Tangenta u nastavi matematike

Aleksandar Hatzivelkos[1]

1. Definicije tangente

Definiciji tangente u obrazovanju se pristupa na dva osnovna načina. Prvi je način onaj u kojemu se tangenta opisuje geometrijski intuitivno, i u pravilu je vezan za osnovnoškolsko obrazovanje. Drugi način, koji se pak pojavljuje u srednjoj školi, tangentu definira pomoću derivacije funkcije u točki.

No, oba koncepta nose svoje probleme koji se često manifestiraju i u obrazovnim procesima u visokome školstvu.

S pojmom tangente učenici se u nastavi matematike susreću u sedmom razredu osnovne škole. Pojam tangente uvodi se kroz obradu kružnice, pri čemu se tangenta definira kao pravac koji siječe kružnicu u jednoj točki [3,8,11]. Pri tome se točka presjeka definira kao diralište. Za intuitivno poimanje pojma tangente u budućnosti đacima je važniji naziv točke presjeka, *dirališta*, nego li sama definicija tangente. Naime, usvajanje koncepta pravca koji dira krivulju (u ovom slučaju kružnicu) važno je za kasnije razumijevanje pojma, dok je svojstvo da se tangenta i kružnica sijeku u jednoj točki zapravo specijalan slučaj koji općenito ne vrijedi.

Pristup tangenti kao diralištu nastavlja se i u srednjoškolskom obrazovanju. U trećem razredu srednje škole obrađuje se gradivo analitičke geometrije u ravnini, gdje se učenici opet susreću s tangentom. Tangenta se i u ovom slučaju naslanja na neformalnu definiciju iz osnovne škole, tangente kao pravca koji dira zadanu krivulju [5,9,12]. Ta se posljedica koristi i u izvodima jednadžbe tangente na elipsu i hiperbolu koje, baš kao i kružnica, imaju svojstvo da je tangenta svaki pravac koji ih siječe u točno jednoj točki.

No, ista je argumentacija primijenjena i kod izvoda jednadžbe tangente na parabolu, pri čemu početna pretpostavka da je tangenta svaki pravac koji siječe parabolu u jednoj točki nije istinita – naime, svaki pravac paralelan s osi simetrije parabole siječe parabolu u jednoj točki, a nije joj tangenta. U izvodu jednadžbe parabole to se vidi kroz zanemarivanje pravaca oblika $y = k \cdot x + l$ kod kojeg je $k = 0$, kao traženih rješenja (pravaca koji sijeku parabolu u jednoj točki). Time postaje očigledno kako inzistiranje na formalno netočnoj definiciji tangente kao pravca koji *dira* krivulju u jednoj točki na kraju vodi i do matematički nepotpunih izvoda.

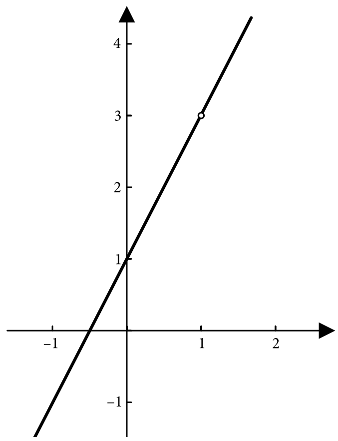
[1]Aleksandar Hatzos, Veleučilište Velika Gorica

U četvrtom razredu srednje škole tangenta se koristi kao (jedna od) motivacija za definiciju derivacije funkcije u točki. U dijelu udžbenika pojam tangente uopće se ne objašnjava, već ga se koristi kao pojam usvojen u prethodnom obrazovanju [6,10], dok u [1] prvi put nalazimo formulaciju tangente kao „pravca koji se u toj točki najbolje prislanja uz krivulju". No, moramo istaknuti kako se tangenta kao najbolja linearna aproksimacija i u ovom slučaju prvi put pojavljuje tek u završnom razredu srednje škole, nakon što je intuitivno prihvaćanje tangente kao pravca koji dira krivulju u jednoj točki već više puta potvrđeno.

