VEKTORI

Petra Boras, Leonarda Hunski, Dunja Kosek, XV. gimnazija, Zagreb

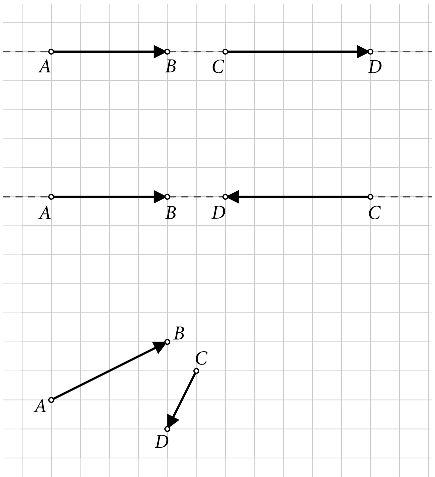
Kada slučajnog prolaznika pitate kako doći do obližnjega kina, informacija „Do kina ćete doći za 300 metara" neće vam puno pomoći jer uputa ne sadrži smjer kretanja. Upravo zato vektori imaju široku primjenu u životu jer istodobno pokazuju iznos i smjer.

Vektor je usmjerena dužina kojoj je jedna rubna točka određena za početak, a druga za završetak. Vektor kojemu je početna točka A, a krajnja B označavamo s $\overrightarrow{AB}$ te je on određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom. Duljina vektora je duljina dužine $\overline{AB}$, smjer vektora određen je pravcem kojemu pripada, a orijantaciju prikazuje njegova strelica.

Nul-vektor je vektor duljine 0, odnosno podudaraju mu se početna i završna točka. Označavamo ga s $\vec{0}$. Jedinični ili ort vektor je vektor duljine 1.

Dva su vektora jednaka ako su jednakih duljina te istoga smjera i orijentacije.

Ako vektori imaju isti smjer, odnosno ako pripadaju istom pravcu ili paralelnim pravcima, onda za njih kažemo da su kolinearni.



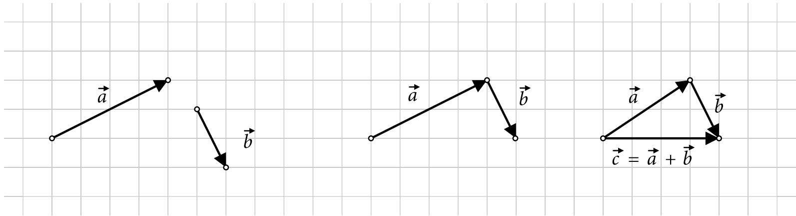
U prvom primjeru vektori imaju isti smjer i orijentaciju, a različitu duljinu.

U drugom primjeru vektori imaju isti smjer, ali različitu orijentaciju i duljinu.

U trećem primjeru vektori imaju različit smjer, orijentaciju i duljinu.

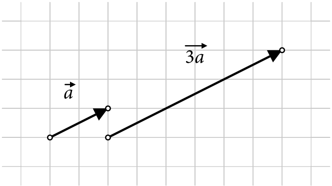
Zbrajanje vektora

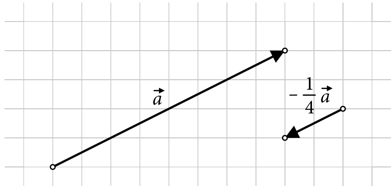
Vektore zbrajamo pravilom trokuta: Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora. Smjestimo ih tako da je krajnja točka prvoga jednaka početnoj točki drugoga vektora. Vektore s ovim svojstvom zovemo nadovezani ili ulančani vektori. Njihov zbroj jednak je vektoru $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, kao na slici.



Množenje vektora brojem

Vektore možemo množiti brojem. Pogledajmo na primjer vektor $3\vec{a}$. To je vektor koji ima isti smjer i orijentaciju kao vektor $\vec{a}$, a duljina mu je tri puta veća. Vektor $-\frac{1}{4}\vec{a}$ ima isti smjer kao vektor $\vec{a}$, suprotne je orijentacije, a duljina mu je četiri puta manja.





