Jedna važna geometrijska nejednakost o trokutu i njezino poboljšanje

BELMA ALIHODŽIĆ[1], ŠEFKET ARSLANAGIĆ[2]

Dokazivanje nejednakosti u nastavi matematike predstavlja vrlo važan i kreativan posao. Zadatci u vezi s nejednakosti često se daju na raznim natjecanjima iz matematike. U ovom ćemo članku početi od algebarske nejednakosti:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \tag{1}$$

za $a,b,c>0$, koja se pojavila još davne 1903. godine u poznatom američkom časopisu *Educational Times* ([7]) kao Problem 15144 autora A. M. Nesbitta, pa se ona i danas naziva **Nesbittova nejednakost**. Recimo još da se u [2] nalazi deset raznih dokaza nejednakosti (1) te još jedanaest dokaza u [3] i tri dokaza u [4]. Treba uočiti da je nejednakost (1) ciklička, simetrična i homogena. Za njena 24 dokaza u [2], [3] i [4] koristili smo poznate već klasične nejednakosti kao što su nejednakosti između (brojnih) sredina, Cauchy-Bunyakowsky-Schwarza, Höldera, Jensena, Chebysheva, Muirheada, teorem o preuređenju nejednakosti, metoda zamjene (supstitucije) uvođenjem novih varijabli, korištenje raznih pomoćnih nejednakosti i diferencijalni račun. Sada ćemo dati tri različita dokaza ove nejednakosti.

Dokaz 1. Koristeći dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}},$$

odnosno

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{4s}, \tag{2}$$

[1]Belma Alihodžić, Sarajevo, BiH
[2]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

gdje je $a+b+c=2s$, dobivamo zbog (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
&\qquad=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1-3\\
&\qquad=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}-3\\
&\qquad=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\
&\qquad\geq 2s\cdot\frac{9}{4s}-3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

što je trebalo i dokazati.

Recimo da je ovaj dokaz uobičajen i može se naći u raznim knjigama o nejednakostima. Dat ćemo sada dva novija dokaza ove nejednakosti.

Dokaz 2. Neka je

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\ B=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\ \text{i}\ C=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Sada, na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo da je

$$A+B=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3,$$

$$A+C=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=3,$$

$$B+C=\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3,$$

a odavde

$$6\leq(A+B)+(A+C)=2A+B+C=2A+3$$

ili, ekvivalentno,

$$A \geq \frac{3}{2},$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

što je trebalo i dokazati.

Dokaz 3. Kako je nejednakost (1) homogena, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a+b+c=1$.

Prvo ćemo dokazati da vrijedi pomoćna nejednakost

$$\frac{x}{1-x} \geq \frac{9x-1}{4}, \tag{3}$$

za $0<x<1$. Ova nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$4x \geq (9x-1)(1-x),$$

što je dalje ekvivalentno

$$4x \geq 9x-9x^2-1+x$$

$$9x^2-6x+1 \geq 0$$

$$(3x-1)^2 \geq 0.$$

Zadnja je tvrdnja očigledno točna pa je i nejednakost (3) točna. Vrijedi jednakost u (3) ako i samo ako je $x=\frac{1}{3}$.

Sada na osnovi nejednakosti (3) imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \\ &\geq \frac{9a-1}{4}+\frac{9b-1}{4}+\frac{9c-1}{4}=\frac{9(a+b+c)-3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Očigledno, vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b=c$. Jednakost (1) vrijedi i za duljine stranica trokuta a, b i c gdje vrijede nejednakosti trokuta $a<b+c$, $b<c+a$ i $c<a+b$.

Dokazat ćemo sada još jednu nejednakost koja glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3R}{4r}, \tag{4}$$

gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trokuta ΔABC.

Dokaz: Za ovaj dokaz koristit ćemo Cauchy-Bunyakowsky-Schwarzovu nejednakost

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2\le\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}\right), \tag{5}$$

gdje su $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, kao i poznate formule za površinu trokuta

$$P=\frac{abc}{4R}\quad\text{i}\quad P=rs, \tag{6}$$

poznatu Eulerovu nejednakost

$$R\ge 2r, \tag{7}$$

kao i nejednakost

$$a^2+b^2+c^2\le 9R^2. \tag{8}$$

Sada koristeći (5), (6), (7), (8) i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja dobivamo da je

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2 &\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]\\ &\le 9R^2\cdot\left(\frac{1}{4bc}+\frac{1}{4ca}+\frac{1}{4ab}\right)=9R^2\cdot\frac{a+b+c}{4abc}=\\ &=\frac{9R^2}{4}\cdot\frac{2s}{abc}=\frac{9R^2}{4}\cdot\frac{2s}{4Rrs}\\ &\le\frac{9R^2}{4}\cdot\frac{1}{4r^2}=\frac{9R^2}{16r^2}=\left(\frac{3R}{4r}\right)^2,\end{aligned}$$

a odavde je

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3R}{4r},$$

što je i trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (4) ako i samo ako je $a=b=c$, tj. za jednakostranični trokut.