U sljedećih nekoliko primjera pokazat ćemo u kojim situacijama intuitivno prihvaćen pojam tangente kao pravca koji dira neku krivulju navodi učenike (a kasnije i studente) na krive zaključke vezane uz tangentu.

Primjer 1. Odredite tangentu na pravac $f(x)=2x+1$ *u točki* $D(1,3)$.

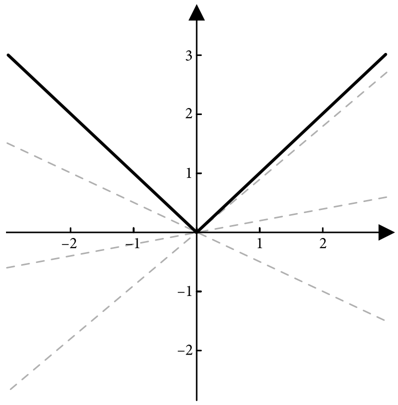
Tražena tangenta u ovom primjeru je upravo pravac $y = 2x + 1$ (što vrijedi za sve linearne funkcije, a ne samo za navedenu). No, problem kod intuitivnog prihvaćanja rješenja u Primjeru 1 je upravo pojam diranja. Ukoliko se na intuitivnoj razini pojam tangente usvoji kao pravac koji dira krivulju u zadanoj točki, kasnije je teško u taj koncept uklopiti ovakva rješenja. Tangenta u ovom slučaju ima *sve* točke zajedničke sa zadanim pravcem, što je koncept koji je intuitivno pozicioniran najdalje moguće od ideje *diranja* u jednoj točki.



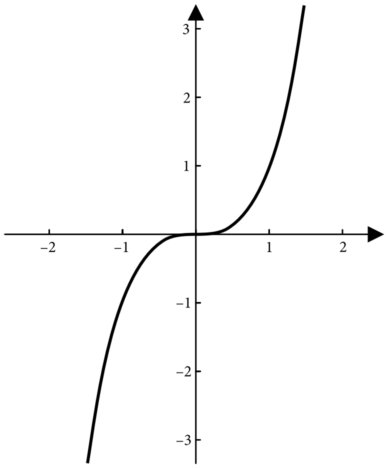
Primjer 2. Odredite tangentu na graf funkcije $f(x)=|x|$ *u točki* $D(0,0)$.

Ovaj nas pak primjer dovodi na posve drugi kraj intuitivnog shvaćanja tangente kao pravca koji dira krivulju u jednoj točki. Naime, graf zadane funkcije u ishodištu dira beskonačno mnogo pravaca. No, niti jedan od njih nije tangenta.

Naime, prema formalnoj definiciji tangente kao pravca kojemu je nagib jednak derivaciji zadane funkcije u danoj točki, vidimo kako u ishodištu ne postoji tangenta jer funkcija $f(x)=|x|$ nema derivaciju u toj točki. Ovakvi primjeri znaju i kod studenata proizvoditi logički vratolomne zaključke poput ovoga: „Kada u nekoj točki ima više tangenta, tada u toj točki tangenta ne postoji."



Primjer 3. Odredite tangentu na graf funkcije $f(x)=x^3$ *u točki* $D(0,0)$.



Konačno, u ovom primjeru učenici koji su na intuitivnoj razini prihvatili dirališnu definiciju tangente vrlo teško prihvaćaju zaključak kako je tangenta na kubnu funkciju u ishodištu x -os. Ta os, naime, *siječe* zadanu krivulju. Kako je moguće da pravac koji *siječe* krivulju bude tangenta, odnosno pravac koji *dira* krivulju?

2. Što je tangenta kada nije limes?

Iz prethodnog poglavlja postaje jasno pitanje: kako matematički korektno definirati pojam tangente kojim će se izbjeći opisani problem? S jedne strane, definicija mora biti korektna, iako ne i formalna, na svim razinama obrazovanja. S druge strane, definicija ne smije biti preapstraktna, pogotovo na nižim razinama obrazovanja. Ujedno, apstrakcijom infinitezimalnog računa gubi se vizualna komponenta pojma koja će biti intuitivno prihvatljiva već i u osnovnoškolskom obrazovanju.