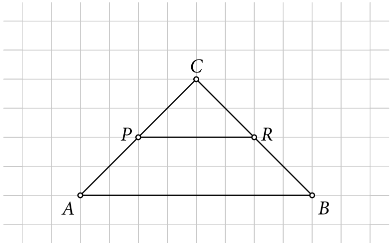
Budući da vektori pokazuju smjer i iznos, mogu biti korisni pri dokazivanju tvrdnji u kojima treba dokazati paralelnost i duljinu.

Teorem o srednjici trokuta

Srednjica trokuta je dužina čije su krajnje točke polovišta dviju stranica trokuta. Dokažimo da za srednjicu trokuta vrijedi:

1) srednjica je paralelna s trećom stranicom trokuta,

2) duljina srednjice je polovica duljine treće stranice.



Označimo polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s P i R, kao na slici. Obje ćemo tvrdnje dokazati ako pokažemo da je $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Dokaz:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR}$$

$$\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

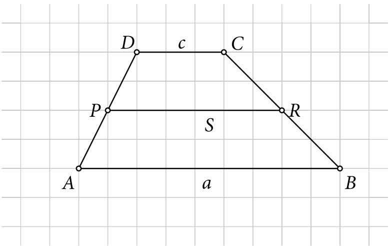
$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} \cdot \vec{0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

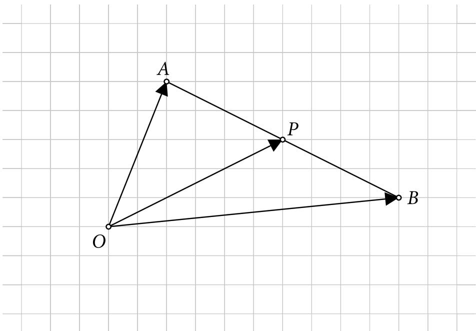
Zadatak 1.

Dokažite da je srednjica *s* trapeza paralelna s osnovicama *a* i *c*, te da vrijedi $s = \frac{a + c}{2}$.



U nekim zadatcima može biti korisno odabrati jednu točku O kao početnu točku svih vektora. Tada označavamo $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$.

Polovište dužine



Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Prikažimo vektor $\vec{r}_P$ pomoću vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$.

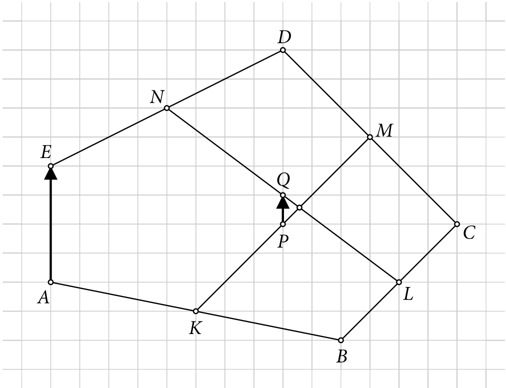
$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\vec{r}_P = \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B.$$

Primjer.

Točke K, L, M, N redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{DE}$ peterokuta $ABCDE$, a P i Q redom su polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$.

Dokažimo da je $\overline{PQ} \parallel \overline{AE}$ i $|PQ| = \dfrac{|AE|}{4}$.



Dokaz:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_L + \vec{r}_N) - \frac{1}{2}(\vec{r}_K + \vec{r}_M) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) + \frac{1}{2}(\vec{r}_D + \vec{r}_E)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) + \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_D)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{r}_E - \vec{r}_A) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$

Zadatak 2.

Točke E i F polovišta su stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$, a točke P, Q, R, S polovišta su dužina $\overline{AF}$, $\overline{ED}$, $\overline{BF}$ i $\overline{EC}$. Dokažite da je četverokut $PQRS$ paralelogram.