Modeliranje funkcijama u ekonomiji

Sanja Sruk[1]

Najčešće riječi koje se koriste u ekonomiji su ponuda i potražnja. One određuju količinu robe koja se proizvodi i cijenu po kojoj se prodaje. Kupci određuju potražnju i ona ovisi o više faktora (cijena, standard, potrošačke navike...), a proizvođači, odnosno prodavači daju ponudu. Odnos između ponude i potražnje izuzetno je važan, a cilj ekonomije je postići **tržišnu ravnotežu**, tj. stanje u kojem je ponuda jednaka potražnji. Ukoliko je tržišna cijena veća od ravnotežne, gomilaju se zalihe, što dovodi do pada cijena. Ako je pak manja, dolazi do viška potražnje i rasta cijena.

Funkcije ponude i potražnje, kao i neke druge funkcije koje susrećemo u ekonomiji (funkcija troškova, funkcija prihoda, funkcija dobiti) mogu biti linearne, kvadratne, kubne,... pa modeliranje tim funkcijama omogućuje da osnovne ekonomske pojmove lako približimo i srednjoškolcima prilikom obrade linearne funkcije, polinoma drugog stupnja ili derivacija.

Funkcija ponude opisuje količinu robe koja se nudi po nekoj cijeni i ona je rastuća funkcija, dok **funkcija potražnje** opisuje količinu robe koju tržište potražuje po nekoj cijeni i ona je, dakako, padajuća (što je veća cijena, potražnja za tim proizvodom je manja). **Funkcija troškova** $T(x)$ opisuje troškove proizvodnje ovisno o količini proizvoda i sastoji se od fiksnog (plaće radnika, najam prostora...) i varijabilnog dijela. **Funkcija prihoda** $P(x)$ umnožak je broja proizvoda i cijene po proizvodu, a **funkcija dobiti** $D(x)$ razlika je funkcija prihoda i troškova. Poslovanje je **rentabilno** (ekonomski isplativo, tj. bez gubitaka) ukoliko funkcija dobiti nije negativna.

Pogledajmo primjere uz napomenu da oznake funkcija nisu standardne; u različitoj se literaturi koriste različite oznake (cijena je najčešće označena s p, a količina s q).

Primjer 1:

Ponuda i potražnja nekog proizvoda opisane su funkcijama

$$f_1(x) = 2x - 120 \ \text{ i } \ f_2(x) = -2x + 220\,.$$

[1]Sanja Sruk, I. gimnazija, Zagreb

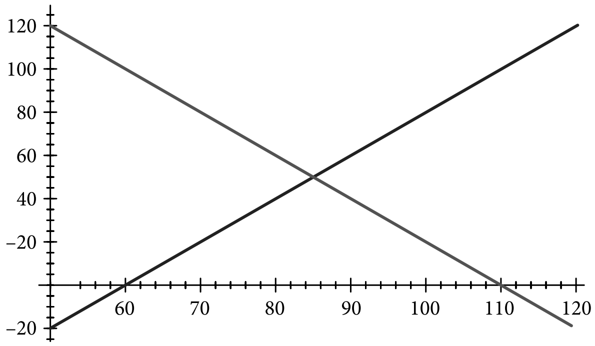
a) Koja je od njih funkcija ponude, a koja potražnje?

b) Kada proizvodnja ima ekonomski smisao i koliko iznosi ravnotežna cijena?

Rješenje:

a) f_1 je funkcija ponude jer je rastuća, a f_2 potražnje jer je padajuća.

b) Proizvodnja ima ekonomski smisao ako ni cijena, ni ponuda, ni potražnja nisu negativne. Rješavanjem sustava dobijemo da za cijenu x mora vrijediti $60 \leq x \leq 110$, a ravnotežnu cijenu x = 85 dobijemo izjednačavanjem funkcija ponude i potražnje. Prikažemo li funkcije grafički, ravnotežna cijena je apscisa sjecišta pravaca, a količina proizvoda koji osiguravaju tržišnu ravnotežu ordinata.



Primjer 2:

Funkcije ponude i potražnje mogu biti i kvadratne. Ako je funkcija ponude

$$f_1(x) = 3x^2 + 6,$$

a funkcija potražnje

$$f_2(x) = -x^2 + 10,$$

koliko iznosi ravnotežna cijena i za koju količinu proizvoda se postiže?

