Kako je psiholog Jean Piaget utjecao na matematičko obrazovanje?[1]

Jelena Pleština[2]

Sažetak

Iako nije bio matematičar, definiranjem pojma reflektivne apstrakcije koji je suprotstavio empirijskoj apstrakciji, Piaget je drastično utjecao na matematičke kurikulume, istraživanja u području edukacije matematike, a dao je i zamah nastanku novih teorija u tom području.

Cilj ovog rada je ukratko izložiti Piagetove ideje koje su imale najjači odjek među matematičarima i istraživačima u području matematičke edukacije, kao i prikazati kako su ih istraživači usvajali te dalje razrađivali, odnosno nadograđivali.

Ključni pojmovi: reflektivna apstrakcija; proces-objekt dualnost; enkapsulacija; reifikacija.

1. Uvod

"Promatranje metode rada matematičara posebno je poučno za psihologa."

(Poincaré, 1914. str. 9., original na francuskom objavljen 1908.)

U ovom članku bit će dan kratak pregled radova psihologa Jeana Piageta i bit će prikazan njegov utjecaj na istraživanja u području edukacije matematike te na matematičko obrazovanje općenito. Piagetov radni vijek bio je dug i plodonosan, no treba uzeti u obzir da je ideje i pojmove postupno razrađivao. Stoga postoje odstupanja u značenju nekih pojmova kroz različita razdoblja njegova rada. Iako će i čitanjem ovoga članka takve nekonzistentnosti biti uočljive, to nije u fokusu ovoga rada. S obzirom na temu, pojmovi će biti dani u onom obliku u kojemu su bili najutjecajniji na matematički milje.

[1]Rad je nastao iz predavanja održanih u 2020. i 2021. godini u sklopu poslijediplomskog Seminara za metodiku nastave matematike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

[2]Jelena Pleština, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu

Jean Piaget (1896. – 1980.) posvetio je svoju karijeru iznalaženju odgovora na fundamentalna filozofska pitanja o podrijetlu i razvoju znanja, a opći teorijski okvir koji je utemeljio sam je nazvao *genetskom epistemologijom*. Istraživanja koja je provodio većinom su bila usmjerena na proučavanje razvoja inteligencije i učenja matematike, a najuspješnija su bila ona istraživanja čiji su ispitanici bila djeca predškolske i rane školske dobi. Piaget je zasigurno najpoznatiji po definiranju četiriju razvojnih stupnjeva kognicije: senzomotoričko razdoblje, predoperacijsko razdoblje, razdoblje konkretnih operacija i razdoblje formalnih operacija (Karsenty, R. *Mathematical ability* u Lerman, 2014.). Kako se ova razdoblja uobičajeno obrađuju u nekom od kolegija nastavničkih studija, u ovom se radu nećemo detaljnije zadržavati na njima.

1.1. Genetska epistemologija

Piaget je vjerojatno prvi znanstvenik 20. stoljeća koji je promatrao apstrakciju kao kognitivni proces kod djece za vrijeme učenja matematike (Dreyfus, T. *Abstraction in Mathematics Education* u Lerman, 2014. str. 6). U knjizi *Genetic Epistemology* napisao je: „...(matematička) apstrakcija ne proizlazi iz objekata na koje se djeluje, nego iz same akcije. Čini mi se da je to baza logičke i matematičke apstrakcije." (Piaget, 1970. str. 16). Stoga je za Piageta priroda znanja u osnovi operativna.

Od druge polovice 20. stoljeća Piagetova genetska epistemologija počela je utjecati na osnovnoškolsku matematiku (Duckworth, 1979.; Schwebel i Ralph, 1973.), no Piaget je tvrdio da je kognitivni razvoj cjeloživotni proces koji se sastoji od uzlazne hijerarhije međusobno ovisnih koncepata (Beth i Piaget, 1966.; Dubinsky i Lewin, 1986. str. 55). Kategorije znanja (kognitivne strukture) i procese koji su doveli do tog znanja Piaget naziva *shemom* (McGowen, 1998.). Prema Piagetu, nastavnik matematike potiče kognitivni razvoj pri podučavanju novog koncepta (Dubinsky i Lewin, 1986. str. 55). Kognitivni razvoj događa se putem *asimilacij*e i *akomodacije*. Transformiranje informacije koje osoba primi s ciljem uklapanja u postojeće mišljenje, tj. shemu, Piaget naziva *asimilacijom*, dok *akomodacijom* naziva adaptiranje pojedinčeve sheme uslijed primanja informacija (Arnon i drugi, 2014. str. 19.). *Ekvilibriranje* je dinamički proces uspostave ravnoteže između kognitivnih struktura koji se postiže kroz asimilaciju i akomodaciju. (Dubinsky i Lewin,1986. str. 60-61).

Konkretno u slučaju matematike, razvoj pojedinca počinje percepcijom objekata, akcijom nad njima te razmišljanjem o njima, a rezultira novim akcijama nad mentalnim i/ili fizičkim objektima (Piaget, 1970.; McGowen, 1998. str. 25). Uočljivu *proces-objekt dualnost* Piaget opisuje kao razvoj u kojemu su *operacije na matematičkim entitetima proces čija je posljedica promicanje matematičkih entiteta s jedne razine na iduću, što u konačnici rezultira novim objektima*. Opisano se ponavlja sve dok „strukture koje naizmjenično strukturiraju i bivaju strukturirane jačim strukturama nisu dosegnute" (Piaget, 1972. str. 70; McGowen, 1998. str. 26).

2. Povijesne i epistemološke značajke (apstraktne) algebre: nova vizija matematike

Važno se osvrnuti na povijesne značajke matematike prve polovice 20. stoljeća jer su i one bitno utjecale na Piagetovu interpretaciju rezultata provedenih istraživanja (Hausberger, 2018a.).

Opće je prihvaćeno da su se u 19. stoljeću počeli razvijati radikalno drugačiji pogledi na ciljeve i metode matematike (Wussing, 1984.). Svjesno razmišljanje o matematici u terminima struktura sazrijevalo je postupno, a može se reći da je krenulo Galoisovim prepoznavanjem središnje uloge koncepta grupe u teoriji permutacija, dok Klein prepoznaje taj koncept kao ujedinjujući za različite geometrije. Krajem 19. stoljeća Dyck uvodi pojam grupe i tako ona postaje povijesno prva (apstraktna) matematička struktura. Promovirajući sistematizaciju aksiomatske metode, Hilbert je također utjecao na formiranje koncepta grupe. Na definiranju pojma polja radili su Dedekind (polje algebarskih brojeva), Galois (konačna polja), Gauss (teorija polinomijalnih kongruencija), Hensel (p-adska polja) te Steinz (klasifikacija prema karakteristici i pojmu prostog polja). Zanimljivo je da je Hilbert 1900. uveo pojam prstena, ne dovodeći ga u vezu ni s pojmom grupe, ni s pojmom polja. Noether je 1920-ih godina opisivanjem struktura u terminima odabranih podskupova (normalne podgrupe grupa, ideali prstena) te homomorfizama, napravila odmak od razmišljanja samo o operacijama na elementima. Takav pristup doveo je do promjene načina na koji su se dotad dokazivali teoremi u algebri (Hausberger, 2018b.). Potreba za računom se smanjila, a tvrdnje su postajale generalnije. Van der Waerden 1930. godine izdaje knjigu *Moderne Algebra*, prvi udžbenik koji je sustavno koristeći aksiomatsku metodu uveo pojmove grupe, prstena i polja. Algebarske strukture su definirane kao skupovi s jednom ili više operacija koje udovoljavaju određenim aksiomima. Nicolas Bourbaki, tj. grupa većinski francuskih matematičara, imala je za cilj cjelokupnu matematiku karakterizirati u terminima struktura (ne samo algebarskih). Upravo njihova ideja matematike kao hijerarhije struktura (materinje strukture: algebarske strukture, strukture uređaja, topološke strukture) snažno je utjecala na Piagetovu genetsku epistemologiju. Tijekom Drugog svjetskog rata, proučavajući algebarsku topologiju, Eilenberg i Mac Lane uvode pojam kategorije, funktora i prirodne transformacije, s ciljem razumijevanja procesa koji *čuvaju* matematičke strukture.

