DRAGA SJEĆANJA NA MOJE OSNOVNOŠKOLSKO MATEMATIČKO OBRAZOVANJE

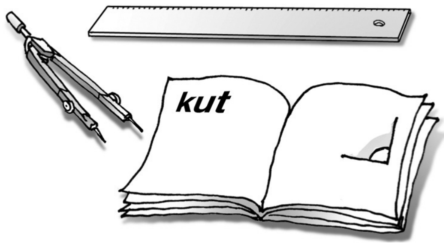
Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Ovaj članak pišem s nadom da će biti zanimljiv i poučan za mlade učenike, a iz njega bi možda mogli nešto i naučiti. Radi se o sjećanjima na moje osnovnoškolsko obrazovanje u rodnom gradu Trebinju na jugu Hercegovine. U 8. razredu osnovne škole matematiku mi je predavao jedan zanimljiv nastavnik koji je tada imao nekih 50-60 godina. Bilo je to vrijeme kada u Bosni i Hercegovini nije bilo udžbenika i zbirki zadataka iz matematike pa nam je naš nastavnik bio glavni izvor znanja iz ovog predmeta. Nažalost, udžbenika iz matematike nije bilo ni kasnije kada sam bio učenik trebinjske gimnazije koja je osnovana 1921. godine. Možete zamisliti koliko sam bio sretan kada je do mene došao udžbenik iz matematike za četvrti razred u Republici Hrvatskoj. Bio je to udžbenik *Matematika za 4. razred gimnazije* čiji su autori bili Đ. Kurepa, I. Smolec i S. Škreblin. Puno sam naučio iz te knjige i riješio sve zadatke iz nje. Mogu s pravom reći da je ona bila izuzetno značajna za moje matematičko obrazovanje i opredjeljenje za studij matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. Tada nisam znao tko je Đuro Kurepa, ali sam nešto kasnije kao student matematike saznao o kako se velikom matematičaru radi. Kao student završne godine studija matematike kupio sam njegove dvije knjige *Viša algebra I* i *II* koje su se pojavile 1965. godine kada su i objavljene. Iznos koji sam platio za njih bio je u visini moje jednomjesečne stipendije koju sam primao od Općine Trebinje.

Godine 1970. u Ohridu (Makedonija) održan je 5. Kongres matematičara naše bivše države SFR Jugoslavije. Ja sam iz svoga grada kao profesor matematike u gimnaziji otišao na taj veliki skup matematičara. Naravno, tamo je bio i veliki profesor (kasnije akademik) Đuro Kurepa. Zahvaljujući jednom starijem profesoru matematike iz Tuzle, koji je studirao matematiku s profesorom Kurepom, ja sam upoznao toga iznimnog čovjeka i čak smo razgovarali 10-15 minuta. Bio je vrlo zadovoljan kada sam mu rekao da imam njegove dvije knjige *Viša algebra I* i *II* te da sam iz njih mnogo naučio.

No, da se vratim svojim osnovnoškolskim danima i sjećanjima. To ću izložiti u nekoliko primjera.

Primjer 1. Moj nastavnik nam je predavao da je $\sqrt{2}=1.41$; $\sqrt{3}=1.73$ i $\pi=3.14$. Ja sam uočio da je tada $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\pi$ i to priopćio svome nastavniku. On me je začuđeno gledao, a ja sam tada mislio da sam „otkrio Ameriku". Naš nastavnik nije nam rekao da je $\sqrt{2} \approx 1.41$; $\sqrt{3} \approx 1.73$ niti da su to iracionalni brojevi, tj. da se ne mogu napisati u obliku količnika dvaju prirodnih brojeva. Naime, odmah u 1. razredu gimnazije naučio sam da je $\sqrt{2} = 1.41421...$; $\sqrt{3} = 1.73205...$ i $\pi = 3.14159...$ te da je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.14626...$.

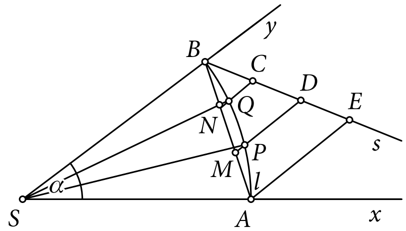


Primjer 2. Naš je nastavnik negdje čuo ili pročitao da nije moguće pomoću šestara i ravnala podijeliti bilo koji nacrtani kut na tri jednaka dijela (napraviti trisekciju kuta). No, tada nije znao da je francuski matematičar E. Galois (1811. – 1832.) dokazao poučak u kojem se tvrdi da se ovaj problem ne može riješiti pomoću šestara i ravnala. Izgleda da je on godinama uporno pokušavao riješiti ovaj „nezgodni zadatak". Naravno, ja o svemu ovome u to vrijeme nisam ništa znao. Pred kraj 8. razreda imali smo pismeni rad iz matematike koji se sastojao od dvaju zadataka iz algebre i jednog iz geometrije koji je glasio:

Zadani šiljasti kut podijelite pomoću šestara i ravnala na tri jednaka dijela.

Rekao nam je da ne smijemo uzeti u obzir kut od 45°. Ja sam brzo riješio ona dva zadatka iz algebre i navalio riješiti i ovaj zadatak iz geometrije, misleći pri tome da kada se može podijeliti na dva i četiri jednaka dijela, valjda može i na tri jednaka dijela. Našao sam „rješenje" i predao zadaćnicu svome nastavniku prije kraja sata. On me je s čuđenjem gledao i samo upitao: *Jesi li, bolan, riješio i treći zadatak?* Odgovorio sam mu kratko: *Naravno, nije bilo teško.* Red je da ovdje izložim to moje „rješenje".