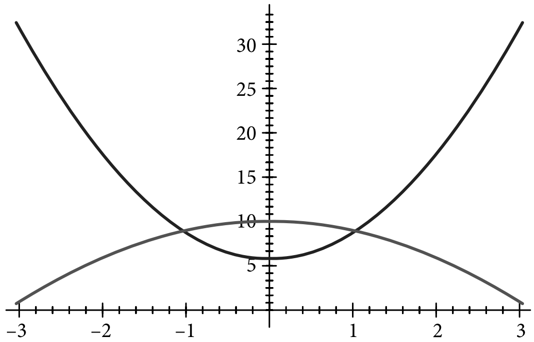
Rješenje:

Rješavanjem jednadžbe

$$3x^2 + 6 = -x^2 + 10$$

dobije se $x^2 = 1$, odnosno $x = 1$ jer cijena ne može biti negativna. Količinu proizvoda dobijemo uvrštavanjem u bilo koju jednadžbu i ona iznosi 9.

Zadatak možemo „oživjeti” dodavanjem podataka o proizvodu, npr. može se raditi o luksuznom automobilu, a cijena je izražena u milijunima kuna.



Primjer 3:

Zadana je funkcija

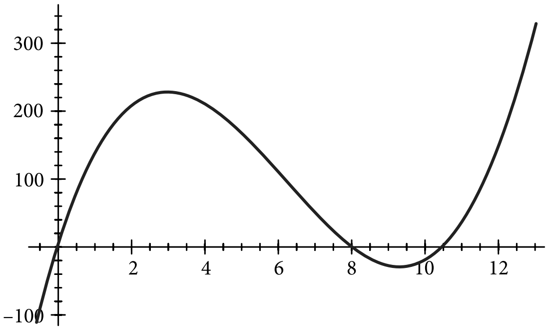
$$f(x) = 2x^3 - 37x^2 + 168x.$$

Za koju vrijednost cijene x i količine proizvoda $f(x)$ je ovo funkcija potražnje?

Rješenje:

Ovaj zadatak primjeren je za 4. razred. Kako funkcija potražnje mora biti padajuća, do rješenja ćemo doći crtanjem grafa i uzimajući u obzir da ni cijena ni količina ne mogu biti negativne.

Nultočke ove funkcije su 0, 8 i 10.5, a deriviranjem određujemo ekstreme: maksimum je $M(3,225)$, a minimum $m(9.3, -29)$. Funkcija je padajuća i nenegativna za $3 \le x \le 8$ i $0 \le f(x) \le 225$.



Primjer 4:

Marketinški stručnjaci u tvornici sunčanih naočala *Sunny Day* primijetili su da se ovisnost broja prodanih naočala u jednom danu i cijene može prikazati tablicom:

KOLIČINA	CIJENA
30	800
50	600

a) Odredi linearnu funkciju koja opisuje ovisnost broja prodanih naočala o cijeni (funkcija potražnje).

b) Koliko će se naočala prodati ako je cijena 500 kn?

Rješenje:

a) Linearna funkcija ima oblik $f(x)=ax+b$. Riješimo li sustav

$$800a+b=30,$$
$$600a+b=50,$$

dobit ćemo funkciju

$$f(x)=-0.1x+110.$$

b) $f(500)=60$. Prodat će se 60 naočala.

Primjer 5:

Mjesečna količina prodanih kravata ovisi o njihovoj cijeni i može se opisati funkcijom potražnje

$$f(x)=1000-4x.$$

a) Za kakve cijene izrada kravata ima smisla?

b) Kolika je potražnja za kravatama ako je cijena jedne 200 kn?

c) Uz koju se cijenu ostvaruje maksimalan prihod i koliko on iznosi?

Rješenje:

a) Izrada kravata ima smisla ako postoji potražnja za njima, tj. ako je $1000 - 4x \geq 0$, odnosno $x \leq 250$. Dakle, izrada kravata ima smisla ako im cijena ne prelazi 250 kn.

b) $f(200)=200$.

c) Prihod je umnožak cijene i broja prodanih kravata pa vrijedi

$$P(x)=xf(x)=1000x-4x^2.$$

Ova kvadratna funkcija postiže maksimum za $x=125$ i on iznosi 62 500. Po cijeni od 125 kn ostvarit će se maksimalan prihod 62 500 kn.

Primjer 6:

Slastičar prodaje kolače po cijeni 80 kn/kg. Troškovi dnevne proizvodnje opisani su funkcijom

$$T(x)=20x+900.$$

a) Odredi funkciju prihoda i funkciju dobiti.

b) Koliko najmanje kilograma kolača dnevno treba prodati da mu se isplati poslovanje?