Razvoj apstraktne algebre, kao i generalni trend naglašavanja strukturne prirode matematike, 1960-ih dovodi do reforme srednjoškolskog obrazovanja poznate pod nazivom *Moderna matematika (New Math)*. Žarišta reforme bila su SAD, Francuska i Njemačka, no reforma se vrlo brzo proširila na cjelokupnu Europu. Kroz osnove teorije skupova, matematičke logike i apstraktne algebre, fokus je bio na matematičkom formalizmu. Upravo naglasak na poučavanju matematičkih struktura (skupovne i algebarske strukture) dovodi do istraživanja u matematičkoj edukaciji koja se bave procesima apstrakcije uključenima u konceptualizaciju tih struktura.

3. Reflektivna apstrakcija

Jedan od procesa apstrakcije je i *tematizacija*, tj. izdvajanje nekog svojstva (skupa svojstava) neke operacije ili objekta, odnosno nekih operacija ili objekata, s ciljem da ono (ona) postanu objektom promatranja. Peirce ovakvu apstrakciju naziva *reflektivnom*, a Husserl *tematizacijom*. Pojam tematizacije postaje vrlo bitan pri promatranju beskonačne kolekcije objekata kao cjeline (teorija skupova), a popularizirao ga je filozof i logičar Jean Cavaillès (Sinaceur, 2014.). Cavaillèsov pogled na algebarske strukture kao na *filozofsku dijalektiku između forme i sadržaja* izravno je utjecao na Piageta koji je tvrdio da se o cjelokupnoj matematici može razmišljati u terminima konstruiranja struktura putem tzv. *reflektivne apstrakcije*, tj. enkapsulacije forme u novi sadržaj (Hausberger, 2018b. str. 2).

U članku o matematičkom obrazovanju (Piaget, 1973.) Aristotelovskoj apstrakciji, čiji izvor proizlazi iz fizikalnih svojstava objekta pa je Piaget naziva *empirijskom apstrakcijom*, suprotstavlja logičko-matematičku apstrakciju koju naziva reflektivnom apstrakcijom. Grubo govoreći, mehanizme za mentalne konstrukcije u razvoju misli i mentalne mehanizme putem kojih se razvijaju sve logičko-matematičke strukture u umu pojedinca Piaget naziva reflektivnom apstrakcijom. Piaget objašnjava da riječ *reflektivna* (eng. reflective) u ovom terminu nosi dva značenja: fizikalno (refleksija snopa svjetlosti s jedne površine na drugu) i psihološko (transpozicija s jednog hijerarhijskog, mentalnog nivoa na drugi) (Piaget, 1970. str. 17-18).

Zaista, kako i ime sugerira, odgovor na pitanje što je za Piageta reflektivna apstrakcija sastoji se od dva dijela.

Prvi dio odgovora uključuje refleksiju, u smislu svijesti i kontemplativne misli o onome što Piaget naziva sadržajem ili operacijom nad sadržajem, kao i u smislu reflektirajućeg sadržaja i operacija od nižeg kognitivnog nivoa prema višem, tj. od procesa prema objektu. Drugi dio odgovora sastoji se od rekonstrukcije i reorganizacije sadržaja i operacija na višem nivou, što za rezultat ima da operacije postaju sadržaj nad kojim se mogu vršiti nove operacije (Piaget, 1973.).

(Arnon i drugi, 2014. str. 6).

Dakle, reflektivna apstrakcija je proces koji se sastoji od dvije faze: «projiciranje svojstava učenikova djelovanja na višu razinu gdje ih postaje svjestan; reorganiziranje tih svojstava na višoj razini kako bi se mogla povezati ili integrirati s postojećim strukturama." (Dreyfus, T. *Abstraction in Mathematics Education* u Lerman, 2014. str. 6). Campbell, urednik knjige *Studies in Reflecting Abstraction*, objašnjava da se projiciranje odnosi na optičko značenje reflektiranja, dok reorganiziranje ima kognitivno značenje stoga predlaže ime *reflektirajuća apstrakcija* umjesto *reflektivna apstrakcija* (Piaget, Campbell, 2001.; Piaget, 1973.). Campbell uočava da se «projekcija definira kao ono što kognitivnu strukturu vodi od razine $N-1$ do razine N, a refleksija kao reorganizacija na razini N." (Piaget, Campbell, 2001. str. 5). Iako se u definiciji reflektivne apstrakcije Piaget ne poziva direktno na četiri razvojna stupnja, veza s njima nazire se iz nizovne organizacije razina ($N - 1$, N, $N + 1$...). Campbell komentira kako je Piaget u svojim kasnijim radovima (Piaget, 1976.) prihvaćao da reflektivna apstrakcija nema fiksno mjesto u razvojnim stupnjevima.

U nastavku će biti izloženo nekoliko primjera pomoću kojih je Piaget ilustrirao svoju teoriju, a koji su ujedno motivirali matematičare na daljnju razradu i proširenje teorije u svrhu rješavanja problema u visokom školstvu (Dubinsky, 1991.; Arnon i drugi, 2014.). Ukratko će biti izloženo kako je Piaget objasnio razumijevanje koncepta broja kod djece (Piaget, 1952.; Piaget, 1970.), tj. preciznije, razumijevanje prirodnih brojeva. No prije nego se započne s tim, potrebno je objasniti da se Piaget u proučavanju razvoja teorije skupova posebice zadržao na Cantorovu doprinosu. Fundamentalni pojam 1-1 korespondencije ocijenio je kao primitivnu operaciju uz objašnjenje da je Cantor nije izmislio, već je ona bila dio njegove *mentalne opreme* prije nego se uopće počeo baviti matematikom, kao što je to slučaj i općenito kod vrlo mlade djece. Tako je adresirao pitanje o vezi između 1-1 korespondencije i koncepcije prirodnih brojeva. Na jednom kognitivnom nivou dijete percipira prirodni broj kao operaciju ili proces grupiranja međusobno jednakih objekata (jedinični objekti) u skup. Prebrojavanjem jediničnih objekata pri različitim razmještajima uočava da je broj objekata u tom skupu invarijantan s obzirom na razmještaj jediničnih objekata u prostoru. Na višem nivou, prirodni brojevi postaju objekti na koje se mogu primjenjivati nove operacije (npr. aritmetičke) (Piaget, 1965.; Piaget, 1970.).

