Četiri različita dokaza jedne važne nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

U ovom ćemo članku dati četiri različita dokaza jedne važne nejednakosti koja se odnosi na duljine stranica trokuta ΔABC. Neka su a, b, c duljine stranica toga trokuta. Tada vrijedi nejednakost:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc\,. \tag{1}$$

Dokaz 1. Imamo očigledne nejednakosti:

$$a^2-(b-c)^2 \leq a^2,$$
$$b^2-(c-a)^2 \leq b^2$$

i

$$c^2-(a-b)^2 \leq c^2,$$

a odavde zbog $a>|b-c|$, $b>|c-a|$ i $c>|a-b|$:

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \leq a;$$
$$\sqrt{b^2-(c-a)^2} \leq b$$

i

$$\sqrt{c^2-(a-b)^2} \leq c\,.$$

Nakon množenja ovih nejednakosti dobivamo:

$$\sqrt{\left(a^2-(b-c)^2\right)\left(b^2-(c-a)^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)} \leq abc,$$

što je ekvivalentno

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b-c+a)(c+a-b)(c-a+b)} \leq abc,$$

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo
[2]Daniela Zubović, Sarajevo

odnosno

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \le abc.$$

Na kraju dobivamo

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc,$$

što smo trebali i dokazati.

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični troukut.

Napomena 1. Stavljajući da je $a+b+c=2s$, tj.

$$a+b-c=2(s-c),$$
$$b+c-a=2(s-a)$$

i

$$a+c-b=2(s-b),$$

u (1) dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \le abc\,. \tag{2}$$

Dokaz 2. Za ovaj ćemo se dokaz koristiti poznatim formulama $abc=4RP=4Rrs$ i $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heronova formula), gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trokuta ΔABC, a P je njegova površina.

Sada imamo:

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=P^2$$

$$s\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=P^2$$

što je ekvivalentno s

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=\frac{8P^2}{s}\,. \tag{3}$$

Sada ćemo dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{8P^2}{s} \le abc \tag{4}$$

Nejednakost (4) ekvivalentna je s

$$\frac{8P^2}{s} \le 4RP$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8P}{s} \le 4R$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8rs}{s} \le 4R$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r \le R,$$

a ovo je dobro poznata Eulerova nejednakost koja je točna. Dakle, nejednakost (4) je točna.

Sada iz nejednakosti (3) i (4) slijedi nejednakost (1), q.e.d.

Dokaz 3. Koristit ćemo zamjenu:

$$x = -a + b + c,$$

$$y = a - b + c$$

i

$$z = a + b - c,$$

pri čemu su $x, y, z > 0$. Odavde lako dobivamo da je:

$$a = \frac{y+z}{2},$$

$$b = \frac{x+z}{2},$$

$$c = \frac{x+y}{2}.$$

Sada nejednakost (1) postaje:

$$xyz \le \frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x), \tag{5}$$

što je ekvivalentno

$$8xyz \le xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2 + 2xyz,$$

odnosno

$$6xyz \le x\left(y^2 + z^2\right) + y\left(x^2 + z^2\right) + z\left(x^2 + y^2\right). \tag{6}$$

Zbog očiglednih nejednakosti

$$y^2 + z^2 \ge 2yz \quad \left(\Leftrightarrow \quad (y-z)^2 \ge 0\right),$$

$$x^2 + z^2 \ge 2xz \quad \left(\Leftrightarrow \quad (x-z)^2 \ge 0\right)$$

i

$$x^2 + y^2 \ge 2xy \quad \left(\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \ge 0\right),$$

Dobivamo, nakon zbrajanja ovih nejednakosti pomnoženih sa x, y i z, redom:

$$x\left(y^2+z^2\right)\geq 2xyz,$$
$$y\left(x^2+z^2\right)\geq 2xyz,$$
$$z\left(x^2+y^2\right)\geq 2xyz,$$

pa imamo

$$6xyz\leq x\left(y^2+z^2\right)+y\left(x^2+z^2\right)+z\left(x^2+y^2\right),$$

a ovo je nejednakost (6), odnosno njoj ekvivalentna nejednakost (5). Dakle, nejednakost (5) je točna pa je dana nejednakost (1) dokazana.

Vrijedi jednakost u (5) ako i samo ako je $x = y = z$ ili $a = b = c$.

