62. Međunarodna matematička olimpijada 2021. g.

Međunarodna matematička olimpijada održana je i ove godine unatoč nastavku COVID-19 pandemije. Olimpijada je trajala od 14. do 24. srpnja, a zemlja domaćin ponovno je bila Rusija. Hrvatsku su ove godine na natjecanju predstavljali *Andrej Čizmarević* (4. r.), Gimnazija Andrije Mohorovičića u Rijeci, *Jakov Ljubičić* (4. r.), Gimnazija Lucijana Vranjanina u Zagrebu, *Bernard Inkret* (3. r.), *Dorijan Lendvaj* (3. r.), *Krešimir Nežmah* (4. r.) i *Ivan Vojvodić* (4. r.), XV. gimnazija u Zagrebu. Voditelji ekipe bili su *Matija Bašić*, *Ilko Brnetić* i *Josip Pupić*.

IMO 2021

Budući da su lani putovanja i okupljanja bila onemogućena, Sankt Peterburg je opet odabran kao lokacija u nadi da ćemo ove godine moći razgledati grad i upoznati se uživo s natjecateljima iz raznih država. Ipak, samo natjecanje se održavalo u matičnim zemaljama na daljinu, a naša je ekipa zadatke rješavala na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Organizatori su svejedno pokušali dočarati doživljaj olimpijade te su se potrudili popuniti program raznim zanimljivim aktivnostima. Prvi dani olimpijade započeli su s virtualnim otvaranjem i predstavljanjem sudionika iz svih zemalja. Tijekom cijele olimpijade dojmove smo mogli komentirati s drugim natjecateljima preko organiziranih grupa na društvenim mrežama. Održano je virtualno razgledavanje grada, a imali smo i priliku pratiti mnoge ekskluzivne intervjue s poznatim matematičarima i znanstvenicima. Vrijeme rješavanja svakog dana je 4 sata i 30 minuta. Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Najveći naglasak i dalje je bio na samim danima rješavanja zadataka, 19. i 20. srpnja. Svaki dan su dana po tri zadatka iz različitih područja matematike, poredanih po težini. Nakon prvog dana bili smo pomalo iznenađeni težinom drugog zadatka, kojeg je jedino Bernard riješio, te činjenicom da se već dvije godine zaredom na natjecanju pojavio zadatak s nejednakostima. Drugi dan nam je bolje sjeo i dobili smo puno više bodova na drugom zadatku. Dojam nakon natjecanja bio je da smo svi dobro riješili, no pomalo smo bili pesimistički raspoloženi procijenivši da bi većini nas mogao nedostajati pokoji bod do željene medalje.

Sljedećih nekoliko dana, od 21. do 23. srpnja, naši su voditelji koordinirali bodovanje naših rješenja i zadnjeg dana olimpijade, 24. srpnja, objavljeni su službeni rezultati. Pokazalo se da su zadaci bili iznimno teški i izazovni te smo se ugodno iznenadili svojim plasmanom. Hrvatska je na IMO-u 2021. podijelila 21. mjesto s Hong Kongom, a pojedinačno smo osvojili jednu zlatnu (Bernard), dvije srebrne (Ivan, Krešimir) i tri brončane (Andrej, Dorijan, Jakov) medalje. Zadnji put kada smo osvojili zlatnu medalju bilo je 2015. godine, a zadnji put da je svaki član ekipe osvojio medalju 2011., stoga ovo predstavlja izniman uspjeh i jedan od najboljih dosadašnjih rezultata za Hrvatsku. Za kraj, iako se olimpijada nije održala uživo, treba zahvaliti organizatorima što su ipak uspjeli od natjecanja napraviti nezaboravno iskustvo i mislim da će nam ono svima ostati u osobito dragom i trajnom sjećanju.

Bodovi hrvatskih učenika na 62. IMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
B. Inkret	7	7	0	7	7	0	28	zlatna
I. Vojvodić	7	1	0	7	7	0	22	srebrna
K. Nežmah	7	0	0	7	7	0	21	srebrna
A. Čizmarević	7	0	1	7	0	0	15	brončana
D. Lendvaj	7	0	0	0	7	0	14	brončana
J. Ljubičić	5	0	0	7	1	0	13	brončana
ekipni rezultat	40	8	1	35	29	0	113	

Krešimir Nežmah

Zadatci

Prvi dan, ponedjeljak, 19. srpnja 2021.

Zadatak 1. Neka je $n \geq 100$ prirodni broj. Ivan zapisuje svaki od brojeva n, $n+1$, $\ldots$, $2n$ na zasebnu karticu. Nakon toga miješa tih $n+1$ kartica i dijeli ih u dvije hrpe. Dokaži da barem jedna od tih hrpa sadrži dvije kartice takve da je zbroj brojeva napisanih na njima kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 2. Dokaži da nejednakost $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$ vrijedi za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$.