Zadnjih petnaestak godina života Piaget je dopunio svoju podjelu apstrakcije umećući *pseudo-empirijsku apstrakciju* između empirijske i reflektivne apstrakcije (Dubinsky, 1991. str. 97). Uz takvu proširenu podjelu, 1-1 korespondencije između dvaju konačnih skupova čiji su elementi nabrojeni bile bi kategorizirane u pseudo-empirijsku apstrakciju baš zbog mogućnosti promatranja razmještaja elemenata ovih skupova (ili simbola koji ih reprezentiraju) u prostoru i uspostavljanja fizičkog pridruživanja među njima. S druge strane, npr. koncept euklidske domene nesumnjivo bi spadao u reflektivnu apstrakciju. Jasno je da različite vrste apstrakcije nisu potpuno nezavisne pa se međusobna ovisnost može sažeti na sljedeći način:

Empirijska i pseudo-empirijska apstrakcija formiraju znanje iz objekata vršeći radnje nad njima, dok reflektivna apstrakcija interiorizira i koordinira te radnje s ciljem formiranja nove radnje, a u konačnici, i novog objekta koji više neće biti fizički već matematički (kao npr. funkcija ili grupa).

(Dubinsky, 1991. str. 98).

3.1. Kritike

Kao što je to već u uvodnom dijelu naglašeno, rad Bourbaki grupe bio je čest izvor ideja za Piagetova istraživanja. Kao potkrjepu svojoj tvrdnji da *znanstvena misao nije statična već je proces*, preciznije proces kontinuirane konstrukcije i reorganizacije, Piaget uspoređuje materinje strukture i teoriju kategorija. Štoviše, Piaget je tvrdio da faze u ranom matematičkom razmišljanju odgovaraju materinjim strukturama. Ovakvi i slični zaključci naišli su na mnoge kritike (npr. Freundenthal, 1973.), a zasigurno jedan od razloga pogrešnih interpretacija leži baš u činjenici da Piaget nije imao formalno matematičko obrazovanje. Tako je primjerice u knjigama *The Child's Conception of Space* i *The Child's Conception of Geometry* opisao istraživanja o razvoju prostornih koncepata kod djece. Kada matematičar pročita opasku prevoditelja u knjizi *The Child's Conception of Space*, bit će zgrožen ne samo nepreciznim, već i netočnim definicijama i napomenama, što će mu sigurno baciti sumnje na cjelokupnu knjigu. Primjerice prevoditelj tvrdi: „Predmet topologije nisu udaljenost, kut ili ravnost, već svojstvo povezanosti ili omeđenosti." (Piaget i Inhelder, 1967. str. xi). Stoga ima smisla pitati se je li došlo do miješanja pojma ruba[3] podskupa topološkog prostora i pojma omeđenosti[4] podskupa metričkog prostora, pritom znajući da omeđenost skupa uopće nije topološko svojstvo[5]. Piagetovo korištenje nekih matematičkih pojmova (separacije, blizine, neprekidnosti) nije odgovaralo njihovom značenju u matematici, tj. njihovim formalnim definicijama. Neprecizno korištenje matematičkog jezika odnosno pojmovlja samo se djelomično može opravdati primarnim ciljem ovih istraživanja, tj. fokusiranjem na razvoj djetetova poimanja prostora, a ne na razvoj dotičnih matematičkih pojmova kod djece (Martin, 1976.).

Ipak, kritičari Piagetu zamjeraju i prejake zaključke, kao primjerice zaključak da se kod djece iz nekih topoloških koncepata (otvorenost/zatvorenost, blizina, separacija) razvijaju projektivni (problem perspektive) i euklidski (udaljenost, kut) koncepti, tj. da topološka koncepcija prethodi projektivnoj i euklidskoj koncepciji. Bez obzira na sve prethodno napisano, nesumnjivo je da je Piaget ovim istraživanjima pridonijeo razumijevanju i podučavanju matematike upućujući na to da se vjerojatno neki matematički koncepti zaista razvijaju prije drugih, a posebice naglašavajući važnost akcije pri tom razvitku.

4. Piagetov utjecaj

Prijevodom Piagetovih radova na engleski jezik raste njegov utjecaj na matematičko obrazovanje. Tako Skemp prihvaća pojmove sheme, asimilacije, akomodacije,

[3]Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan podskup topološkog prostora *X*.
Skup $\overline{A} := \bigcap \{F : F \supseteq A, F \text{ zatvoren u } X\}$ nazivamo zatvaračem (zatvorenjem) skupa *A*.
Skup $\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ nazivamo rubom (granicom) skupa *A*. (Ungar, 2002. str. 6).

[4]Kažemo da je podskup *A* metričkog prostora (*X*, *d*) omeđen (ograničen) ako postoje točka $P_0 \in X$ i broj $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(P_0, r)$, gdje je $K(P_0, r) = \{P \in X : d(P, P_0) < r\}$.

[5]Funkcija $f : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}$ zadana pravilom *f*(*x*) = *tg x* je homeomorfizam između topoloških prostora $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ (uz relativnu topologiju naslijeđenu od euklidske topologije na $\mathbb{R}$) i $\mathbb{R}$ (uz euklidsku topologiju). Dakle, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $\mathbb{R}$ su homeomorfni (topološki ekvivalentni), a $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je omeđen skup s obzirom na euklidsku metriku, dok $\mathbb{R}$ nije omeđen.

ekvilibriranja te refleksije kao načina na koji se može opisati učenikovo shvaćanje matematičkih pojmova (Thompson, P. W. *Constructivism in Mathematics Education* u Lerman, 2014. str. 97). Metoda intervjuiranja *(klinički intervjui)* kojom se Piaget koristio postaje opće prihvaćen način na koji istraživači detaljno ispituju učenikovo usvajanje matematičkih koncepata. Sve do 1974. matematičari i istraživači u području edukacije matematike o Piagetovu radu razmišljali su kao o *razvojnoj psihologiji* ili *dječjoj psihologiji*, no te godine na konferenciji u Georgiji njegov rad prepoznat je kao novo područje u matematičkoj edukaciji (danas poznato kao konstruktivizam u matematičkoj edukaciji).

4.1. Istraživači koji su usvojili Piagetove stupnjeve kognitivnog razvoja

Ideja četiriju razvojnih stupnjeva imala je i još uvijek ima snažan utjecaj na istraživanja u području edukacije matematike. Collis (1975.) proveo je istraživanje o zatvorenosti operacija koje spada u zadnje razvojno razdoblje, tj. u razdoblje formalnih operacija, u kojem je učenik sposoban formirati hipotezu i deducirati moguće posljedice, kao i razmišljati strukturno. Inspiriran Piagetovom idejom da se znanje i sposobnosti organiziraju oko iskustva, Dienes (1960.) je razvio konstruktivističku teoriju o učenju matematike, a koja promovira strukturni pristup u poučavanju matematike (Schwarz, B. B. *Psychological Approaches in Mathematics Education*. u Lerman, 2014. str. 506). Istoj ideji ostao je vjeran i nakon gotovo trideset godina, pa je tako u jednom intervjuu rekao:

Matematiku karakteriziraju strukture; ta činjenica ne može se poreći i po mom mišljenju važno je što prije upoznati učenike s tim strukturama. To ne znači da im moramo izravno reći što su te strukture, već možemo koristiti matematičke igre i druge materijale koji će im pomoći da otkriju i razumiju te strukture. Pročitali ste o mojoj teoriji o šest stupnjeva učenja [Dienes, 2000.)]. I u ovoj teoriji faza formalizacije dolazi na samome kraju.