Rješenje:

a) Prihod i dobit dani su funkcijama

$$P(x) = 80x, \quad D(x) = P(x) - T(x) = 60x - 900.$$

b) Rješavanjem nejednadžbe $D(x) \geq 0$ dobije se $x \geq 15$, što znači da mora prodati barem 15 kg kolača.

Primjer 7:

Funkcija prihoda tvornice stolica je

$$P(x) = x^2 + 300x,$$

a funkcija troškova

$$T(x) = 2x^2 - 800x + 120000.$$

a) Za koji se raspon cijena isplati proizvodnja?

b) Uz koju se cijenu stolice postiže maksimalna dobit i koliko ona iznosi?

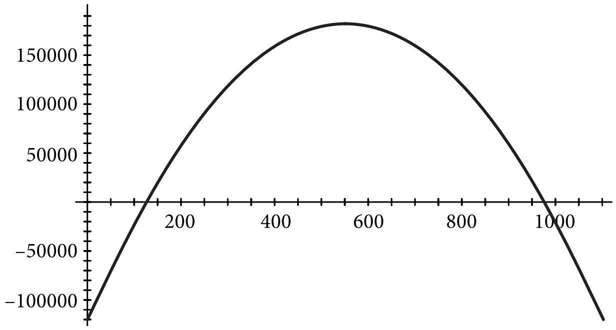
Rješenje:

a) Funkcija dobiti je

$$D(x) = P(x) - T(x) = -x^2 + 1100x - 120000.$$

Nultočke ove funkcije su 122.8 i 977.2 pa iz grafa vidimo da cijena treba biti između 122.8 kn i 977.2 kn.

b) Maksimalna dobit postiže se kad je cijena stolice 550 kn i iznosi 182 500 kn.



Primjer 8:

U tvornici čokolade „Mljac-mljac" izračunali su da njihove dnevne troškove proizvodnje opisuje formula

$$T(x) = 5x + 3000.$$

a) Koliki su troškovi ako dnevno proizvedu 700 čokolada?
b) Koliko se čokolada može proizvesti uz trošak 10 000 kn?
c) Koliki je prihod od prodaje 700 čokolada dnevno ako je prodajna cijena jedne čokolade 9 kn?
d) Izračunaj dobit pa procijeni isplati li se proizvodnja 700 čokolada.
e) Koliko najmanje čokolada dnevno treba proizvesti i prodati da bi se proizvodnja isplatila?
f) Kolika je dobit ako se proda 2000 čokolada?
g) Prikaži grafički funkciju dobiti. Što zaključuješ? Što je nultočka?

Rješenje:

a) $T(700) = 6500$. Troškovi su 6500 kn.

b) Imamo

$$10000 = 5x + 3000$$

pa je $x = 1400$. Može se proizvesti 1400 čokolada.

c) Prihod je dan funkcijom $P(x) = 9x$ pa je $P(700) = 6300$. Prihod je 6300 kn.

d) Dobit je

$$D(700) = P(700) - T(700) = 6300 - 6500 = -200.$$

Ne isplati se jer su u gubitku.

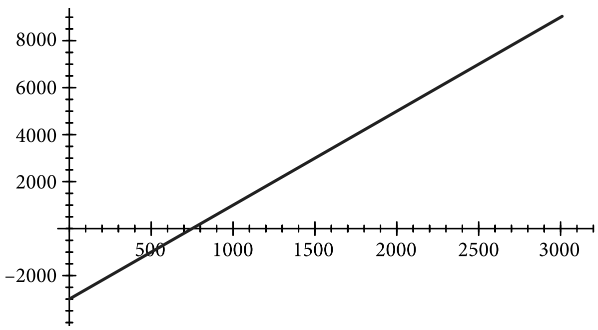
e) Funkcija dobiti je

$$D(x) = P(x) - T(x) = 4x - 3000.$$

Stoga je $D(x) \geq 0$ za $x \geq 750$. Treba proizvesti i prodati barem 750 čokolada.

f) $D(2000) = 5000$. Dobit je 5000 kn.

g)



Zaključuje se da proizvodnja ima smisla ako se proizvede barem 750 čokolada. Ako se proizvede manje, tvornica je u gubitku. 750 je nultočka, tj. tada je dobit 0 kn (ta se točka naziva točka pokrića).

Primjer 9:

Troškovi proizvodnje nekog proizvoda izraženi su u kunama formulom

$$T(x) = 3x^2 + 1900.$$

Mjesečna potražnja za tim proizvodom pada s porastom cijene p i iznosi = 400 – p.

a) Koliko proizvoda mjesečno treba prodati kako bi dobit bila maksimalna i koliko ta dobit iznosi?

b) Odredi interval rentabilnosti proizvodnje.

c) Koliki su troškovi proizvodnje 80 proizvoda, a kolika je dobit?

