*Nastavak iz prethodnog broja Poučka*

# Zadaci i rješenja Kantonalnog natjecanja iz matematike u Sarajevu 2019. godine

Amar Bašić[1], Aida Rizvanović[2], Belma Alihodžić[3]

## Zadaci za III. razred

**1.** Ako vrijedi jednakost $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=-1, \quad (\cos\beta\neq 0, \quad \sin\beta\neq 0)$, treba dokazati da onda vrijedi

$$\frac{\cos^3\beta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha}=1, \quad (\cos\alpha\neq 0, \quad \sin\alpha\neq 0).$$

**2.** Treba naći sve prirodne brojeve $n$ manje od 100 kojima je zbroj znamenaka u dekadskom zapisu jednak zbroju znamenaka u binarnom zapisu.

**3.** Dane su kružnica $k$ s centrom u točki $O$ i točka $A\in k$. Na pravcu $OA$ uočena je točka $C$ takva da vrijedi poredak $(O-A-C)$ i da je $\overline{OA}=\overline{AC}$ (tj. $C$ je simetrična točki $O$ s obzirom na točku $A$). Neka je točka $B$ središte dužine $\overline{AC}$. Uočena je i točka $Q\in k$ takva da je kut $\angle AOQ$ tup. Neka se pravac $QO$ i simetrala dužine $\overline{CQ}$ sijeku u točki $P$. Treba dokazati da je $|\angle POB|=2|\angle PBO|$.

**4.** U utrci je nastupalo 100 natjecatelja i nikoja dva nisu utrku završila s istim vremenom. Svakom je natjecatelju na kraju utrke postavljeno pitanje na kojem je mjestu završio utrku i svi su odgovorili brojem između 1 i 100. Zbroj svih odgovora iznosi 4000. Koji je najmanji broj krivih odgovora koje su natjecatelji mogli dati? Odgovor detaljno obrazložiti.

[1]Amar Bašić, II. gimnazija, Sarajevo, BIH
[2]Aida Rizvanović, Prosvjetno-pedagoški zavod Kantona Sarajevo, BIH
[3]Belma Alihodžić, Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BIH

## Rješenja zadataka za treći razred:

**Zadatak 1.:**

***Prvo rješenje:*** Iz danog uvjeta zadatka $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=-1$ imamo da vrijedi:

$$2\sin(\alpha+\beta)=-\sin 2\beta \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\sin\beta=-\cos\beta(\sin\alpha+\sin\beta) \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=-\sin\beta(\cos\alpha+\cos\beta) \qquad (3)$$

Primjenjujući sada jednakosti (1), (2) i (3) dobivamo

$$\frac{\cos^3\beta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha}=\frac{\cos^3\beta\sin\alpha+\sin^3\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\beta\cos\beta\sin\alpha+\sin^2\beta\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{-\sin\beta\cos^2\beta(\cos\alpha+\cos\beta)-\cos\beta\sin^2\beta(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{-\sin\beta\cos\beta\left[\cos\beta(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin\beta(\sin\alpha+\sin\beta)\right]}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{-\sin\beta\cos\beta\left[1+\cos(\alpha-\beta)\right]}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{-\sin 2\beta\left[1+\cos(\alpha-\beta)\right]}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{-\sin 2\beta-\sin 2\beta\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{-\sin 2\beta+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{-\sin 2\beta+\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}=1,$$

što je i trebalo dokazati.

***Drugo rješenje:*** Neka je $\sin\beta = x$, $\cos\beta = y$ i $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c$. Tada iz danog uvjeta zadatka $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -1$ imamo da je $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -1 - c$.

Sada dobivamo da vrijedi

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$(cx)^2 + ((-1-c)y)^2 = 1.$$

Rješavajući gore dobiveni sustav jednadžbi po $x^2$ i $y^2$ dobivamo

$$x^2 = \frac{c^2+2c}{1+2c}, \quad y^2 = \frac{1-c^2}{1+2c}.$$

Konačno je

$$\frac{\cos^3\beta}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha} = \frac{y^2}{-1-c} + \frac{x^2}{c} = \frac{1-c^2}{(-c-1)(2c+1)} + \frac{c^2+2c}{c(2c+1)} = \frac{c+2}{2c+1} + \frac{c-1}{2c+1} = 1,$$

što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 2.:**

***Rješenje:*** Označimo redom sa $S_{10}(n)$ i $S_2(n)$ zbroj znamenaka prirodnog broja $n$ u dekadskom, odnosno binarnom sustavu.

