Neke primjene nejednakosti između sredina

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

Nejednakosti između sredina za dva ili više pozitivnih brojeva predstavlja značajno područje matematike koja ima veliku primjenu u svim matematičkim disciplinama. Za dva pozitivna broja x i y te nejednakosti glase:

$$\min\{a,b\} \le H(x,y) \le G(x,y) \le A(x,y) \le K(x,y) \le \max\{a,b\}, \tag{1}$$

gdje je

$$H(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

harmonijska sredina,

$$G(x,y) = \sqrt{xy}$$

geometrijska sredina,

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

aritmetička sredina, i

$$K(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

kvadratna sredina.

Jednakost u nejednakosti (1) vrijedi samo u slučaju $x = y$.

Za n pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijede nejednakosti:

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH
[2]Daniela Zubović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BIH

$$\min\{x_1,x_2,...,x_n\} \le \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}$$

$$\le \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}} \le \max\{x_1,x_2,...,x_n\}. \qquad (1')$$

Sada ćemo koristeći gornje nejednakosti dokazati nekoliko nejednakosti.

Nejednakost 1. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}, \qquad (2)$$

za $a,b>0$.

Dokaz: Dana nejednakost ekvivalentna je s nejednakošću

$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \ge 2\sqrt{ab}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\ . \qquad (3)$$

Iz (1) imamo $A(a,b)\ge G(a,b)$ i $K(a,b)\ge A(a,b)$, tj.

$$\frac{a+b}{2}\ge 2\sqrt{ab}$$

i

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2}}\ge\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\ .$$

Nakon množenja ovih nejednakosti dobivamo nejednakost (3). Ovim je nejednakost (2) dokazana. Vrijedi jednakost u (2) ako i samo ako je $a = b$.

Nejednakost 2. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}>\frac{2}{x}, \qquad (4)$$

za $x>1$.

Dokaz: Na osnovi nejednakosti $A(x,y)\ge H(x,y)$ slijedi da je

$$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{2}>\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{x-1}}+\frac{1}{\frac{1}{x+1}}}.$$

To je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}>\frac{4}{x+1+x-1},$$

što je dalje ekvivalentno sa

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}>\frac{2}{x},$$

čime je tvrdnja dokazana.

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer je $\frac{1}{x-1}\neq\frac{1}{x+1}$.

Nejednakost 3. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{4}, \tag{5}$$

za $a,b>0$ i $a+b=1$.

Dokaz: Iz nejednakosti (1), tj. $A(a,b)\geq G(a,b)$ imamo da je

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

a odavde iz danog uvjeta $a+b=1$, gdje su $a,b>0$, slijedi da je

$$\frac{1}{2}\geq\sqrt{ab},$$

odnosno, nakon kvadriranja,

$$\frac{1}{4}\geq ab$$

ili

$$\frac{1}{ab}\geq 4. \tag{6}$$

Sada imamo iz nejednakosti (1), tj. $K(x,y)\geq A(x,y)$ i (6):

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\geq\left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+\dfrac{1}{ab}}{2}\right)^2\geq\left(\frac{1+4}{2}\right)^2=\frac{25}{4},$$

odnosno

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{4},$$

čime je tvrdnja dokazana.

Vrijedi jednakost u (5) ako i samo ako je $a=b=\frac{1}{2}$.

Nejednakost 4. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c), \tag{7}$$

za $a,b,c>0$.

Dokaz: Imamo iz (1), tj. $A(x,y)\geq G(x,y)$:

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geq\sqrt{a^4b^4},$$

ili, ekvivalentno,

$$a^4+b^4\geq 2a^2b^2,$$

te analogno

$$b^4+c^4\geq 2b^2c^2$$

i

$$c^4+a^4\geq 2c^2a^2.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo da je

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right),$$

odnosno

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2. \tag{8}$$

Iz iste nejednakosti (1), tj. $A(x,y)\geq G(x,y)$, slijedi da je

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2\cdot b^2c^2},$$

odnosno

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c\,,$$

te analogno

$$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2abc^2$$

i

$$c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2a^2bc.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo da je

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \geq 2\left(a^2bc + ab^2c + abc^2\right),$$

tj.

