.4 \text{ cm}}{2}$$
$$= 34.6 \text{ cm}^3 - 8.4 \text{ cm}^3 = 26.2 \text{ cm}^3$$
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{18.6 \text{ g}}{26.2 \text{ cm}^3} = 0.7099 \text{ g/cm}^3 = 709.9 \text{ kg/m}^3.$$

David Pongrac (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 488. *Petra je postavila ravnalo mase 50 g i duljine 40 cm tako da dvije petine ravnala vire izvan stola. Na taj kraći kraj stavila je gumicu i pomičući ju prema rubu ravnala uočila je da se ravnalo prevrne ako je težište gumice manje od 6 cm udaljeno od ruba ravnala. Izračunajte masu gumice.*

Rješenje.

$$m_r = 50 \text{ g}$$
$$l = 40 \text{ cm}$$
$$l_1 = \frac{2}{5} l = 16 \text{ cm}$$
$$l_2 = \frac{3}{5} l = 24 \text{ cm}$$
$$\underline{k_g = 16 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}}$$
$$m_g = ?$$
$$k_g \cdot G_g + k_1 \cdot \frac{2}{5} G_r = k_2 \cdot \frac{3}{5} G_r$$
$$k_1 = \frac{l_1}{2} = 8 \text{ cm}$$
$$k_2 = \frac{l_2}{2} = 12 \text{ cm}$$
$$G_r = m_r \cdot g = 0.05 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0.5 \text{ N}$$
$$10 \text{ cm} \cdot G_g + 8 \text{ cm} \cdot \frac{2}{5} \cdot 0.5 \text{ N} = 12 \text{ cm} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0.5 \text{ N} \ / : \text{cm}$$
$$10 G_g + 1.6 \text{ N} = 3.6 \text{ N}$$
$$G_g = 0.2 \text{ N}$$
$$m_g = \frac{G}{g} = \frac{0.2 \text{ N}}{10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0.02 \text{ kg} = 20 \text{ g}.$$

Borna Lebinac Milinović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 489. *Na satu fizike učenici su pomiješali 50 cm^3 vode temperature 36 °C i 50 cm^3 alkohola temperature 20 °C te dobili 95 cm^3 mješavine temperature 31 °C. Koliku su temperaturu učenici očekivali dobiti? Zbog čega je temperatura veća od očekivane? Gustoća vode je 1000 kg/m^3, gustoća alkohola je 800 kg/m^3, specifični toplinski kapacitet* *vode je 4200 J/kgK, a specifični toplinski kapacitet alkohola je 2500 J/kgK.*

Rješenje.

$V_v = V_a = 50\ \text{cm}^3 = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$

$V_a = 50\ \text{cm}^3$

$V_{\text{smjese}} = 95\ \text{cm}^3$

$t_v = 36\,^\circ\text{C}$

$t_a = 20\,^\circ\text{C}$

$t_{\text{izmjerena}} = 31\,^\circ\text{C}$

$\rho_v = 1000\ \text{kg/m}^3$

$\rho_a = 800\ \text{kg/m}^3$

$c_v = 4200\ \text{J/kgK}$

$\underline{c_a = 2500\ \text{J/kgK}}$

$t_{\text{srednja}} = t_s = ?$

$$m_v = \rho \cdot V = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 = 0.05\ \text{kg}$$

$$m_a = \rho_a \cdot V = 800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 = 0.04\ \text{kg}$$

$$Q_a = Q_v$$

$$c_a \cdot m_a \cdot (t_s - t_a) = c_v \cdot m_v \cdot (t_v - t_s)$$

$$2500\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.04\ \text{kg} \cdot (t_s - 20\,^\circ\text{C}) = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.05\ \text{kg} \cdot (36\,^\circ\text{C} - t_s)$$

$$100 \cdot (t_s - 20\,^\circ\text{C}) = 210 \cdot (36\,^\circ\text{C} - t_s)$$

$$100t_s - 2000\,^\circ\text{C} = 7560\,^\circ\text{C} - 210t_s$$

$$310t_s = 9560\,^\circ\text{C}$$

$$t_s = \frac{9560\,^\circ\text{C}}{310} = 30.8\,^\circ\text{C}.$$

Smanjenje obujma mješavine ovih dviju tekućina je utjecalo na promjenu unutarnje energije smjese koja je određena kinetičkom i potencijalnom energijom čestica. Difuzija čestica alkohola među čestice vode je utjecala na unutarnju energiju smjese.