Kako je $n < 100 < 2^7$, to broj $n$ u binarnom sustavu ima najviše 7 znamenaka, pa je $S_2(n) \le 7$. Neka je $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ zapis broja $n$ u binarnom sustavu, pri čemu dopuštamo da on počinje i s određenim brojem nula.

Kako je tada

$$n = a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

to je $n \equiv ((a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)) \pmod 3$.

Odavde, kako je

$$n \equiv S_{10}(n) = S_2(n) = ((a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5)) \pmod 3,$$

nalazimo da je $2(a_1 + a_3 + a_5) \equiv 0 \pmod 3$, odnosno $(a_1 + a_3 + a_5) \in \{0, 3\}$ (jer je $0 \le a_1 + a_3 + a_5 \le 3$).

Sada možemo razlikovati dva slučaja:

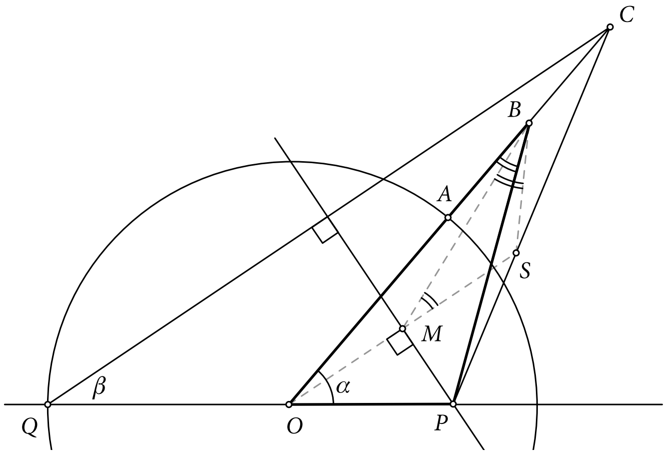
- Neka je $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Tada je $S_2(n) \le 4$. Zato je $a_6 = 0$ jer bi u suprotnom bilo $n \ge 64$, odakle je $S_{10}(n) \ge 7$, što je nemoguće. Dakle, $S_2(n) \le 3$, te je $n \le 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ i $n \equiv a_0 \pmod 4$, gdje je $a_0 \in \{0,1\}$. Dobivamo da je $n \in \{21, 20, 12, 2, 1\}$. Provjerom dobivamo da su rješenja $n=1, n=20$ i $n=21$.

- Neka je $a_1 = a_3 = a_5 = 1$. Tada je $n \ge 2^5 + 2^3 + 2^1 = 42$, pa je $S_{10}(n) \ge 5$. Primijetimo da je $a_6 = 0$ jer bi u suprotnom bilo $n \ge 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 106$. Zato je $S_{10}(n) \le 6$. Iz ovoga zaključujemo da je $n \in \{60, 51, 42, 50\}$. Provjerom dobivamo da ni jedan broj iz ovog skupa nije rješenje.

Zaključujemo da su jedine vrijednosti prirodnog broja $n$, $n < 100$ koje zadovoljavaju uvjet zadatka $n = 1$, $n = 20$ i $n = 21$.

**Zadatak 3.:**

***Prvo rješenje:***




Neka je $S$ točka na dužini $\overline{CP}$ takva da je $|PS| = |PO|$, a $M$ središte dužine $\overline{OS}$.

Tada je $|CS| = |QO| = |CA|$, pa iz $\dfrac{|CB|}{|CS|} = \dfrac{|CS|}{|CO|} = \dfrac{1}{2}$ slijedi da su trokuti $\Delta CBS$ i $\Delta CSO$ slični, i odavde je $|SB| = \dfrac{1}{2}|OS| = |SM|$ i

$$|\angle SOP| = |\angle OSP| = 180^\circ - |\angle CSO| = 180^\circ - |\angle CBS| = |\angle OBS|.$$

Prema tome, $PS$ i $PO$ su tangente na opisanu kružnicu trokuta $\Delta BSO$, a $BP$ je njegova simedijana. Sada je

$$|\angle OBP| = |\angle MBS| = \frac{180^\circ - |\angle BSM|}{2} = \frac{|\angle CSB| + |\angle OSP|}{2} = \frac{|\angle COS| + |\angle SOP|}{2} = \frac{|\angle BOP|}{2},$$

što smo i trebali dokazati.

***Drugo rješenje:*** Koristit ćemo poznatu tvrdnju da u trokutu $\Delta ABC$ vrijedi $\alpha = 2\beta$ ako i samo ako je $a^2 = b^2 + bc$.

