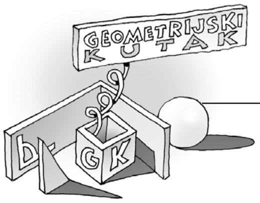
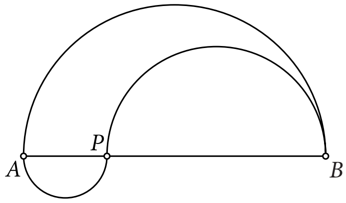


TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Matka 29 (2020./2021.) br. 116

Primjer 1. Zadana je dužina $\overline{AB}$ duljine a i polukružnica kojoj je $\overline{AB}$ promjer. Odaberemo li po volji točku P koja pripada dužini $\overline{AB}$, kroz nju prolazi krivulja, kao na slici, koju čine dvije polukružnice. Je li krivulja koja prolazi točkom P dulja, kraća ili jednake duljine kao polukružnica nad $\overline{AB}$?



Rješenje:

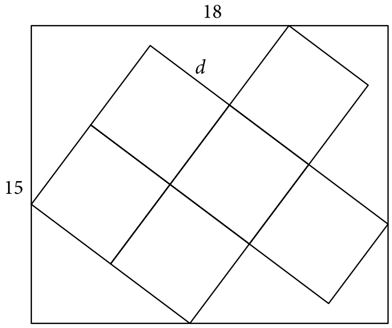
Označimo duljinu polukružnice nad dužinom $\overline{AB}$ s l. Tada vrijedi

$$l = \frac{|AB|}{2} \cdot \pi = \frac{a\pi}{2}.$$

Krivulja koja sadrži točku P sastoji se od dviju polukružnica pa je njezina duljina jednaka zbroju duljina tih dviju polukružnica nad dužinama $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$. Označimo li duljinu te krivulje s d, tada vrijedi

$$d = \frac{|AP|}{2} \cdot \pi + \frac{|PB|}{2} \cdot \pi = \frac{|AP| + |PB|}{2} \cdot \pi = \frac{|AB|}{2} \cdot \pi = \frac{a\pi}{2}. \text{ Dakle, } d = l.$$

Primjer 2. U pravokutnik dimenzija 18×15 upisano je šest sukladnih kvadrata sa stranicom duljine d, kako je prikazano na slici.

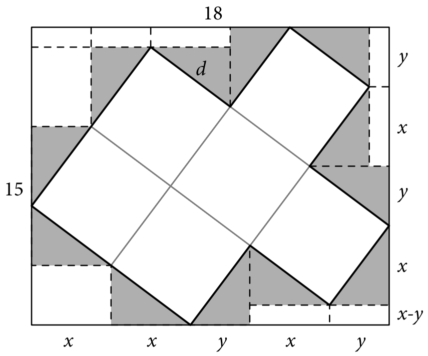


a) Koliko je d?

b) Pokrivaju li upisani kvadrati više od 50 % površine pravokutnika?

Rješenje:

a) Dopunimo sliku sukladnim pravokutnim trokutima kako je prikazano na slici. Katete tih trokuta usporedne su sa stranicama pravokutnika. Duljinu dulje katete označimo s x, a duljinu kraće s y.



Njihove su hipotenuze ujedno i stranice kvadrata pa je stoga njihova duljina d. Za duljinu zadanoga pravokutnika tada vrijedi $x + x + y + x + y = 18$, a za širinu $y + x + y + x + (x - y) = 15$.

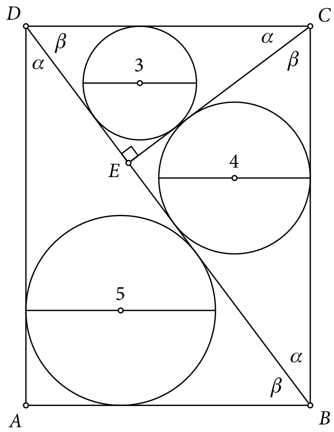
Ove dvije jednadžbe čine sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$.

Rješavanjem sustava dobivaju se duljine kateta istaknutih pravokutnih trokuta, $x = 4$ i $y = 3$.

Iz Pitagorina poučka slijedi da su duljine stranica kvadrata

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

b) Površina zadanoga pravokutnika je $p_p = 18 \cdot 15 = 270$, a zbroj površina šest kvadrata je $p_k = 6 \cdot d^2 = 6 \cdot 25 = 150$. Iz $\frac{p_k}{p_p} = \frac{150}{270} = \frac{5}{9}$ slijedi $p_k = \frac{5}{9} p_p > \frac{1}{2} p_p$, tj. kvadrati pokrivaju više od 50 % površine pravokutnika.