Neka je zadan kut $\angle xSy = \alpha$, kao i točke $A \in Sx$ i $B \in Sy$ (Slika 1.). Imamo sada kružni luk $\overset{\frown}{AB} = l$ i odgovarajući tetivu $\overline{AB}$. Sada tetivu $\overline{AB}$ podijelimo na tri jednaka dijela na poznati način; nacrtamo polupravac *Bs* i na njega nanesemo točke *C*, *D* i *E* tako da je |*BC*| = |*CD*| = |*DE*|. Zatim spojimo točke *A* i *E* te nacrtamo paralele *DM* || *AE* i *CN* || *AE*, gdje su točke $M, N \in \overline{AB}$ i vrijedi |*AM*| = |*MN*| = |*BN*|. Sada pravci *DM* i *CN* sijeku luk *l* u točkama *P* i *Q*. Po mojoj „mudroj" logici (nažalost, netočnoj) slijedi da je $\left|\angle BSQ\right| = \left|\angle QSP\right| = \left|\angle PSA\right| = \dfrac{\alpha}{3}$.



Slika 1.

Sutradan, nastavnik je donio naše radove i rekao kratko: *Danas ćemo imati ispravak ovog pismenog, a krećemo od trećeg zadatka. Zapišite da se ovaj zadatak ne može riješiti pomoću šestara i ravnala.* Ja sam vidio da mi je dao ocjenu vrlo dobar (4^-). Ljutito sam reagirao i rekao mu: *To nije točno, ja sam riješio taj zadatak.* On me je strogo pogledao i rekao: *Znaš li ti da ovaj zadatak još nitko nije riješio?* Ja tada, još uvijek ljut, rekoh nastavniku: *Gdje je pogreška u mom rješenju?* Nastavnik je šutio i nije mi to mogao objasniti. Kasnije sam u srednjoj školi shvatio zašto ne valja moje rješenje, tj. da iz jednakosti triju odsječaka na tetivi $\overline{AB}$ ne znači da su dobiveni odgovarajući kutovi jednaki. I danas se slatko smijem sjećajući se ovih događaja.

Primjer 3. Moj nastavnik stalno je isticao da se $x^2 - y^2$, gdje su x i y realni brojevi, može rastaviti na faktore kao $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, ali da se $x^2 + y^2$ ne može rastaviti u skupu $\mathbb{R}$. Meni, po običaju, „vrag nije dao mira" pa sam našao primjer da ovaj drugi zaključak nije točan. Radi se o sljedećoj jednakosti:

$$\left(x^2\right)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2\left(=x^4+\frac{1}{4}y^4\right)=\left(x^2+xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y\right),$$

gdje su x i y realni brojevi.

Moj začuđeni nastavnik gledao je u mene i nije imao komentar. Samo me je upitao: *Kako si našao ovo rješenje?* Kratko sam odgovorio: *Pomnožio sam dvije zagrade na desnoj strani jednakosti i dobio sam lijevu stranu*. On je to provjerio i rekao mi je da sam u pravu. Ipak sam odlučio iznijeti svoje rješenje na ploči:

$$\left(x^2\right)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^4=x^4+\frac{1}{4}y^4+x^2y^2-x^2y^2=$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)^2-\left(xy\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{2}y^2+xy\right)\left(x^2+\frac{1}{2}y^2-xy\right)=$$

$$=\left(x^2+xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2\right).$$

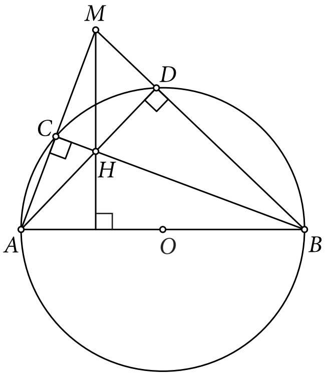
Nešto kasnije uvidio sam da je ovo ipak poseban slučaj zbroja kvadrata gdje se dodavanjem i oduzimanjem istog faktora x^2y^2 dođe do rješenja. To sam objasnio i svome nastavniku koji je zbog toga bio vrlo zadovoljan.

Primjer 4. Kao učenik 8. razreda osnovne škole nisam znao za poučak o odnosu središnjeg i obodnog kuta kruga nad istim lukom (tetivom). Znao sam da se središte kružnice opisane pravokutnom trokutu nalazi u polovištu hipotenuze toga trokuta.

Jedan stariji učenik od mene, gimnazijalac koji je također bio zaljubljen u matematiku kao i ja, postavio mi je sljedeći zadatak:

Iz zadane točke M koja se nalazi izvan zadane kružnice $k(O, r)$ konstruiraj *samo pomoću ravnala* okomicu na promjer $\overline{AB}$ te kružnice.

Nešto dulje sam se kod kuće bavio ovim zanimljivim zadatkom. Zbog ovdje ranije navedenog, uvidio sam da je obodni kut nad promjerom kruga pravi, te sam našao sljedeće rješenje: slika desno.



Slika 2.

Spojio sam ravnalom točke A i B s točkom M i označio s C i D sjecišta pravaca AM i BM s kružnicom k (Slika 2.). Zatim sam pomoću ravnala konstruirao pravce BC, odnosno AD. Očito su AD i BC visine trokuta ΔAMB i sijeku se u točki H. Znao sam od ranije da se visine trokuta sijeku u jednoj točki H - ortocentru trokuta. Na kraju sam pomoću ravnala spojio točke M i H jer i treća visina trokuta prolazi kroz ortocentar trokuta. Lijepo rješenje, nema što!

Na kraju, nadam se da ova moja priča može biti zanimljiva i korisna učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku, kao i nastavnicima koji rade s njima. Što se tiče mog dobrog nastavnika, vjerujem da se ne bi ljutio na mene nakon čitanja ovog mog članka.