Nadalje, tangenta mora imati i definiciju neovisnu diferencijalnom računu. Upravo se problem tangente često koristi kao motivacija, ali i kao konstrukcijski model za definiciju pojma derivacije u točki. Ukoliko se nakon toga tangenta definira kao pravac kroz točku krivulje kojemu je nagib jednak derivaciji funkcije u toj točki, cijela konstrukcija postaje cirkularna: tangenta se koristi kao model za definiciju derivacije kojom se potom definira pojam tangente.

Dakle, što je tangenta kada nije limes?

Pristup koji zadovoljava oba ta zahtjeva jest definicija tangente kao *najbolje linearne aproksimacije*. Što se komponente intuitivnog shvaćanja pojma tiče, crtanje pravca koji najbolje priliježe uz danu krivulju u zadanoj točki intuitivno je jasan zadatak. S druge strane, iako je pojam najbolje linearne aproksimacije (izrečen rječnikom koji odgovara starosti i predznanju učenika) intuitivno dovoljno jasan, on omogućava i formalnu definiciju. Od toga ćemo i krenuti u ovome članku.

Definicija *Tangenta na graf krivulje $y = f(x)$ u točki $D(a, f(a))$ je pravac $y = t(x)$ koji prolazi tom točkom i koji najbolje aproksimira funkciju f u blizini točke D. To znači da za svaki drugi pravac $y = p(x)$ koji prolazi točkom D postoji otvoreni skup A takav da je $a \in A$, te vrijedi $\left|f(x)-t(x)\right| \leq \left|f(x)-p(x)\right|$, za sve $x \in A$.*

Definicija tangente kao pravca koji najbolje prijanja uz zadanu krivulju intuitivno je jasna – to je upravo proces koji provodimo kada pokušavamo skicirati tangentu. Nadalje, takva definicija tangente na intuitivnoj razini omogućava lako i jednostavno prihvaćanje rezultata iz Primjera 1, 2 i 3.

Ukoliko tražimo pravac koji najbolje aproksimira krivulju zadanu u Primjeru 1, zaključak kako zadani pravac sam sebe najbolje aproksimira je trivijalan. U slučaju određivanja tangente u Primjeru 2 lako je zaključiti kako pravac koji najbolje aproksimira zadanu funkciju lijevo od ishodišta nije isti kao i pravac koji najbolje aproksimira funkciju desno od ishodišta. Odatle nije teško zaključiti kako ne postoji jedan pravac koji će s obje strane ishodišta najbolje aproksimirati funkciju apsolutne vrijednosti. Konačno, problem prihvaćanja x-osi kao tangente u Primjeru 3 isključivo je vezan uz usvojenu dirališnu definiciju tangente. Ukoliko od pravca tražimo da najbolje priliježe uz funkciju, intuitivno određivanje tangente kubne funkcije u ishodištu ne razlikuje se od određivanja tangente kvadratne funkcije u istoj točki.

Naravno, od učenika u osnovnoj školi, pa čak niti u srednjoj školi (do obrade diferencijalnog računa) ne treba očekivati svladavanje formalne definicije kakva je ovdje dana. Dapače, formalizam bi na tim razinama učenja bio i kontraproduktivan. No sam pojam pravca koji najbolje prijanja uz neku krivulju dovoljno je jasan i intuitivno prihvatljiv sam po sebi.

Pri tome, takva definicija omogućava uvođenje koncepta svojstva određenog pojma. Na primjer, već u osnovnoj školi može se formulirati: tangenta *je* pravac koji najbolje leži uz kružnicu, a *svojstvo* tangente u tom slučaju je da s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku.[2]

Isti se koncept opisivanja svojstva tangente potom može upotrijebiti i u srednjoj školi, gdje tangenta elipse i hiperbole također ima to svojstvo, ali potom i naglasiti kako parabola – nema. Izostanak svojstva tangente kao pravca koji dira neku krivulju tada u punini dobiva na značenju u četvrtom razredu srednje škole, pri obradi tangenta raznih krivulja, poput krivulje spomenute kubne funkcije, ili trigonometrijskih funkcija.