Napomena 1. Dat ćemo sada i dokaz nejednakosti (8). Ako su točke O i H centar opisane kružnice i ortocentar trokuta ΔABC, tada vrijedi jednakost

$$|OH|^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

Dokaz ove jednakosti može se naći u [1], str. 435–437. Iz gornje nejednakosti, zbog $|OH|^2 \geq 0$, slijedi da je

$$9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 0,$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2,$$

gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $O \equiv H$, tj. $a = b = c$ (jednakostranični trokut).

Sada iz (1) i (4) slijedi da vrijedi dvojna nejednakost za trokut ΔABC.

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3R}{4r}.$$

Na kraju ćemo dati još i jedno poboljšanje nejednakosti (4) koje glasi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 - \frac{r}{R}, \tag{9}$$

jer je

$$2 - \frac{r}{R} \leq \frac{3R}{4r},$$
$$8Rr - 4r^2 \leq 3R^2,$$

odnosno

$$3R^2 - 8Rr + 4r^2 \geq 0,$$

što je ekvivalentno

$$(R - 2r)(3R - 2r) \geq 0,$$

a ova je nejednakost točna zbog Eulerove nejednakosti (7), tj. $R \geq 2r$, s jednakošću ako i samo ako je $R = 2r$, tj. ako je $a = b = c$ (jednakostranični trokut).

Sada ćemo dokazati nejednakost (9). Koristit ćemo dvije poznate jednakosti za trokut ΔABC:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(s^2 - r^2 - 4Rr\right) \tag{10}$$

i

$$ab+bc+ca=s^2+r^2+4Rr, \tag{11}$$

čiji se dokazi mogu naći u [1], str. 248–257.

Sada zbog (10) i (11) imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a(c+a)(a+b)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\ &=\ldots=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc}{(2s-a)(2s-b)(2s-c)}=\frac{2s\cdot 2\left(s^2-r^2-4Rr\right)+12Rrs}{2s(ab+bc+ac)-abc}\\ &=\frac{4s\left(s^2-r^2-4Rr+3Rr\right)}{2s\left(s^2+r^2+4Rr\right)-4Rrs}=\frac{4s\left(s^2-r^2-Rr\right)}{2s\left(s^2+r^2+2Rr\right)},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2\left(s^2-r^2-Rr\right)}{s^2+r^2+2Rr},$$

a odavde

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{r}{R}&=\frac{2\left(s^2-r^2-Rr\right)}{s^2+r^2+2Rr}+\frac{r}{R}\\ &=\frac{2R\left(s^2-r^2-Rr\right)+r\left(s^2+r^2+2Rr\right)}{R\left(s^2+r^2+2Rr\right)}=\frac{2Rs-2R^2r+rs^2+r^3}{R\left(s^2+r^2+2Rr\right)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Sada ćemo dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{2Rs^2-2R^2r+rs^2+r^3}{R\left(s^2+r^2+2Rr\right)}<2\ , \tag{13}$$

ili, ekvivalentno,

$$2Rs^2-2R^2r+rs^2+r^3<2Rs^2+2Rr^2+4R^2r,$$

odnosno

$$s^2\le 6R^2+2Rr-r^2. \tag{14}$$

Imamo poznatu Gerretsenovu nejednakost 5.8, str. 50 iz [5] koja glasi:

$$s^2\le 4R^2+4Rr+3r^2. \tag{15}$$

Zbog

$$4R^2+4Rr+3r^2\le 6R^2+2Rr-r^2, \tag{16}$$

što je ekvivalentno

$$2R^2 - 2Rr - 4r^2 \geq 0 \qquad /:2$$
$$R^2 - Rr - 2r^2 \geq 0$$
$$(R-2r)(R+r) \geq 0,$$

što je točno zbog Eulerove nejednakosti $R \geq 2r$.

Sada iz nejednakosti (15) i (16) slijedi da je nejednakost (14) točna pa je točna i nejednakost (13). Konačno, iz jednakosti (12) i nejednakosti (13) slijedi da je i nejednakost (9) točna. Dakle, vrijedi sljedeća dvojna nejednakost:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 - \frac{r}{R} \leq \frac{3R}{4r}.$$

Literatura:

1. Arslanagić, Š., Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., Matematička čitanka, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
3. Arslanagić, Š., Matematička čitanka 1, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
4. Arslanagić, Š., Zubović, D., Nesbitova nejednakost – još tri dokaza i jedna primena, Tangenta (Beograd), Br.101/1 (2020. – 2021.), 1-5.
5. Bottema, O., Djordjević, R.Ž., Janić, R.R., Mitrinović, D.S., Vasić, P.M., Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Natherlands), 1969.
6. Kadelburg, Z., Đukić, D., Lukić, M., Matić, I., Nejednakosti, Materijali za mlade matematičare, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.
7. Nesbitt, A.M., Problem 15114, Educational Times 3(2) (1903.), 37-38.