Jana Ribičić (8), OŠ Horvati, Zagreb

1756. *Lijevo do konvergentne leće nalazi se predmet, a desno realna oštra slika predmeta. Predmet se nalazi 10 cm ispred (lijevo od) lijevog fokusa leće, a slika je 2.5 cm iza (desno od) desnog fokusa leće. Odredi jačinu leće i uvećanje.*

Rješenje. Ako je a udaljenost predmeta od leće, b udaljenost slike od leće, f žarišna daljina leće i m povećanje leće, tada vrijedi:

$$a = f + 10\ \text{cm},$$

$$b = f + 2.5\ \text{cm}.$$

Primjenom jednadžbe leće $f = \dfrac{ab}{a+b}$ dobivamo jednadžbu:

$$f = \frac{(f+10)(f+2.5)}{(f+10)+(f+2.5)}.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$f \cdot (2f + 12.5) = f^2 + 12.5f + 25,$$

$$f^2 = 25,$$

$$f = \pm 5.$$

Žarišna daljina konvergentne leće je pozitivna, pa je $f = 5$ cm. Kako je $a = f + 10$ cm i $b = f + 2.5$ cm slijedi $a = 15$ cm i $b = 7.5$ cm. Jačina leće je

$$J = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.05\ \text{m}} = +20\ \text{dpt}.$$

Uvećanje je

$$m = \frac{-b}{a} = \frac{-7.5}{15} = -\frac{1}{2}.$$

Slika je realna, obrnuta i umanjena.

Borna Cesarec (3), Srednja škola Krapina, Krapina

1757. *U trenutku presijecanja Zemljine putanje oko Sunca (na udaljenosti 1 a.j. od Sunca), asteroid ima 15 % veću brzinu u odnosu na Sunce od brzine kruženja Zemlje. Odredi ophodno vrijeme asteroida u godinama.*

Rješenje. Usporedba sa Zemljinom putanjom omogućuje nam da iz zadanoga izračunamo veliku poluos elipse putanje asteroida a, a iz 3. Keplerovog zakona i ophodno vrijeme T. Brzina vrtnje Zemlje oko Sunca određena je izjednačavanjem centripetalne i gravitacijske akceleracije,

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{GM}{r_0},$$

gdje je r_0 radijus, a v_0 brzina kruženja. Asteroid u perihelu ima brzinu v_p i udaljenost r_p, a u afelu v_a i r_a. Iz drugog Keplerovog zakona imamo

$$v_p r_p = v_a r_a,$$

a iz vis-viva jednadžbe vrijedi

$$\frac{v_p v_a}{2} = \frac{GM}{a} = \frac{2GM}{r_p + r_a}.$$

Uvrstimo li GM iz jednadžbe za Zemlju (oboje orbitiraju oko Sunca!) dobijemo

$$\frac{v_p v_a}{2} = \frac{r_0 v_0^2}{r_p + r_a}.$$

Sve orbite koje kružnicu Zemljine putanje sijeku istom brzinom imaju istu energiju, pa dakle i veliku poluos. Odaberemo li onu kojoj je taj trenutak perihel, imamo:

$$v_p = 1.15 v_0,$$
$$r_p = r_0,$$
$$1.15 v_0 r_0 = v_a r_a.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$\frac{1.15 v_0}{2} \frac{1.15 v_0 r_0}{r_a} = \frac{r_0 v_0^2}{r_0 + r_a},$$
$$\frac{1.15^2}{2} \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_0 + r_a}.$$

Budući da je $r_0 = 1$ a.j. slijedi

$$r_a = \frac{1}{2/1.15^2 - 1} = 1.952 \text{ a.j.}$$

Odatle je

$$a = \frac{1 + r_a}{2} = 1.476 \text{ a.j.},$$
$$T = \sqrt{a^3} = 1.7932 \text{ godine.}$$

Filip Vučić (3),
I. gimnazija, Zagreb

1758. *U kalorimetru se nalazi 5.5 dl vode, temperature 5 °C. Nakon ulijevanja jednakog volumena etilnog alkohola, ravnotežna temperatura se uspostavi na 24 °C. Odredi početnu temperaturu alkohola i porast entropije. Specifični toplinski kapacitet alkohola je 2500 J/kgK, a gustoća 790 kg/m³. Gubitke topline i isparavanje alkohola zanemari.*

Rješenje. Uliveni etilni alkohol hlađenjem s T_A na $\tau = 24\,^\circ\mathrm{C}$ daje toplinsku energiju

$$\begin{aligned} Q &= m_A c_A \Delta T_A = \rho_A V_A c_A (T_A - 297) \\ &= 790 \text{ kg/ m}^3 \cdot 0.00055 \text{ m}^3 \\ &\quad \cdot 2500 \text{ J/ kgK} \cdot (T_A - 297) \\ &= 1086.25 T_A - 322616.25. \end{aligned}$$

Ona je jednaka energiji koju primi voda:

$$\begin{aligned} Q &= m_V c_V \Delta T_V = \rho_V V_V c_V \Delta T_V \\ &= 1000 \text{ kg/ m}^3 \cdot 0.00055 \text{ m}^3 \\ &\quad \cdot 4200 \text{ J/ kgK} \cdot 19 \text{ K} \\ &= 43890 \text{ J}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem energija slijedi početna temperatura etilnog alkohola:

$$T_A = 337.4 \text{ K} = 64.4\,^\circ\mathrm{C}.$$

Entropija ulivenog etilnog alkohola smanjila se hlađenjem

$$\begin{aligned} S_1 &= m_A c_A \ln\left(\frac{\tau}{T_A}\right) \\ &= 0.4345 \cdot 2500 \ln\left(\frac{297}{337.4}\right) \\ &= -138.54 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