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

ili

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc\left(a+b+c\right). \tag{9}$$

Sada iz (8) i (9) dobivamo da je

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\left(a+b+c\right),$$

što je trebalo i dokazati.

Vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Očigledno vrijedi nejednakost (7) ako je $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Nejednakost 5. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2, \tag{10}$$

za $a,b,c > 0$.

Dokaz 1. Iz nejednakosti (1), tj. $G\left(x,y\right) \geq H\left(x,y\right)$, slijedi da je

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1} \geq \frac{2}{1+\dfrac{b+c}{a}} = \frac{2a}{a+b+c}\,,$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}\cdot 1} \geq \frac{2}{1+\dfrac{a+c}{b}} = \frac{2b}{a+b+c}\,,$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot 1} \geq \frac{2}{1+\dfrac{a+b}{c}} = \frac{2c}{a+b+c}\,,$$

a odavde nakon zbrajanja ovih nejednakosti slijedi da je

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c},$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2\,.$$

Jednakost vrijedi ako je $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=1$, odnosno

$$a=b+c,\ b=a+c,\ c=a+b,$$

a odavde

$$a+b+c=2(a+b+c),$$

što nije moguće. Dakle, vrijedi stroga jednakost, tj. (10), čime je tvrdnja dokazana.

Dokaz 2. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a\geq b\geq c$, tj., ekvivalentno, $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$. Onda imamo da je

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\\&=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}-\sqrt{\frac{b+c}{a}}\\&\geq 2+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}-\sqrt{\frac{b+c}{2}}\,,\end{aligned}$$

jer je zbog (1), tj. $A(x,y)\geq G(x,y)$:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)\geq\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b+c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}}\,,$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\geq 2\,.$$

Sada, zbog $a\geq b\geq c$, slijedi da je $\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\sqrt{\frac{c}{2a}}$, te $\frac{c}{a}\leq\frac{c}{b}$. Imamo da je

$$S\geq 2+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{2a}}-\sqrt{\frac{b+c}{a}}=2+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{1+\frac{c}{a}}}+\sqrt{\frac{c}{2}}-\sqrt{b+c}\right)$$

$$\geq 2+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{1+\frac{c}{b}}}+\sqrt{\frac{c}{2}}-\sqrt{b+c}\right)=2+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a(b+c)}}\left(\sqrt{b+c}-\sqrt{2c}\right)\geq 2,$$

odnosno

$$S\geq 2\,.$$

Jednakost vrijedi ako je $a=b+c,\ b=a=c$, što nije moguće. Dakle, vrijedi stroga nejednakost:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2\,,$$

što je trebalo i dokazati.

Nejednakost 6. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\;, \tag{11}$$

gdje su a,b,c duljine stranica nekog trokuta ΔABC.

Dokaz: Na osnovi nejednakosti (1), tj. $A(x,y)\geq H(x,y)$, imamo da je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\right)\geq\frac{2}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{b+c-a}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+c-b}}}\;,$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\geq\frac{2}{c}$$

te analogno

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{b}$$

i

$$\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{a}\,.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo da je

$$2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (11) ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut.

Nejednakost 7. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \tag{12}$$

za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Uzet ćemo $(n+1)$ brojeva:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right),\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n},1$$

i koristiti nejednakost (1'), tj. $A \geq G$ za $(n+1)$ pozitivnih brojeva:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1}$$

ili

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},$$

odnosno, potenciranjem sa $n+1$,

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

odnosno

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer je $1+\frac{1}{n} \neq 1$, tj. vrijedi nejednakost (12):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer Verlag New York, Inc. ,1998.
3. Pečarić, J., *Nejednakosti*, Mala matematička biblioteka, 6, Hrvatsko matematičko društvo, Element, Zagreb, 1996.