Matematičku opravdanost tih navoda, naravno, ne treba dokazivati u školi, čak ni pri obradi diferencijalnog računa (pri čemu je konstrukcijski proces od sekanti

[2]Pri čemu treba istaknuti kako se već u sedmom razredu osnovne škole ističu *svojstva* tangente, poput onog da je tangenta u točki presjeka okomita na polumjer kružnice [3,11].

do tangente dovoljan), no na ovom ćemo mjestu navesti dokaz korektnosti definicije tangente kao najbolje linearne aproksimacije.

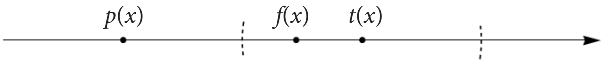
Teorem 4. *Pravac $y = t(x)$ je tangenta na graf krivulje $y = f(x)$ u točki $(a, f(a))$ ako i samo ako postoji $f'(a)$, te je nagib tangente jednak upravo $f'(a)$.*

Dokaz: Neka je $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$, te neka je $p(x) = k(x - a) + f(a)$, $k \neq f'(a)$. Kako bi dokazali da je $t(x)$ jednadžba tangente, treba dokazati kako na nekom otvorenom intervalu A oko a vrijedi $|f(x)-t(x)| \leq |f(x)-p(x)|$. Kako bismo dokazali tu tvrdnju, dovoljno je dokazati

$$|f(x)-t(x)| \leq \frac{1}{2}|t(x)-p(x)|,$$

$$\text{tj. } |f(x)-t(x)| \leq \frac{1}{2}|f'(a)-k| \cdot |x-a|,$$

što je zaključak vidljiv iz sljedeće slike:



Po definiciji derivacije, za $\epsilon = \frac{1}{2}|f'(a)-k|$ postoji otvoreni skup A oko a na kojemu za sve $x \in A$ vrijedi

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \frac{1}{2}|f'(a)-k|.$$

No tada je

$$\begin{aligned} |f(x)-t(x)| &= |f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)| \\ &= |x-a| \cdot \left|f'(a) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-a| \cdot |f'(a)-k| \end{aligned}$$

što dokazuje traženu tvrdnju. Za dokaz drugog smjera teorema pretpostavimo kako je $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ tangenta na graf funkcije u točki $(a, f(a))$. Treba dokazati kako tada vrijedi $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k$. Neka je $\epsilon > 0$. Definiramo sljedeća dva pravca:

$$p_1(x) = (k+\epsilon)(x-a) + f(a),$$

$$p_2(x) = (k-\epsilon)(x-a) + f(a).$$

Po definiciji tangente tada postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - p_1(x)|,$$
$$|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - p_2(x)|,$$

za sve $a - \delta < x < a + \delta$. Kako sva tri pravca prolaze kroz točku (*a*, *f*(*a*)), slijedi kako na otvorenom intervalu desno od *a* vrijedi

$$p_2(x) < t(x) < p_1(x),$$

a kako je *t*(*x*) tangenta (pa lokalno najbolje aproksimira funkciju), slijedi

$$p_2(x) < f(x) < p_1(x).$$

Nakon što ovoj nejednakosti oduzmemo *f*(*a*), te je podijelimo s $x - a$, za sve $x \neq a$ iz tog otvorenog intervala vrijedi:

$$\frac{p_2(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{p_1(x) - f(a)}{x - a}$$
$$k - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < k + \epsilon$$
$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - k \right| < \epsilon.$$

Analognim postupkom dolazimo do istog zaključka za točke iz otvorenog intervala lijevo od *a*, te zaključujemo kako $f'(a)$ postoji te je jednak nagibu tangente *k*.

3. Zaključak

Vjerujemo kako smo ovim člankom pokazali kako je uobičajen način uvođenja i obrade pojma tangente u nastavi matematike postavljen naopako. Tangenta se kao pojam u našem obrazovnom sustavu uvodi polazeći od posebnog slučaja (pravac koji siječe krivulju u jednoj točki) koji se potom još više specificira (pravac koji dira krivulju u jednoj točki). Time se od početka obrazovanja intuitivno usvaja specifična predodžba o pojmu tangente, koja općenito nije točna, te koja u kasnijim fazama obrazovanja otežava učenicima / studentima pravilno usvajanje pojma tangente i prirodno razumijevanje njezinih svojstava.