Rješenje:

a) Funkciju ukupnih prihoda dobijemo množenjem cijene i količine proizvoda, tj.

$$P(x) = px = (400 - x)x = 400x - x^2.$$

Onda je funkcija dobiti

$$D(x) = P(x) - T(x) = -4x^2 + 400x - 1900.$$

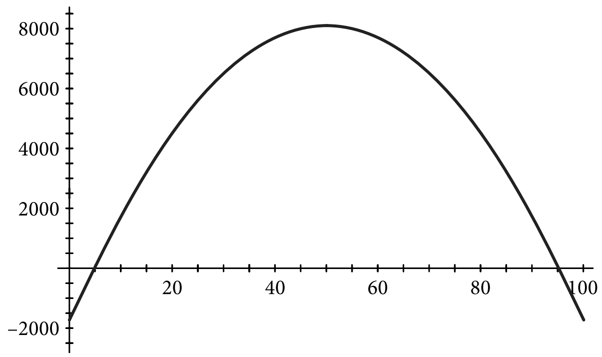
Količina za koju se postiže maksimalna dobit je apscisa tjemena ove parabole (50), a sama dobit ordinata (8100 kn).

b) Proizvodnja je rentabilna kada dobit nije negativna, tj. $D(x) \geq 0$. Rješavanjem nejednadžbe

$$-4x^2 + 400x - 1900 \geq 0$$

doznajemo da je proizvodnja rentabilna ako se proizvodi između 5 i 95 proizvoda mjesečno.

c) $T(80) = 21100$ kn, $D(80) = 4500$ kn.



Primjer 10:

Restoran svakodnevno dostavlja ručak zaposlenicima jedne tvrtke. Izračunali su da narudžba ovisi o cijeni ručka i može se opisati formulom $f(x) = -0.8x + 150$, gdje je x cijena porcije, a $f(x)$ broj prodanih porcija.

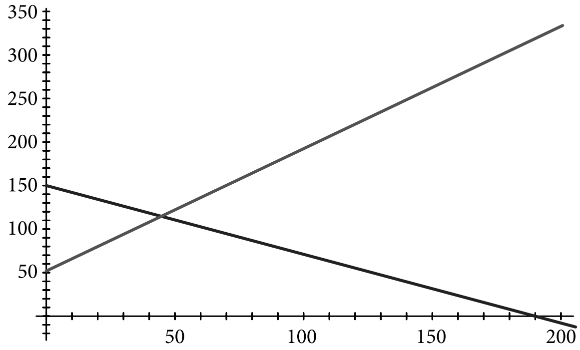
a) Koliko će porcija prodati ako je cijena jedne porcije 30 kn?

b) Kolika bi trebala biti cijena da dnevno prodaju 134 porcije?

c) Broj porcija koje restoran dnevno može ponuditi opisuje funkcija ponude $g(x) = 1.4x + 53$.

Uz koju je cijenu ponuda jednaka potražnji?

Rješenje:



a) $f(30) = 126$

Prodat će 126 porcija.

b) Imamo

$$134 = -0.8x + 150,$$

pa je $x = 20$.

Cijena bi trebala biti 20 kn.

c) Izjednačavanjem dobivamo

$$-0.8x + 150 = 1.4x + 53,$$

pa je $x = 44.09$. Uz cijenu 44.09 kn ponuda je jednaka potražnji.

Na grafu se također vidi da bi uz cijenu od otprilike 190 kn po porciji nestalo potražnje (vrijednost funkcije potražnje negativna), a kad bi ručak bio besplatan, potražnja bi bila 150 porcija (tako se i interpretira koeficijent b).

Zbog velikih brojeva za crtanje grafova ovih funkcija prikladno je koristiti IKT (*Sketchpad*, *GeoGebra*, *WolframAlpha* ili neki drugi program). Implementiranje ovakvih zadataka u redovnu nastavu matematike pomaže učenicima da shvate važnost poslovnog planiranja i veliku ulogu matematike u ekonomiji i svakodnevnom životu.

Literatura:

1. Županović, V., Šorić, K. (2016.): Primijenjena matematika podržana računalom, Gimnazija Matija Mesić, Slavonski Brod

2. Šorić, K (1997.) Zbirka zadataka iz matematike s primjenom u ekonomiji. Zagreb: Element