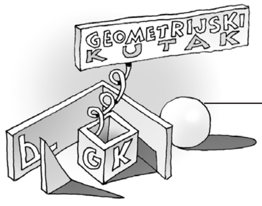
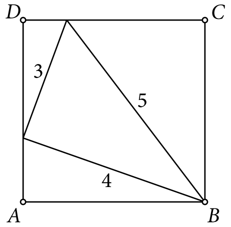



# TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Matka 29 (2020./2021.) br. 115

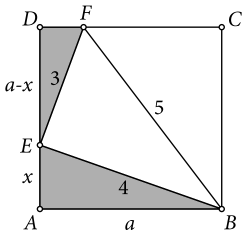



**Primjer 1.** Kolika je površina kvadrata *ABCD* ako su poznate duljine stranica trokuta kao na slici?

***Rješenje:***

Označimo duljinu stranice kvadrata *ABCD* s *a*. Njegova je površina tada $p = a^2$.

Označimo vrh trokuta na dužini $\overline{AD}$ s *E*, a vrh na dužini $\overline{CD}$ s *F*. Iz $3^2 + 4^2 = 5^2$, prema obratu Pitagorina poučka, slijedi da je trokut *BFE* pravokutan, s pravim kutom $\angle BEF$.




Istaknimo trokute *ABE* i *DEF* kao na slici. Ako duljinu $|AE|$ označimo s *x*, onda je $|DE| = a - x$.

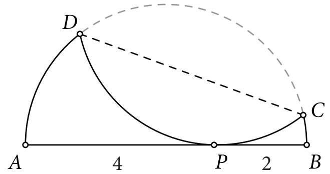
Trokuti *ABE* i *DEF* slični su prema KK poučku o sličnosti trokuta. Oba su pravokutna jer je $|\angle BAE| = |\angle EDF| = 90°$, a vrijedi i $|\angle EBA| = |\angle FED|$ jer su to kutovi s okomitim kracima.

Iz sličnosti tih dvaju trokuta slijedi: $\frac{a}{4} = \frac{a-x}{3} \Rightarrow 3a = 4a - 4x \Rightarrow 4x = a \Rightarrow x = \frac{a}{4}$.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut *ABE* dobiva se:

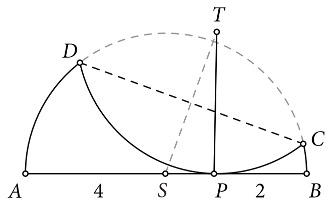
$$x^2 + a^2 = 4^2 \Rightarrow \frac{a^2}{16} + a^2 = 16 \Rightarrow \frac{17a^2}{16} = 16 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{17}.$$

Dakle, površina kvadrata je $p = \frac{256}{17}$.




**Primjer 2.** Kolika je duljina tetive $\overline{CD}$ po kojoj je „presavijen" polukrug kako je prikazano na slici?

***Rješenje:***

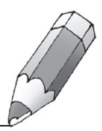


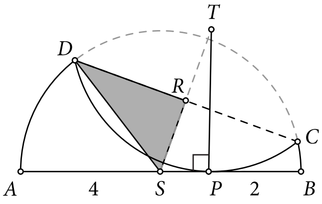

Iz poznatih podataka $|AP| = 4$ i $|PB| = 2$ dobivamo $|AB| = 6$, odnosno polumjer polukruga ima duljinu 3.

Označimo središte polukružnice sa *S*, a njezinu osnosimetričnu sliku s obzirom na pravac *CD* sa *T*.

Dužina $\overline{ST}$ okomita je na $\overline{CD}$, a dužina $\overline{TP}$ okomita je na $\overline{AB}$ jer je pravac *AB* tangenta na luk *DC* sa središtem u točki *T*. Dakle, $\overline{TP}$ polumjer je luka koji pravac *AB* dira u točki *P*.

Slijedi da je $|SP| = |SB| - |PB| = 3 - 2 = 1$. $|TP| = |SA| = 3$ jer su to duljine polumjera osnosimetričnih kružnih lukova s obzirom na pravac *CD*.






Iz pravokutnoga trokuta $SPT$ možemo izračunati duljinu hipotenuze $|ST|$.

$|ST|^2 = |SP|^2 + |TP|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$. Slijedi da je $|ST| = \sqrt{10}$.