(Sriraman i Lesh, 2007. str. 61).

4.2. Istraživanja o miskoncepcijama

Odjek Piagetove ideje prema kojoj djeca konzistentno razrađuju shvaćanja stvarnosti koja ne odgovaraju znanstvenim standardima, pretočio se u trend istraživanja miskoncepcija koji je trajao od 1970-ih do 1990-ih. Kada nove informacije dođu u konflikt s učenikovim prijašnjim znanjem, javlja se potreba za reorganizacijom postojećeg znanja, tj. za konceptualnom promjenom. Nekompatibilnost između postojećeg znanja i novih informacija detektirana je kao čest izvor poteškoća u učenju npr. algebre (Kieran, 1992.), razlomaka (Hartnett i Gelman, 1998.) i racionalnih brojeva (Merenluoto i Lehtinen, 2002.). Jedan od odgovora na pitanje o tome kako se mogu ukloniti miskoncepcije javlja se u vidu zadavanja zadataka koji će učenicima potaknuti kognitivne konflikte (Schwarz, B. B. *Psychological Approaches in Mathematics Education*. u Lerman, 2014. str. 506). Prve kritike ovog pristupa mogle su se čuti već tijekom 1980-ih, no 1990-ih sve više matematičara, kao i edukatora suglasno je u tome da kognitivni konflikt nije efektivna strategija poučavanja. Tako Vinner piše:

Iako se isprva čini da nekonzistencije mogu biti od velike pomoći u učenju matematike, ...to nije nužno slučaj. Istina je da će student pokušati akomodirati prepoznatu kontradikciju. Drugo, čak i ako student prepozna kontradikciju i pokuša je akomodirati, ne postoji jamstvo da će akomodacija ići u željenom smjeru.

(Vinner, 1990. str. 91-92).

Istraživanja o miskoncepcijama napuštena su krajem 1990-ih godina u korist istraživanja koja se bave stjecanjem znanja, tj. detaljnim opisom evolucije znanja kroz dulje vrijeme. Istraživanja koja se bave konceptualnim promjenama još su uvijek aktualna, a razlozi za to su:

…identifikacija koncepata koji učenicima mogu prouzročiti velike teškoće; predviđanja i objašnjenja učeničkih sustavnih pogrešaka; razumijevanja koliko pojedini matematički koncepti mogu biti kontraintuitivni; nalaženja premošćujućih analogija i razvijanja studenata u smjeru internacionalnih učenika s metakognitivnim vještinama potrebnima da nadiđu barijere nametnute prethodnim znanjima (Schoenfeld, 2002.).

(Schwarz, B. B. Psychological Approaches in Mathematics Education. u Lerman, 2014. str. 506).

4.3. Dualni pogledi na matematiku potaknuti reflektivnom apstrakcijom

Dualnost forme i sadržaja u Piagetovoj teoriji, kao i dualnost koju iščitavamo iz definicije reflektivne apstrakcije (akcija nad postojećim sadržajem koja u konačnosti dovodi do novog sadržaja) bile su utjecajne ideje za mnoge autore, a neki od njih bit će navedeni u nastavku (vidjeti Tall , Thomas, Davis, Gray i Simpson,. 1999.).

Prateći već rani Piagetov rad, Dienes (1960.) koristi gramatičke termine (predikat i subjekt) da bi objasnio kako se formiraju mentalni matematički objekti. Prema Dienesu predikat (ili akcija) postaje subjekt daljnjeg predikata, koji onda može postati subjekt nekog drugog predikata. Sličnu ideju zastupa i Davis (1984.). Tako tvrdi da izvršavanjem procedure (glagol) ona postaje entitet, tj. objekt (imenica). Izraz *procedura* Davis koristi i za specifični algoritam implementacije procesa u informacijsko-procesnom smislu. Greeno (1983.) piše o pogledu na proceduru kao na *konceptualni entitet* u slučaju kada je procedura ulaz neke druge procedure. Thompson (1985.) je ponudio teorijski okvir u kojem je matematičko znanje karakterizirano u terminima procesa i objekta, a središnje pitanje je na koji način učenik može pojmiti procese (deriviranje, integriranje) kao matematičke objekte (derivaciju funkcije, integral). Učenik se uobičajeno prvi put s pojmom susreće kao s procesom, no da bi taj proces postao predmetom nekih novih procesa on za učenika mora prijeći iz procesa u objekt. Prijelaz iz procesa u objekt Thompson naziva *objektifikacijom* (Lerman, 2014. str. 6). Dvojni pogled (proceduralni i strukturni) na matematičke pojmove uočava i Sfard (1991.). Prijelaz iz proceduralne koncepcije u strukturnu naziva *reifikacijom*. Na toj ideji razvija *teoriju reifikacije*, teorijski okvir o usvajanju matematičkih pojmova. Gray i Tall (1994.) također uočavaju važnost učenikove fleksibilnosti pri shvaćanju matematičkih pojmova i kao procesa i kao objekta. Amalgam triju komponenti, procesa koji stvara matematički objekt te simbola koji reprezentira ili proces ili objekt, nazvali su *elementarnim proceptom*. *Procept* je kolekcija elementarnih procepata s istim objektom.

Najpoznatiji, najdetaljniji i najkoherentniji izdanak Piagetove reflektivne apstrakcije je APOS (Akcija, Proces, Objekt, Shema) teorija. APOS teorija je teoretski okvir u području istraživanja matematičkog obrazovanja koju je utemeljio Dubinski (1991.) vjerujući da se Piagetova ideja reflektivne apstrakcije može primijeniti i na visoko školstvo.

Znajući da odgovor na pitanje o naravi i podrijetlu matematičkog objekta nije jednoznačan, APOS teorija i teorija reifikacije zapravo postavljaju iduće pitanje: *što je to matematički objekt za danu osobu u danom kontekstu?* (Tall , Thomas, Davis, Gray i Simpson,. 1999. str. 1). Osnovni način usvajanja matematičkog objekta traže u enkapsulaciji, odnosno reifikaciji procesa u mentalni objekt.

Zbog potpunosti pregleda u nastavku će biti dane i dihotomije matematike koje razdvajaju matematičko znanje u dvije odvojene kategorije. *Konceptualno-proceduralna* (Lesh i Landau, 1983.; Hiebert i Wearne, 1985.), kao i *instrumentalno-relacijska* (Skemp, 1976.) kategorizacija matematike također se mogu povezati s radom prethodno navedenih autora (Sfard, 1991. str. 8). Vrijedi spomenuti i sljedeće autore koji su se bavili dihotomijom ili dualnosti u matematičkom znanju, misli ili razumijevanju. Prema Halmosu (1985.) matematika se može podijeliti na *apstraktnu i algoritamsku*, dok ju je prema Andersonu (1976.) moguće razdvojiti na *deklarativnu i proceduralnu*. Od velikog je utjecaja proces-produkt dualnost matematičkih simbola (Kaput, 1979.; Davis, 1975.), kao i podjela matematike na *dijalektičku i algoritamsku* matematiku (Henrici, 1974.). Sfard komentira dijalektičku i algoritamsku matematiku na sljedeći način:

Dok se algoritamska matematika bavi svim vrstama računskih procesa, dijalektička matematika je rigorozno logička znanost u kojoj su tvrdnje ili istinite ili lažne, a objekti s određenim svojstvima ili postoje ili ne postoje.