Dokaz 4. Zbog nejednakosti

$$a+b-c>0,$$
$$b+c-a>0$$

i

$$c+a-b>0$$

imamo na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}\leq\frac{a+b-c+a+c-b}{2},$$

tj.

$$\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}\leq a\ , \tag{7}$$

te analogno:

$$\sqrt{(b+c-a)(b+a-c)}\leq\frac{b+c-a+b+a-c}{2},$$

i

$$\sqrt{(c+a-b)(c+b-a)}\leq\frac{c+a-b+c+b-a}{2},$$

odnosno

$$\sqrt{(b+c-a)(b+a-c)}\leq b\,, \tag{8}$$

i

$$\sqrt{(c+a-b)(c+b-a)}\leq c\,. \tag{9}$$

Nakon množenja nejednakosti (7), (8) i (9) dobivamo nejednakost:

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \le abc,$$

tj.

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc,$$

što je trebalo i dokazati.

Napomena 1: Neka su *a*, *b*, *c* nenegativni realni brojevi. Dokazat ćemo da i u ovom slučaju vrijedi nejednakost (1). Razlikovat ćemo nekoliko slučajeva:

1^0 Neka je jedan od brojeva $a+b-c, b+c-a$ i $c+a-b$ negativan, a druga dva pozitivna. Tada je umnožak

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le 0,$$

a $abc \ge 0$, što znači da je nejednakost (1) točna.

2^0 Ako su dva od brojeva $a+b-c, b+c-a$ i $c+a-b$ negativna, a treći pozitivan, npr. $a+b-c<0$, $b+c-a<0$ i $c+a-b>0$, tada zbrajajući prve dvije nejednakosti dobivamo da je $2b<0$, tj. $b<0$, što ne može biti jer su $a,b,c \ge 0$. Dakle, ovaj slučaj otpada.

3^0 Ako su $a+b-c>0, b+c-a>0$ i $c+a-b>0$, tada je dokaz nejednakosti (1) identičan Dokazu 4. ove nejednakosti. Sada možemo reći da vrijedi nejednakost (1) za sve $a,b,c \ge 0$, tj.

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc,$$

za $a,b,c \ge 0$.

Napomena 2: Prisjetimo se poznate **Schurove[3] nejednakosti**:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b) \ge 0,$$

za $a,b,c,r \quad 0$. Uvrštavajući u nejednakost da je *r* = 1, dobivamo:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \ge 0,$$

što je ekvivalentno

$$a\left(a^2-ab-ac+bc\right)+b\left(b^2-ab-bc+ac\right)+c\left(c^2-ac-bc+ab\right) \ge 0,$$

[3]Issai Schur, matematičar rođen 1875. godine u Carskoj Rusiji, a umro u Tel Avivu (Izrael) 1941. godine

odnosno

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Konačno dobivamo

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc,$$

a ovo je nejednakost (1).

Tri razna dokaza Schurove nejednakosti mogu se naći u [1].

Dat ćemo još jedan primjer nejednakosti za čiji ćemo dokaz koristiti nejednakost (1).

Primjer 1. Treba dokazati nejednakost

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3 < abc, \tag{10}$$

gdje su a, b, c međusobno različite duljine stranica troukuta ΔABC.

Rješenje: Za dokaz ove nejednakosti koristit ćemo jednakost:

$$c(a-b)^2+4abc = c(a+b)^2 \tag{11}$$

koja je ekvivalentna

$$c\left[(a-b)^2+4ab-(a+b)^2\right]=0,$$

odnosno

$$c\left(a^2-2ab+b^2+4ab-a^2-2ab-b^2\right)=0,$$

što je točno. Dakle, jednakost (11) je točna.

Zbog (11) sada imamo:

$$\begin{aligned}
&a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3\\
&=a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]\\
&=a\left(b^2-2bc+c^2-a^2\right)+b\left(c^2-2ac+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+2ab+b^2-c^2\right)\\
&=ab^2-2abc+ac^2-a^3+bc^2-2abc+a^2b-b^3+a^2c+2abc+b^2c-c^3\\
&=-a^3-b^3-c^3-2abc+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\\
&=\ldots=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3$$

$$=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

a odavde je zbog (1):

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3<abc,$$

što je trebalo i dokazati.

Vrijedi stroga nejednakost u (10) zbog $a \neq b$, $b \neq c$ i $a \neq c$.

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. O. Bottema, R.Ž. Djordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
3. Z. Cvetkovski, *Inequalities-Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer Heidelberg/Dordrecht/London/New York, 2012.