Ako označimo $|OA| = r$ i $|PC| = x$, dovoljno je dokazati da je

$$|PB|^2 = |PO|^2 + |PO| \cdot |OB| = (x-r)^2 + \frac{3r}{2}(x-r) = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2.$$

Ovo odmah slijedi iz Stewartova teorema za trokut $\Delta OPC$, jer je

$$|PB|^2 = \frac{1}{4}(x-r)^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{r}{2} \cdot \frac{3r}{2} = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2.$$

***Treće rješenje:*** Označimo $|\angle POC| = \alpha, |\angle OQC| = \beta$, i neka je $|OA| = 1$. Dovoljno je dokazati

$$\frac{|OB|}{|OP|} = \frac{\sin \frac{3}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = 1 + 2\cos\alpha.$$

Po teoremu o sinusima imamo da je

$$\frac{1}{2} = \frac{|OQ|}{|OC|} = \frac{\sin\angle OCQ}{\sin\angle OQC} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta} = \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta - \cos\alpha$$

pa dobivamo

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

i odavde

$$\sin\beta\cos\beta = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \frac{2\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{5+4\cos\alpha}.$$

Dalje, kako je $|QC| = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ i

$$|QP| = \frac{|QC|}{2\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha},$$

to imamo da je

$$|OP| = |QP| - 1 = \frac{3}{2+4\cos\alpha}.$$

Konačno, iz $|OB| = \dfrac{3}{2}$ slijedi $\dfrac{|OB|}{|OP|} = 1 + 2\cos\alpha$, što smo i trebali dokazati.

**Zadatak 4.:**

***Rješenje:*** Da su svi natjecatelji točno odgovorili na kojem su mjestu završili utrku, zbroj njihovih odgovora iznosio bi

$$1+2+3+\ldots+100=5050.$$

Dakle, neki su natjecatelji preuveličali svoj rezultat, a najmanji broj krivih odgovora postigao bi se ako bi natjecatelji na zadnjim pozicijama rekli da su bili prvi.

Ako bi $n$ natjecatelja s kraja poretka pogrešno odgovorilo da su bili prvi, zbroj odgovora iznosio bi

$$1+2+\ldots+(100-n)+1+1+\ldots+1=\frac{(100-n)\cdot(100-n+1)}{2}+n.$$

Neposrednom provjerom možemo zaključiti da je za $n = 11$ zbroj jednak 4016, što je veće od 4000, a za $n = 12$ zbroj iznosi 3928.

Dakle, da bi zbroj iznosio točno 4000, uz najmanji broj krivih odgovora, potrebno je da 11 natjecatelja s kraja poretka kaže da su bili prvi, a s obzirom da je razlika do 4016 jednaka 16, dovoljno je da natjecatelj koji je stigao kao sedamnaesti kaže da je bio prvi.

Dakle**,** minimalno 12 natjecatelja dalo je krivi odgovor.

## Zadaci za IV. razred

**1.** Za tri različita realna broja $a,\ b,\ c$, $abc\neq 0$ vrijede jednakosti:

$$a+\frac{2}{b}=b+\frac{2}{c}=c+\frac{2}{a}=p,$$

pri čemu je $p$ realan broj. Treba dokazati da je $abc+2p=0$.

**2.** Dana je 8 × 8 šahovska ploča. Na koliko načina možemo odabrati 56 polja na ploči, tako da istovremeno vrijedi:

a) odabrana su sva crna polja,

b) u svakom redu i svakom stupcu odabrano je točno 7 polja.

**3.** Principom matematičke indukcije treba dokazati

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}2x,$$

gdje je $n=0,1,2,\ldots$

**4.** Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{ab}{c(ab+c)}+\frac{bc}{a(bc+a)}+\frac{ca}{b(ca+b)}\leq\frac{3}{4},$$

gdje su $a,b,c>0$ i $a^2+b^2+c^2=abc.$

## Rješenja zadataka za četvrti razred:

**Zadatak 1.:**

Eliminirajmo varijable da bismo izrazili dane jednakosti po $b$ i $p$. Imamo:

$$a = p - \frac{2}{b} = \frac{bp-2}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{b}{bp-2}.$$

Dalje imamo:

$$c = p - \frac{2}{a} = p - \frac{2b}{bp-2} = \frac{bp^2-2p-2b}{bp-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{bp-2}{bp^2-2p-2b}.$$

Konačno imamo:

$$b = p - \frac{2}{c} = p - \frac{2bp-4}{bp^2-2p-2b}.$$

Sređivanjem ove jednakosti dobivamo:

$$b^2\left(p^2-2\right)+b\left(2p-p^3\right)+\left(2p^2-4\right)=0$$

tj. dobivamo da je $\left(p^2-2\right)\left(b^2-bp+2\right)=0$ .