(Sfard, 1991. str. 7.).

Detaljnije će biti pokazan Piagetov utjecaj na rad Anne Sfard (1991.), tj. kako je ona adaptirala i nadogradila Piagetove ideje.

5. Teorija reifikacije

Prije nego se započne s izlaganjem teorije koju je Anna Sfard fundirala, važno je objasniti pojmovnu razliku koju je Sfard uvela između *koncepta* (pojma) i *koncepcije*.

Sfard riječ *koncept* koristi kao sinonim pojmu, kada govori o matematičkoj ideji u službenoj formi, tj. o formalnom teoretskom konstruktu. Klaster internih reprezentacija i asocijacija evociranih konceptom naziva *koncepcijom*. Tvrdi da je za učenje matematike i rješavanje matematičkih problema presudna fleksibilnost u promatranju matematičkih pojmova na dualan način: *strukturno* - kao objekata; te *operacijski* - kao procesa.

Koncepciju koja matematičke pojmove promatra kao (apstraktne) matematičke objekte Sfard naziva *strukturnom*. S obzirom na modernu matematiku, Sfard misli da bi to trebala biti koncepcija koja danas prevladava. Navodi primjer simetrije koju je moguće promatrati kao *statičko svojstvo geometrijske forme*, ali i kao neki *oblik transformacije*. Potonji opis govori prije o procesu, algoritmu i akciji nego o objektu, pa Sfard za njega kaže da se odnosi na *operacijsku koncepciju* pojma. Autorica naglašava da se operacijska i strukturna koncepcija istog matematičkog objekta međusobno ne isključuju već su komplementarne i baš zato svoju teoriju veže za riječ dualnost, a ne za dihotomiju. Bourbakijev (1934.) opis (skup uređenih parova koji zadovoljava određena svojstva) matematičkog pojma funkcije (funkcija uvedena kao relacija) ocjenjuje kao strukturni, a Skempov (1971.) opis (dobro definirana metoda transformacije jednog skupa u drugi) kao operacijski. Dualna priroda matematičkih konstrukcija vidljiva je ne samo u verbalnom opisu nego i kroz različite simboličke reprezentacije. Iako je takva strukturna priroda prije u očima promatrača nego u samim simbolima, neke reprezentacije su podložnije strukturnoj interpretaciji od drugih. Tako Sfard navodi primjer funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadane pravilom $f(x)=3x^4$ i tri različite reprezentacije te funkcije: grafom, algebarskim izrazom i računalnim programom. Tvrdi da je računalni program prije u korespondenciji s operacijskom koncepcijom nego sa strukturnom jer prezentira funkciju kao računski proces, a ne kao cjelokupan entitet. S druge strane, graf funkcije sadrži informacije o vrijednosti funkcije u svim točkama njene domene pa se one mogu shvatiti kao integrirana cjelina. Stoga graf funkcije potiče strukturnu koncepciju. Algebarska reprezentacija može se interpretirati na oba načina: operacijski, kao koncizni opis računanja; te strukturno kao statička relacija između dviju veličina. Sfard objašnjava da je ta dualnost interpretacije u direktnoj vezi sa široko prepoznatom dualnosti značenja znaka jednakosti „=", koji se može promatrati kao *simbol jednakosti ili kao naredba za izvršavanje operacije s desne strane* (Behr i drugi, 1976.; Kaput, 1979; Kieran, 1981.). Zanimljivo je i kako Sfard klasificira dokaz indukcijom.

> Za svojstvo $P(n)$: dokazati $P(1)$ i implikaciju $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ za sve k, da bi se dokazalo da $P(n)$ vrijedi za sve prirodne brojeve n. (1)
>
> Za dani skup $S\subseteq\mathbb{N}$: dokazati $1\in S$ i implikaciju $k\in S\Rightarrow k+1\in S$, da bi se dokazalo da je $S=\mathbb{N}$. (2)

Operacijskoj koncepciji pripada (1), a (2) strukturnoj (Tall, Thomas, Davis, Gray I Simpson, 1999. str. 12-13).

Uzme li se u obzir pretpostavka - da bi osoba radila s matematičkim objektima mora se moći nositi s produktima nekih procesa bez da ulazi u same procese - prirodno je strukturni opis ocijeniti kao apstraktniji te kao onaj koji pripada naprednijoj razini razvoja koncepta na koji se odnosi (Sfard, 1991. str. 10). Sfard je postavila hipotezu da, u procesu stvaranja nekog koncepta, operacijska koncepcija prethodi strukturnoj. Hipotezu je prvo pokušala dokazati na razini povijesnog razvoja, a kasnije i ne razini individualnog učenja.