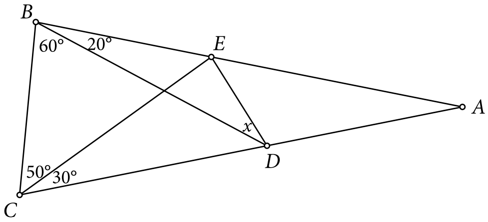
Primijenimo li Pitagorin poučak na istaknuti trokut $DSR$, dobivamo

$$|SR|^2 + |DR|^2 = |DS|^2 \text{, tj. } |DR|^2 = |DS|^2 - |SR|^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9 - \frac{10}{4} = \frac{26}{4},$$

iz čega slijedi $|DR| = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

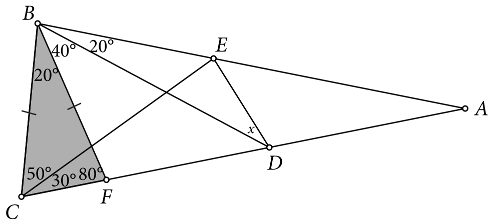
Sada je $|CD| = 2|DR| = \sqrt{26}$.

**Primjer 3.** Odredi veličinu kuta $x$ na slici.




***Rješenje:***

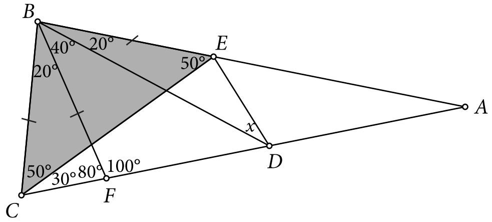
Najprije istaknimo točku $F$ na dužini $\overline{AC}$ takvu da je $|\angle CBF| = 20°$.



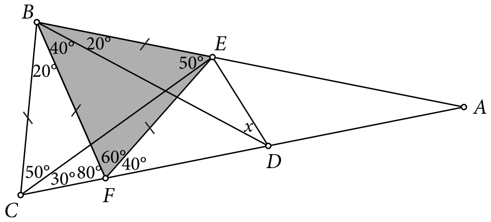

Trokut $CFB$ je jednakokračan jer je $|\angle BFC| = |\angle FCB| = 80°$, iz čega slijedi da je $|BF| = |BC|$.

Kut $\angle DFB$ vanjski je kut trokuta $CFB$, pa je $|\angle DFB| = 180° - |\angle BFC| = 180° - 80° - 100°$.

Promotrimo i trokut $CEB$.

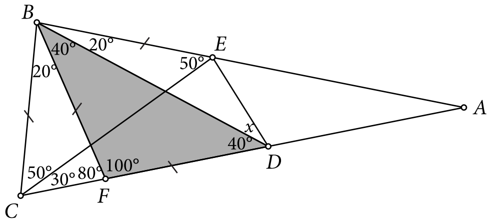



U trokutu $CEB$ vrijedi $|\angle BEC| = 180° - |\angle ECB| - |\angle CBE| = 180° - 50° - 80° = 50°$. To znači da je i trokut $CEB$ jednakokračan, tj. $|BE| = |BC|$. Slijedi $|BF| = |BE|$. Kako je $|\angle FBE| = 60°$, to znači da je trokut $FEB$ jednakostraničan (jednakokračan i kut između krakova jednak 60°).

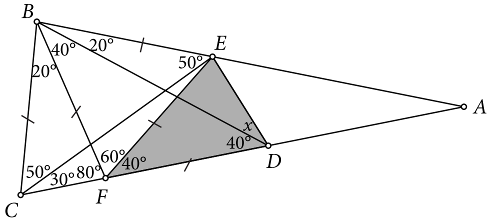



Iz činjenice da je trokut *FEB* jednakostraničan može se zaključiti da je $|EF| =$ $= |BF|$.

Promotrimo još trokut *DBF*. Vrijedi da je $|\angle BDF| = 180° - |\angle FBD| - |\angle DFB| =$ $= 180° - 40° - 100° = 40°$. To znači da je i trokut *DBF* jednakokračan, pa je $|DF| = |BF|$.




Iz $|DF| = |BF| = |EF|$ slijedi da je trokut *DEF* jednakokračan.




Dakle, $|\angle EDF| = |\angle FED| = (180° - 40°) / 2 = 70°$.
Konačno je $x = |\angle EDB| = |\angle EDF| - |\angle BDF| = 70° - 40° = 30°$, i to je tražena mjera kuta.

**Zadatak.** Zadana je dužina $\overline{AB}$ duljine *a* i polukružnica kojoj je $\overline{AB}$ promjer. Odaberemo li po volji točku *P* koja pripada dužini $\overline{AB}$, kroz nju prolazi krivulja, kao na slici, koju čine dvije polukružnice. Je li krivulja koja prolazi točkom *P* dulja, kraća ili jednake duljine kao polukružnica nad $\overline{AB}$?