Čak i u alternativnim prijedlozima obrade toga dijela gradiva, poput onog iznesenog u [4], gdje se umjesto analitičkog pristupa obradi čunjosječnica predlaže tzv. sintetički (geometrijski) pristup, definicija nije univerzalna, već se tangenta na svaku krivulju definira korištenjem nekih specifičnih svojstava interakcije promatrane krivulje s tangentom.[3]

[3]Tako su tangente na elipsu i hiperbolu definirane kao pravci koji s tim krivuljama imaju jednu zajedničku točku, dok se tangenta na parabolu definira kao simetrala kuta između radij-vektora točke na paraboli, tj. vektora koji točku povezuju sa žarištem, odnosno ravnalicom parabole.

Umjesto toga predlažemo da se u obradi pojma tangente kroz cijelo obrazovanje provodi univerzalna definicija tangente kao najbolje linearne aproksimacije, odnosno pravca koji najbolje priliježe uz krivulju u zadanoj točki. Predložena promjena nije ekstenzivna, u smislu drastične izmjene sadržaja i načina na koji se obrađuje gradivo. Ona je prvenstveno orijentirana na promjenu konteksta u kojemu se uvodi definicija tangente, odnosno promjenu intuitivnog shvaćanja tog pojma. Uobičajena svojstva tangente, poput onoga da tangenta s mnogim krivuljama ima jedinstveno presjecište, i dalje ostaju aktualna, no nakon što ih se opiše kao svojstvo.

Takav bi pristup olakšao ispravno matematičko shvaćanje pojma tangente studenata na višim razinama obrazovanja. Također vjerujemo kako se takav pristup usvajanja pojma tangente nadopunjuje i sa zagovaranjem kvalitativnog i numeričkog pristupa nastavi iskazanog u [3]. Naime, tangenta kao najbolja linearna aproksimacija prirodno se uklapa u kvalitativni, ali i numerički pristup analizi mnogih problema, s posebnim naglaskom na primjene.

Literatura

1. Antoliš, S., Copić, A., Brückler, F.M., Milun, T., *Matematika 4*, Školska knjiga, Zagreb (2014.).
2. Bivens, I. C. *What a Tangent Line is When it isn't a Limit*, College Mathematics Journal, Vol. 17-2 (1986.) str. 133-143
3. Boroš, A.B., Brkić, P., Bijaković, L.H., Karlo, M., Kuliš, M. *Matematika 7*, Školska knjiga, Zagreb (2014.)
4. Čulina, B., Vitaljić, S. *Kvalitativni, analitički i numerički pristup u nastavi matematike*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 19 No. 74, (2018.); str. 15-19
5. Dakić, B., Elezović, N., *Matematika 3*, Element, Zagreb (2014.)
6. Dakić, B., Elezović, N., *Matematika 4*, Element, Zagreb (2014.)
7. Mirošević, I., Koceić-Bilan N., Jurko J. *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, Math.e: hrvatski matematički elektronski časopis (1334-6083) 27 (2015.); str. 1-10
8. Paić, G., Bošnjak, Ž., Čulina, B., Grgić, N., *Matematički izazovi 7*. Alfa, Zagreb (2020.)
9. Šikić, Z., Bujan-Slamić, I., Crnković, M., Mileta, R.G., Jeličić, Lj., *Matematika 3*, Profil, Zagreb (2014.)
10. Šikić, Z., Čulav Markićević, M., Vranjković, P., *Matematika 4*, Profil, Zagreb (2014)
11. Šikić, Z., Golac-Jakopović. I., Vuković, M., Krnić, L., *Matematika 7*, Profil, Zagreb (2014.)
12. Špalj, E., Antončić, N., Brückler, F.M., Milun, T. *Matematika 3*, Školska knjiga, Zagreb (2014.)