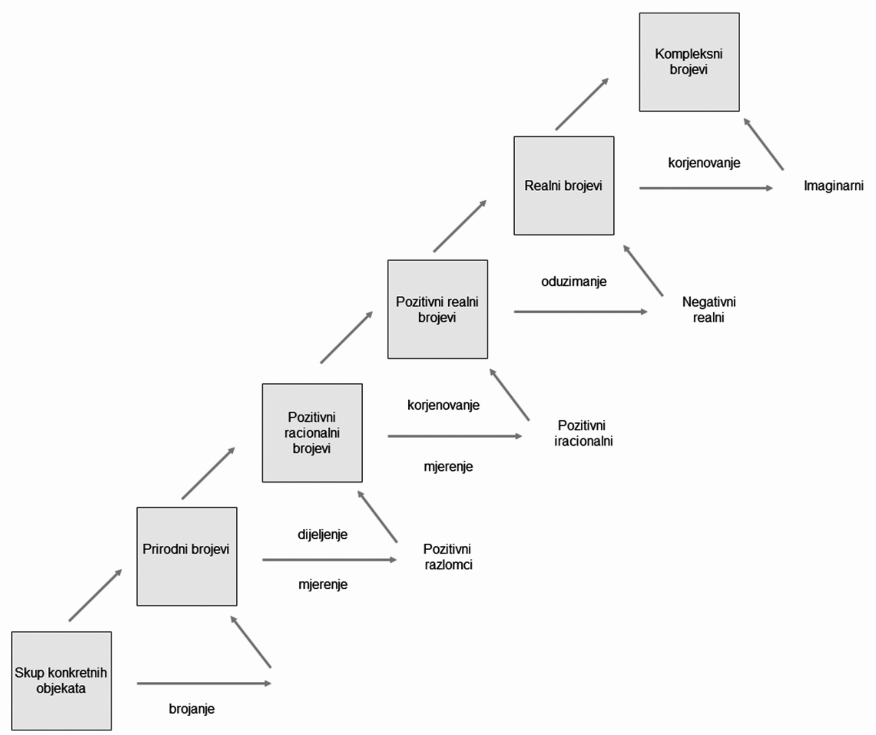
5.1. Povijesni pogled

5.1.1. *Razvoj koncepta broja*

U svom osvrtu na razvoj koncepta broja Sfard se poziva na Piagetov članak iz 1952. godine (Piaget, 1952.) u kojemu je primijećeno sljedeće: kada dijete nauči brojiti, postoji faza u kojoj je uspostavilo 1-1 korespondenciju između riječi jedan, dva, tri... i objekata skupa koji želi prebrojiti, ali dijete neće iskoristiti riječ za zadnji broj u ovom procesu kao odgovor na pitanje o tome koliko je objekata u promatranom skupu. (Sfard, 1991. str. 11). Štoviše, u uzastopnom postavljanju pitanja o broju objekata u promatranom skupu, dijete će ponavljati proceduru brojenja. Sfard zaključuje da ovaj primjer ukazuje na operacijske korijene prirodnih brojeva, tj. da je za dijete, u opisanoj fazi, proces brojenja ono na što dijete pomisli kada mu se spomene pojam broja. Razvoj koncepta broja za Sfard je ciklički proces, pri čemu se svaki ciklus može podijeliti u tri faze: *pretkonceptualnu, operacijsku* i *strukturnu.* Stadij u kojem učenici izvode određene operacije na već poznatim brojevima ili konkretnim objektima (kao u slučaju brojenja) Sfard naziva *pretkonceptualnim*. Slijedi duga faza, dominantno operacijskog pristupa, za vrijeme koje novi skup brojeva izlazi kao posljedica poznatih operacija. Tako su okidači za operacijske faze bile (za to vrijeme neobične, ali korisne) operacije na koje se do netom prije gledalo kao na zabranjene. Dobar primjer je simbol $\sqrt{-1}$ koji je inicijalno (a i danas se nerijetko dvojbeno i pogrešno rabi) promatran kao pokrata za besmislenu numeričku operaciju. O operacijskim korijenima[6] kompleksnih brojeva svjedoči sljedeća rečenica iz članka logičara P. E. Jourdaina iz 1956.: „...on (i) reprezentira operaciju, kao što to reprezentiraju i negativni brojevi, samo drugačiju" (str. 30; Sfard, 1991. str 13).

Strukturna faza je ona u kojoj je dotični skup brojeva prepoznat kao matematički objekt, što omogućava da se na njemu ili njegovim elementima vrše različiti procesi koji su doveli ili mogu dovesti do novih skupova brojeva. Dakle, Sfard povijest brojeva promatra kao dugi lanac tranzicija između operacijske i strukturne koncepcije. Proces izvršen na već poznatim apstraktnim objektima pretvara se u kompaktnu cjelinu, tj. reificira (opredmećuje, postvaruje, objektivira), da bi postao novi samostalan statički konstrukt.

[6]Razvitak koncepta kompleksnih brojeva započeo je u 16. stoljeću problemom određivanja rješenja kubne jednadžbe. Cardan je uočio da taj račun može uključivati drugi korijen iz negativnih brojeva (Douady, 1986.).



Slika 1. Razvoj koncepta broja (Sfard, 1991., str. 13)

5.1.2. *Razvoj koncepta funkcije*

Sfard primjećuje da se slični uzorak ponavlja i u povijesnom razvoju koncepta funkcije. Pojam funkcije prvi se put spominje u Leibnizovu radu iz 1692. godine i usko je povezan s algebarskim procesima, što ne čudi jer je algebarski simbolizam u to vrijeme bio izrazito popularan i ulazio je u sve grane matematike. Prema Bernoulliju (1718.) pojam funkcije koristio se za „veličinu sastavljenu na bilo koji način od varijable i konstante", dok je za Eulera (1747.) označavao „analitički izraz". Dakle, u to se vrijeme koncept funkcije svodio na algebarsku manipulaciju varijablama. Osnovni problem u ranim pokušajima definiranja funkcije bio je taj što su se matematičari oslanjali na koncept varijable koji je i sam bio nejasan. Nakon dugih rasprava s d'Alambertom, Euler je 1755. godine napisao da se *veličina treba nazivati funkcijom samo ako ovisi o drugoj veličini tako da promjena potonje izaziva promjenu ranije spomenute veličine* (Sfard, 1991. str. 14-15). Eulerov opis funkcije za Sfard je nedvojbeno operacijski. Euler je u kasnijem radu pokušavao opisati pojam funkcije strukturno, tj. pokušavao je definirati pojam funkcije tako da objedini algebarsku reprezentaciju i grafičku. No, svaki put kada bi definicija odgovarala algebarsko-operacijskoj intuiciji netko bi konstruirao primjer koji bi ukazivao da ta definicija ne odgovara grafičko-strukturnoj intuiciji, i obrnuto.

U sljedećoj Fregeovoj napomeni Sfard iščitava direktan zahtjev za reifikacijom:

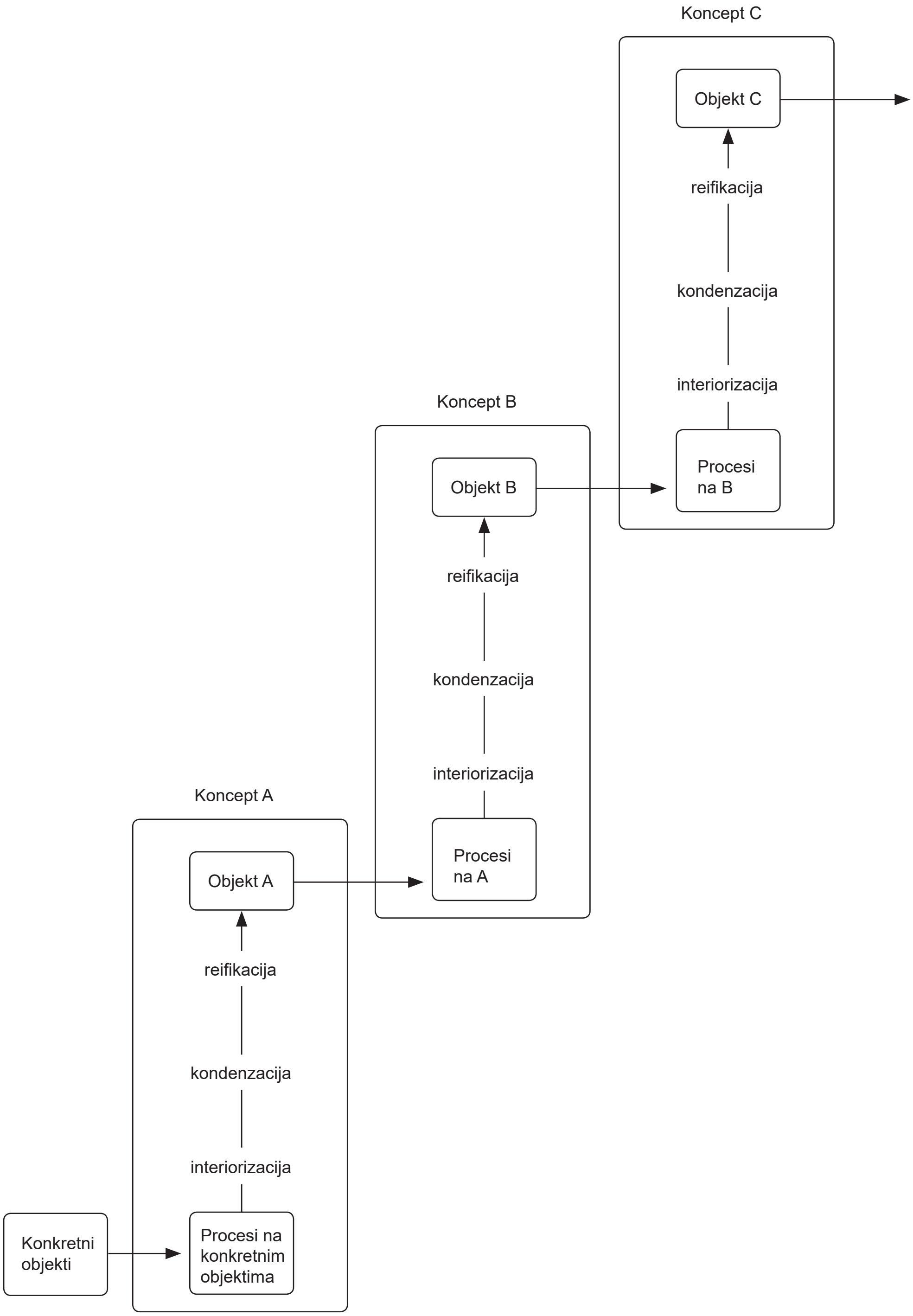
U sadašnje doba riječ varijabla dominantan je dio definicije funkcije. Posljedično tome, analiza se mora baviti procesima u vremenu jer promatra varijable, a zapravo nema veze s vremenom; primjenjivost u vremenu je nebitna... kad god spominjemo varijablu, želimo pogoditi nešto što varira u vremenu i stoga ne pripada čistoj analizi. A ipak mora biti moguće ukazati na varijablu koja ne uključuje nešto strano aritmetici, ako su varijable uopće objekti analize. (Frege, 1970., str. 107; original na njemačkom jeziku: 1904.)