Entropija vode u kalorimetru se povećala zbog zagrijavanja

$$\begin{aligned} S_2 &= m_V c_V \ln\left(\frac{\tau}{T_V}\right) \\ &= 0.55 \cdot 4200 \ln\left(\frac{297}{278}\right) \\ &= 152.72 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

Znači, gledano ukupno, entropija se povećala za

$$S = S_1 + S_2 = 14.18 \text{ J/K}.$$

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1759. *Mješavina vodika i dušika ima gustoću 31 % manju od gustoće zraka pri istoj temperaturi i tlaku. Odredi volumni udio vodika u mješavini. Odredi brzinu zvuka u mješavini pri temperaturi 310 K. Vodik i dušik su dvoatomni plinovi, atomske mase 1 i 14 g/mol.*

Rješenje. Gustoća idealnog plina je uz konstantnu temperaturu i tlak proporcionalna prosječnoj molekulskoj masi. Za zrak, ona iznosi 29 g/mol. 31 % manja gustoća bi odgovarala molekulskoj masi

$$M = 29 \text{ g/mol} \cdot (1 - 0.31) = 20.01 \text{ g/mol}.$$

S obzirom da je molekulska masa vodika 2 g/mol, a dušika 28 g/mol, udio vodika x dobijemo iz jednadžbe:

$$x \cdot 2 + (1 - x) \cdot 28 = 20.01$$
$$26x = 7.99$$
$$x = 0.3073.$$

Dakle, vodika je 30.73 %, a dušika 69.27 %. Brzina zvuka pri temperaturi 310 K određena je izrazom:

$$v_z = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

pri čemu je $\gamma = 1.4$ koeficijent adijabatske ekspanzije dvoatomnog plina. M preračunamo u kg/mol i uvrstimo:

$$v_z = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.314 \cdot 310}{0.02001}} = 424.6 \text{ m/s}.$$

Filip Vučić (3), Zagreb

1760. *U trenutku prolaza kroz ravnotežni položaj, brzina njihala je 35 cm/s, a 0.2 s kasnije brzina iznosi 22 cm/s. Odredi period njihanja, duljinu njihala i kut maksimalnog otklona.*

Rješenje. Brzina njihala, uz ravnotežni položaj u trenutku $t = 0$ mijenja se po funkciji

$$v(t) = v_m \cos(\omega t).$$

Za $t = 0$ imamo

$$35 \text{ cm/s} = v_m \cos(\omega 0) \implies v_m = 35 \text{ cm/s}.$$

Za $t = 0.2$ s je

$$22 = 35 \cos(\omega \cdot 0.2) \implies \omega = 4.4554 \text{ rad/s}.$$

Odavde su period i duljina njihala

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.41 \text{ s},$$

$$l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.81}{4.4554^2} = 0.4942 \text{ m}.$$

Kut maksimalnog otklona α_m u odnosu na ravnotežni položaj, određen je dosegnutom visinom koja iznosi

$$h = \frac{v_m^2}{2g} = \frac{0.35^2}{2 \cdot 9.81} = 0.006244 \text{ m}.$$

Budući je $h = l(1 - \cos\alpha_m)$, slijedi

$$\alpha_m = 9^\circ\, 7'.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

1761. *Odredi prosječnu gustoću planeta koji ima 10 puta manju masu od Zemlje, uz 45 % slabije ubrzanje sile teže na površini. Prosječna gustoća Zemlje iznosi 5520 kg/m*^{3}.

Rješenje. Prema općem zakonu gravitacije, na površini toga planeta vrijedi:

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2}.$$

Iz zadane usporedbe sa Zemljom proizlazi

$$0.55g = \frac{GM/10}{R_P^2}.$$

Kako je $g = \dfrac{GM}{R^2}$ slijedi

$$R^2 = 5.5R_P^2.$$
$$V = 5.5^{\frac{3}{2}} V_P.$$

Tražena gustoća planeta je

$$\rho_P = \frac{M_P}{V_P} = \frac{M/10}{V/5.5^{\frac{3}{2}}} = \rho \frac{5.5^{\frac{3}{2}}}{10}$$
$$= 5520 \cdot \frac{12.8986}{10} = 7120 \text{ kg/m}^3.$$

Filip Vučić (3), Zagreb

1762. *Laser emitira monokromatsku svjetlost valne duljine 594 nm. Ako mu je izlazna snaga 5 mW, koliko fotona emitira laser u jednoj sekundi?*

Rješenje. Rad lasera u jednoj sekundi je

$$W = Pt = 5 \text{ mJ}.$$

Energija svakog pojedinačnog fotona je

$$\Delta E = h\nu,$$

odatle je broj fotona u sekundi jednak

$$N = \frac{W}{\Delta E} = \frac{Pt}{h\nu} = \frac{Pt\lambda}{hc},$$

$$N = \frac{0.005 \cdot 1 \cdot 594 \cdot 10^{-9}}{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}$$
$$= 1.5 \cdot 10^{16}.$$

Borna Gojšić (3),
Gimnazija Karlovac, Karlovac