Zadatak 3. U unutrašnjosti šiljastokutnog trokuta ABC u kojem je $|AB| > |AC|$, dana je točka D takva da vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Za točku E na dužini $\overline{AC}$ vrijedi $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, za točku F na dužini $\overline{AB}$ vrijedi $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, te za točku X na pravcu AC vrijedi $|CX| = |BX|$. Neka su O_1 i O_2 središta kružnica opisanih trokutima ADC i EXD, redom. Dokaži da se pravci BC, EF i O_1O_2 sijeku u jednoj točki.

Drugi dan, utorak, 20. srpnja 2021.

Zadatak 4. Neka je Γ kružnica sa središtem I, te $ABCD$ konveksan četverokut takav da dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ diraju Γ. Neka je Ω kružnica opisana trokutu AIC. Produžetak dužine $\overline{BA}$ preko A siječe Ω u X, a produžetak dužine $\overline{BC}$ preko C siječe Ω u Z. Produžeci dužina $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ preko D sijeku Ω u Y i T, redom. Dokaži da vrijedi $|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|$.

Zadatak 5. Vjeverice Grmko i Skočko su skupile 2021 orah tijekom zime. Skočko je označio orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 malu rupu ukrug u tlu oko najdražeg stabla. Idućeg jutra Skočko je primijetio da je Grmko stavio po jedan orah u svaku rupu, ali nije obraćao pažnju na brojeve. Skočko je zato odlučio promijeniti raspored oraha nizom od 2021 poteza. U k-tom potezu, Skočko mijenja pozicije dvama orasima susjedima orahu označenom brojem k. Dokaži da postoji broj k takav da u k-tom potezu Skočko mijenja pozicije nekim orasima označenima brojevima a i b takvima da vrijedi $a < k < b$.

Zadatak 6. Neka je $m \geq 2$ prirodni broj, A konačan skup (ne nužno pozitivnih) cijelih brojeva, te B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_m podskupovi skupa A. Ako za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ zbroj elemenata skupa B_k iznosi m^k, dokaži da A ima barem $\frac{m}{2}$ elemenata.

Rang-lista

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Kina	6				208
Rusija	5	1			183
Južna Koreja	5	1			172
SAD	4	2			165
Kanada	3	3			151
Ukrajina	3	2	1		149
Italija	1	4	1		139
Izrael	3	2	1		139
Tajvan	1	3	2		131
Velika Britanija	2	3		1	131
Mongolija	2	2	2		130
Njemačka	2	2	1	1	129
Poljska	1	5			126
Vijetnam	1	2	3		125
Singapur	1	3	2		123
Češka	1	3	1		121
Tajland	1	3	2		121
Australija	2	2	1	1	120
Bugarska	1	3	2		120
Kazahstan	1	3	2		117
Hong Kong	1	3	1		113
Hrvatska	1	2	3		113
Filipini		4	2		111
Bjelorusija		4	1	1	109
Japan	1	2	3		108
Indija	1	1	3		106
Francuska	1	1	3		105
Rumunjska		3	2	1	105
Iran		3	3		104
Peru		2	4		103
Srbija	1	2	1	1	102
Mađarska		1	5		101
Indonezija		2	4		99
Meksiko		2	4		98
Brazil		2	3	1	96
Turska		1	5		96
Armenija		2	3		91
Saudijska Arabija		1	3	2	90
Slovačka		2	2	1	82
Bosna i Hercegovina			5	1	81
Gruzija		1	3	1	74
Malezija		2		3	74
Bangladeš			3	2	68
Belgija			3	3	68
Sjeverna Makedonija		1	2	2	67
Argentina		2		2	66
Nizozemska			2	3	65
Latvija			3	3	64
Švicarska			3	1	64
Estonija		1	1	3	63
Azerbajdžan			2	3	62
Moldavija			3	2	62
Norveška		1	1	3	62
Makau			3	2	60
Portugal		1	2	1	60
Tunis		1	1	2	57
Švedska		1	1	1	56
Turkmenistan			3	2	55
Tađikistan			3	1	54
Južnoafrička Rebublika			3	1	53
Kolumbija		1	1	1	51
Uzbekistan		1	1	1	51
Španjolska			1	3	50
Austrija			2	1	47
Grčka			2	1	47
Slovenija			2	2	47
Danska			1	3	46
Sirija			2	2	44
Finska			1	3	41
Novi Zeland			2		41
Salvador (5)			1	1	37
Panama (3)			1	1	36
Ekvador			2		34
Kirgistan				2	34
Maroko				3	33
Litva			1		31
Bolivija				1	28
Cipar				2	28
Crna Gora (4)		1		1	27
Portoriko			1	1	27
Nikaragva			1	1	25
Šri Lanka				2	25
Venecuela (4)				2	24
Čile				2	23
Kostarika			1		23
Kosovo				1	23
Paragvaj			1		18
Urugvaj (4)				1	17
Alžir					16
Irak (5)			1		16
Nepal				1	15
Honduras				1	13
Irska				1	12
Albanija				1	11
Gana (4)				1	11
Island				1	11
Trinidad i Tobago (4)				1	10
Luksemburg (2)				1	7
Mauritanija					7
Nigerija					6
Ruanda					3
Uganda					3
Egipat (2)					2
Kenija					2
Oman					2
Pakistan					2
Bocvana					0

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.