Ako je $p^2 \neq 2$ , $b$ mora biti rješenje jednadžbe $x^2 - px + 2 = 0$ , a zbog simetričnosti, i $a$ i $c$ moraju biti rješenja ove jednadžbe. Ali ovo je nemoguće, jer su $a$, $b$ i $c$ različiti brojevi.

Dakle, mora vrijediti $p^2 = 2$ , pa je $p = \sqrt{2}$ ili je $p = -\sqrt{2}$ . Lako se provjeri da obje vrijednosti za $p$ vode sljedećem skupu rješenja:

$$a = \frac{pt-2}{t},\quad b = t,\quad c = -\frac{2p}{pt},$$

pri čemu je $t \neq 0, \frac{2}{p}$ . Za ova rješenja vrijedi $abc = -2p$ .

**Zadatak 2.:**

Očigledno je ovaj problem jednak problemu odabira 8 bijelih polja, pri čemu se u svakom redu i svakom stupcu nalazi točno jedno odabrano polje.

Okrenimo šahovsku ploču tako da je polje u prvom redu i prvom stupcu bijelo. Neka je $a_i$ stupac u kojem se nalazi odabrano bijelo polje u redu $i$. Tada je $i \mapsto a_i$ permutacija skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ , i $a_i$ ima istu parnost kao $i$.

Postoje četiri odabira za $a_1$ ( $a_1 \in \{1,3,5,7\}$ ), tri za $a_3$ ( $a_3 \in \{1,3,5,7\} \setminus a_1$ ), dva za $a_5$ i jedan za $a_7$. Poslije ovih odabira, opet imamo četiri odabira za $a_2$, tri za $a_4$, dva za $a_6$ i jedan za $a_8$.

Ova dva odabira (za parne i neparne redove) su nezavisna, pa ukupno imamo $(4!)^2 = 576$ načina da provedemo naš odabir.

**Zadatak 3.:**

Kratkoće radi, označimo lijevu stranu jednakosti sa $S_n$.

1) Za $n = 0$ jednakost je zadovoljena, tj.

$$S_0 = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1-1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Za $n = 1$ jednakost je također zadovoljena, tj.

$$\begin{aligned} S_1 &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{2\sin x} = \frac{2\sin^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2\sin x\cos x} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} \\ &= \frac{\cos x(1+\cos x)}{2\sin x\cos x} - \frac{2\cos 2x}{2\sin x\cos x} = \frac{1+\cos x}{2\sin x} - 2\operatorname{ctg} 2x \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{ctg} 2x. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je jednakost zadovoljena i za $n = k-1 \geq 0$ i dokažimo da je ona zadovoljena i za $n = k$.

Zaista,

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} - 2\operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^k}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2^k}\right) - 2\operatorname{ctg} 2x. \end{aligned}$$

Radi kratkoće pisanja uvedimo zamjenu $\frac{x}{2^k} = y$, pri čemu će izraz u zagradi poprimiti oblik:

$$\begin{aligned} &2\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} 2y + (\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y) \\ &= \operatorname{ctg} 2y + \frac{\cos 2y\cos y + \sin 2y\sin y}{\sin 2y\cos y} = \operatorname{ctg} 2y + \frac{\cos(2y-y)}{\sin 2y\cos y} \\ &= \frac{\cos 2y}{\sin 2y} + \frac{1}{\sin 2y} = \frac{1+\cos 2y}{\sin 2y} = \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}. \end{aligned}$$

Prema tome je

$$S_k = \frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Ovim je zadana jednakost dokazana.

**Zadatak 4.:**

Koristeći CBS nejednakost za $n = 2$ imamo:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\sqrt{a^2+c^2}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{b^2+c^2}\right)^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)\left(a^2+b^2+2c^2\right)\geq(a+b)^2\geq 4ab,$$

što je ekvivalentno

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)\geq\frac{ab}{a^2+b^2+2c^2}=\frac{ab}{abc+c^2}=\frac{ab}{c(ab+c)}. \qquad (1)$$

Analogno imamo još dvije nejednakosti:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)\geq\frac{bc}{a(bc+a)}; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{ac}{b(ac+b)}. \qquad (3)$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (1), (2) i (3) dobivamo danu nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako je

$$3a^2=a^3\Rightarrow a^2(a-3)=0\Rightarrow a=3,$$

jer $a = 0$ otpada. Dakle, vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c=3$.