(Sfard, 1991. str. 15).

Sfard sumira da su brojni pokušaji prijevoda operacijske intuicije u strukturalnu definiciju doveli su do Dirichletove pobune protiv algoritamskog pristupa i konačno do potpuno strukturalne Bourbakijeve definicije (Sfard, 1991. str. 15). Time je pojam funkcije, prema Sfard, postao matematički objekt na koji je moguće primijeniti nove operacije (npr. danas poznate kao funkcionali) i ponoviti opisanu shemu razvoja koncepta. Kada se matematika pogleda u cijelosti, autorica uočava neku vrstu hijerarhije u kojoj ono što se na jednoj razini promatralo potpuno operacijski, na idućoj se razini zbog reifikacije može promatrati strukturno (Sfard, 1991. str. 16).

5.2. Psihološki pogled

Autorica tvrdi da je opisanu shemu, konstruiranu na temelju povijesnih primjera, moguće primijeniti na opisivanje procesa učenja individue. Kao što su u shemi povijesnog razvoja koncepta izdvojene tri faze, tako i u procesu učenja Sfard prepoznaje tri stupnja strukturiranja koja korespondiraju ovim fazama Pod uvjetom da je pretpostavka o operacijskim korijenima matematičkih objekata istinita, autorica zaključuje da onda prvo postoji proces koji se izvodi na postojećim objektima, zatim dolazi do ideje pretvorbe ovih procesa u samostalne entitete i konačno do sposobnosti da se ti entiteti vide integrirano, kao cjeloviti objekti (Sard, 1991. str. 18). Upravo opisane tri faze u razvoju koncepta Sfard redom naziva: *interiorizacijom, kondenzacijom* i *reifikacijom*. Zbog teškoće ispitivanja učenikova (studentova) implicitnog mišljenja o prirodi matematičkih objekata, Sfard jedinu mogućnost opisivanja ovih faza vidi u analizi učenikovih (studentovih) ponašanja, stavova i vještina. U fazi interiorizacije učenik se upoznaje s procesima koji su operacije izvođene na nižerangiranim matematičkim objektima, a koji će postupno dovesti do novog koncepta (kao što brojenje dovodi do prirodnih brojeva ili algebarske manipulacije do funkcija). Za Sfard termin interiorizacija ima gotovo isto značenje kao kod Piageta (1970., str. 14): reći ćemo da je proces interioriziran ako se „može ostvariti putem (mentalne) reprezentacije" te ako se može promatrati, analizirati i uspoređivati, a da se više ne mora izvoditi" (Sfard, 1991. str. 18). U slučaju funkcije, kada učenik shvati ideju varijable i u stanju je, koristeći zadanu formulu, odrediti vrijednosti zavisne varijable, Sfard smatra da je proces interioriziran. Faza kondenzacije je period u kojem se brojni procesi sažimaju u preglednije jedinice pa je u ovoj fazi osoba sposobna sagledati proces



Slika 2. Opći model formiranja koncepta (Sfard, 1991. str. 22)

u cjelini bez da ide u detalje (Sfard, 1991. str. 19). Progres u kondenzaciji ogleda se i kroz lakoću izmjenjivanja različitih reprezentacija koncepta. U slučaju funkcije, što osoba može suverenije baratati s preslikavanjem kao cjelinom, bez da promatra vrijednosti u svakoj točki domene, to Sfard smatra da je uspješnija u kondenzaciji. U konačnici osoba može promatrati svojstva funkcija, skicirati graf funkcije, pa čak i npr. komponirati funkcije. Dok god je novi entitet usko povezan s određenim procesima, traje kondenzacijska faza. Kada je osoba u stanju sagledati pojam kao matematički objekt, za Sfard je osoba *reificirala* koncept. Za razliku od interiorizacije i kondenzacije, reifikacija je iznenadna promjena, tj. sposobnost da se nešto poznato sagleda u sasvim drugačijem svjetlu (proces očvrsne u objekt). Faza reifikacije je točka u kojoj počinje novi ciklus, odnosno interiorizacija viševrangiranih koncepata (u odnosu na one od kojih se počelo). U slučaju funkcije, reifikacija se može ogledati u rješavanju jednadžbi u kojima su nepoznanice funkcije (diferencijalne jednadžbe, funkcionalne jednadžbe) u mogućnosti promatranja različitih svojstava procesa izvođenim na skupu funkcija i ultimativno, u prepoznavanju da „izračunljivost nije nužna karakteristika skupa uređenih parova koji se smatra funkcijom" (Sfard, 1991, str. 20). Sfard upozorava na *kavzistrukturni* pristup, tj. tendenciju da se neki pojam identificira s jednom od njegovih reprezentacija (u slučaju funkcije, npr. formula ili graf).

Teoriju reifikacije kao teoretski okvir primijenile su Sfard i Linchevski (1994.) pri proučavanju algebre. Na razini individualnog učenja promatrale su dva osnovna prijelaza: od potpuno *operacijske algebre* prema *algebri fiksnih vrijednosti (nepoznanice)*; od *algebre fiksnih vrijednosti* prema *funkcionalnoj algebri (varijable).*

6. Zaključak

Bez obzira na mnoge opravdane kritike Piagetovih istraživanja, zaključaka, kao i rada generalno, važnost uloge u istraživanjima u području edukacije matematike ne može mu se osporiti. Ipak, na njegovu slučaju vidljiva je važnost formalnog matematičkog obrazovanja istraživača u području edukacije matematike.