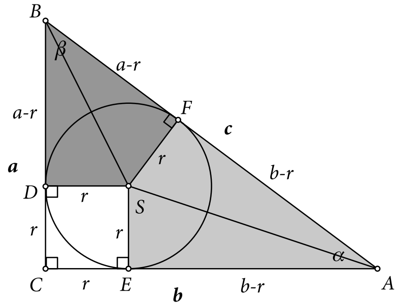


Primjer 3. Pravokutnik *ABCD* je dijagonalom $\overline{BD}$ podijeljen na dva pravokutna trokuta. Visina $\overline{CE}$ na stranicu $\overline{BD}$ dijeli ΔBCD na dva pravokutna trokuta. Trokutima ΔCDE, ΔBCE i ABD upisane su kružnice čiji promjeri redom imaju duljine 3, 4 i 5. Kolika je površina pravokutnika *ABCD*?

Rješenje:

Za rješavanje zadatka iskoristit ćemo jedno općenito svojstvo upisane kružnice pravokutnome trokutu.

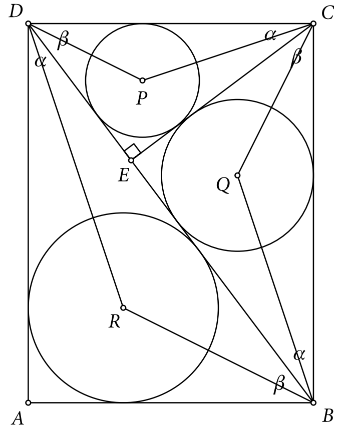
Neka je pravokutnome trokutu ΔABC upisana kružnica sa središtem *S*.



Središte *S* upisane kružnice sjecište je simetrala unutarnjih kutova trokuta pa je $|\angle SAE| = |\angle FAS| = \frac{\alpha}{2}$ i $|\angle DBS| = |\angle SBF| = \frac{\beta}{2}$. Prema S-S-K poučku o sukladnosti trokuta vrijedi $\Delta ASE \cong \Delta ASF$ te $\Delta BSD \cong \Delta BSF$ jer ti trokuti imaju jednu stranicu (hipotenuzu) zajedničku, a jedna kateta im je polumjer upisane kružnice. Kut nasuprot dulje stranice u tim trokutima jest pravi kut.

Iz ovih sukladnosti slijedi $|BF| = |BD| = a - r$ i $|AF| = |AE| = b - r$.

Iz $|AB| = |AF| + |BF| = (b - r) + (a - r)$ slijedi $c = a + b - 2r$, tj. $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

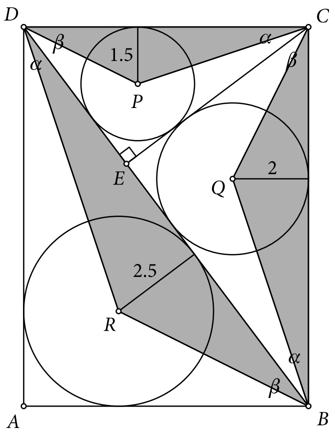


Ovom ćemo se formulom koristiti nešto kasnije.

Označimo najprije središta upisanih kružnica trokuta ΔCDE, ΔBCE i ΔABD redom P, Q i R.

U trokutu ΔCDE vrijedi da dužina $\overline{CP}$ pripada simetrali kuta $\angle DCE$, a dužina $\overline{DP}$ simetrali kuta $\angle EDC$. To znači da je $|\angle DCP| = \frac{\alpha}{2}$ i $|\angle PDC| = \frac{\beta}{2}$.

Do sličnoga zaključka može se doći i u trokutima ΔBCE te ΔABD. Istaknimo trokute ΔCDP, ΔBCQ i ΔBDR.



Za ove trokute vrijedi

$$|\angle DCP| = |\angle CBQ| = |\angle RDB| = \frac{\alpha}{2}$$

i

$$|\angle PDC| = |\angle QCB| = |\angle DBR| = \frac{\beta}{2}.$$

Prema K-K poučku o sličnosti trokuta vrijedi $\Delta CDP \sim \Delta BCQ \sim \Delta DBR$, iz čega slijedi jednakost omjera $\frac{|CD|}{1.5} = \frac{|BC|}{2} = \frac{|BD|}{2.5}$. To se drugačije može zapisati $|CD| = 1.5k$, $|BC| = 2k$ i $|BD| = 2.5k$, gdje je $k > 0$.

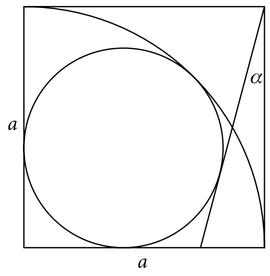
Za određivanje broja k iskoristit ćemo formulu izvedenu na početku rješenja, a primijenjenu na trokut ΔABD. U tome trokutu vrijedi $\frac{1}{2}\left(|AB| + |AD| - |BD|\right) = 2.5 \Rightarrow 1.5k + 2k - 2.5k = 5 \Rightarrow k = 5$.

Dakle, stranice pravokutnika imaju duljine

$$|AB| = 1.5k = 7.5 \text{, a } |AD| = 2k = 10.$$

Površina pravokutnika $ABCD$ je

$$p = |AB| \cdot |AD| = 7.5 \cdot 10 = 75.$$



Zadatak. Zadan je kvadrat sa stranicom duljine a kao na slici desno. Kolika je veličina kuta α?