Iz istraživanja Anne Sfard uočljiva je korisnost sagledavanja gradiva koje se želi poučiti iz epistemološke te povijesne perspektive jer baš one nastavniku mogu ukazati na koje načine učenicima, odnosno studentima, može olakšati usvajanje gradiva.

Literatura:

1. Anderson, J. R. 1976. *Language, Memory, and Thought*. Erlbaum, Hillsdale, NJ.
2. Arnon I., Cottrill J., Dubinsky E., Oktac A., Roa Fuentes S., Trigueros M. & Weller K. 2014. *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Develpment in Mathematics Education*. Springer.
3. Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. 1976 *How children view equality sentences* (PMDC Technical Report No. 3), Florida State University (ERIC Document Reproduction Service No. ED144802).

4. Beth, E. W. & Piaget, J. 1966. *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht: Reidel.

5. Collis K. 1975. *A study of concrete and formal operations in school mathematics: a Piagetian viewpoint.* Australian Council for Educational Research, Hawthorn.

6. Davis, R. B. 1975. *Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations.*

Journal of Children's Mathematical Behavior 1(3), 7-35.

7. Davis, R. B. 1984. *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education.* Norwood, NJ: Ablex.

8. Dienes, Z. P. 1960. *Building up Mathematics*. Hutchinson Educational: London.

9. Douady R. 1991. *Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics.* In: Bishop A.J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (eds) Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching. Mathematics Education Library, vol 10. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2195-0_6

10. Dubinsky, E. & Lewin, P. 1986. *Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness*. Journal of Mathematical Behavior, 5, 55–9

11. Dubinsky E. 1991. *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*, in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking.

12. Duckworth, E. 1979. *An Introductory Note about Piaget*. Journal of Education, 161(1), pp. 5–12. doi: 10.1177/002205747916100103.

13. Frege, G. 1970. *What is function*, in Geach, P. and Black, M. (eds.), Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, Blackwell, Oxford.

14. Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task.* Reidel, Dordrecht.

15. Greeno, J. 1983. *Conceptual Entities.* In D. Genter & A. L. Stevens (Eds.), Mental Models, 227-252.

16. Gray E. & Tall D. 1994. *Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic*. J Res Math Educ 26:115—141

17. Halmos, P. R.: 1985, *Pure thought is better yet...* The College Mathematics Journal 16, 14-16.

18. Hartnett, P., & Gelman, R. 1998. *Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?* Learning and Instruction, 8(4), 341–374.

19. Hausberger, T. 2018a. *Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra.* International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, Springer.4 (1), pp.74-93. ff10.1007/s40753-017-0063-4ff. ffhal-01668169f

20. Hausberger, T. 2018b. *Abstract Algebra Teaching and Learning.* Steve Lerman. Encyclopedia of Mathematics Education, Springer, 2018, 978-94-007-4977-1. ff10.1007/978-3-319-77487-9_100022-1ff.ffhal-01865229
21. Henrici, P. 1974. *The influence of computing on mathematical research and education* in Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 20, American Mathematical Society, Providence.
22. Hiebert, J. & Wearne, D. 1985. *A model of students' decimal computation procedures.* Cognition and Instruction, *2*(3-4), 175–205.
23. Jourdain, P. E. B. 1956. *The nature of mathematics* in Newman, J. R. (ed.), The World of Mathematics, Simon and Schuster, New York.
24. Kaput, J. J. 1979. *Mathematics and learning: Roots of epistemological status* in Lochhead, J. and Clement, J. (eds.), Cognitive Process Instruction, Franklin Institute Press.
25. Kieran, C. 1981. *Concepts associated with the equality symbol.* Educational Studies in Mathematics 12(3), 317-326.
26. Kieran, C. 1992. *The learning and teaching of school algebra.* In: Grouws DA (ed) Handbook of research on mathematics teaching and learning. Macmillan, New York, pp 390—419
27. Lesh, R. & Landau, M. 1983. *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Publisher: New York : Academic Press, 1983.
28. Lerman, S. (Ed.) 2014. *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Netherlands.
29. Martin, J. 1976. *An Analysis of Some of Piaget's Topological Tasks from a Mathematical Point of View.* Journal for Research in Mathematics Education, 7(1), 8-24. doi:10.2307/748762
30. McGowen, M. 1998. *Cognitive Units, Concept Images, and Cognitive Collages: An Examination of the Processes of Knowledge Construction.*
31. Merenluoto, K. & Lehtinen, E. 2002. *Conceptual Change in Mathematics: Understanding the Real Numbers.* 10.1007/0-306-47637-1_
32. Piaget, J. 1952. *The Child's Conception of Number.* Routledge and Kegan, London.
33. Piaget, J., & Inhelder, B. 1967. *The Child's Conception of Space.* New York: W. W. Norton & Co.
34. Piaget, J. 1970. *Genetic Epistemology*. Columbia University Press, New York.
35. Piaget, J. 1972. *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans.) London: Routledge & Kegan Paul.
36. Piaget, J. 1973. *Comments on mathematical education.* In A. Howson (Ed.), Developments in Mathematical Education: Proceedings of the Second Internatio-

nal Congress on Mathematical Education (pp. 79-87). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139013536.004

37. Piaget, J. 1976. *The grasp of consciousness: Action and concept in the young child.* (Trans by S. Wedgwood). Harvard U Press.
38. Piaget, J. & In Campbell, R. L. 2001. *Studies in reflecting abstraction.* Hove, E. Sussex England: Psychology Press.
39. Poincaré, H. 1914. *Science and Method* translated by Francis Maitland Cosimo Classics NEW YORK. 2010.
40. Schoenfeld 2002. *Research methods in (mathematics) education.*
41. Schwebel, M. & Raph, J. 1973. *Piaget in the classroom.* New York: Basic Books.
42. Sfard, A. 1991. *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educ Stud Math 22:1—36
43. Sfard, A. & Linchevski, L. 1994. *The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra.* Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 191-228.
44. Sinaceur, H. B. (2014.) *Facets and Levels of Mathematical Abstraction.* Philosophia Scientiae, Editions Kime. Standards of Rigor in Mathematical Practice, 18 (1), pp.83-112. ffhalshs-01119486f
45. Skemp, R. R. 1971. *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books, Harmondsworth, England.
46. Skemp, R. R. 1976. *Relational understanding and instrumental understanding.* Mathematics Teaching.
47. Sriraman, B. & Lesh, R. 2007. *A Conversation With Zoltan P. Dienes. Mathematical Thinking and Learning.*
48. Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. & Simpson A. 1999. *What Is the Object of the Encapsulation of a Process?* The Journal of Mathematical Behavior.
49. Thompson, P. W. 1985. *Experience, problem solving, and learning mathematics: consider- ations in developing mathematical curricula* in E. A. Silver (ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Erlbaum, Hillsdale, N.J.
50. Ungar, Š. 2002. *Matematička analiza 3*. 3. ispravljeno i dopunjeno izd. - Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet–Matematički odjel.
51. Vinner, S. 1990. *Inconsistencies: Their causes and function in learning mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics 12(3&4), 85–98.
52. Wussing, H. 1984. *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory.*