Jedan zanimljiv dokaz Eulerove relacije za paralelogram

AMRA DURAKOVIĆ[1]

U ovom ćemo radu dokazati Eulerovu relaciju za paralelogram koristeći potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Teorem 1. (Eulerov teorem)**.** Neka je $ABCD$ četverokut, te neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$, $|AC| = e$ i $|BD| = f$. Tada vrijedi jednakost

$$4|EF| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2,$$

gdje su E i F polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Korolar 1. (*Eulerova relacija za paralelogram*). Neka je $ABCD$ paralelogram. Tada vrijedi jednakost

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2),$$

tj. zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak je dvostrukom zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma.

Za dokaz Eulerove relacije za paralelogram koristit ćemo potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Definicija 1. Neka je zadana kružnica $k(S, r)$ i točka A u ravnini. Skalarni produkt vektora $p(A,k) = \overrightarrow{AT_1} \cdot \overrightarrow{AT_2}$, gdje su T_1 i T_2 sjecišta kružnice k sa proizvoljnim pravcem koji prolazi točkom A, zove se potencija točke A s obzirom na kružnicu k. Primijetimo da je

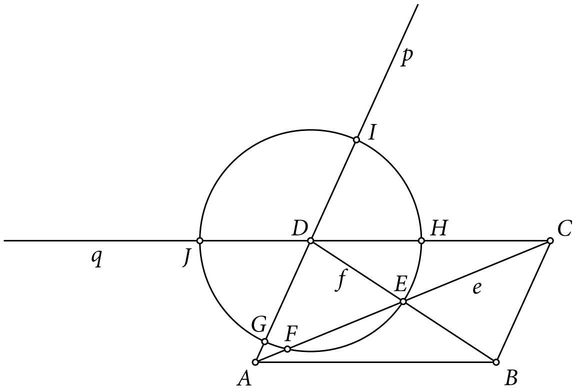
- $p = -|AT_1| \cdot |AT_2| < 0$, ako točka A leži unutar kružnice;
- $p = 0$, ako točka A leži na kružnici;
- $p = |AT_1| \cdot |AT_2| > 0$, ako točka A leži izvan kružnice.

---

[1]Amra Duraković, Pedagoški fakultet, Univerzitet u Bihaću, BIH

Dokaz (*Eulerova relacija za paralelogram*):

Promatrajmo paralelogram $ABCD$. Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ i $|AC| = e$ i $|BD| = f$ dijagonale paralelograma koje se sijeku u točki E. Oko točke D opišimo kružnicu k polumjera $|DE| = \frac{f}{2}$. Kružnica k siječe dijagonalu e u točki F, stranice $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ u točkama G i H redom, te polupravce Dp i Dq u točkama I i J redom (Slika 1).



Slika 1.

Točka A je izvan kružnice k pa prema *Definiciji 1* slijedi

$$p(A,k) = |AF| \cdot |AE| \qquad (1)$$

i

$$p(A,k) = |AG| \cdot |AI| \qquad (2)$$

Dakle, iz (1) i (2) slijedi

$$|AF| \cdot |AE| = |AG| \cdot |AI| \qquad (3)$$

Neka je $|AF| = x$. Kako je $|AE| = \frac{e}{2}$, $|AG| = b - \frac{f}{2}$ i $|AI| = b + \frac{f}{2}$, iz (3) dalje slijedi

$$x \cdot \frac{e}{2} = \left(b - \frac{f}{2}\right)\left(b + \frac{f}{2}\right)$$

$$x \cdot \frac{e}{2} = b^2 - \frac{f^2}{4}. \qquad (4)$$

Točka C je izvan kružnice k pa prema *Definiciji 1* slijedi

$$p(C,k) = |CE| \cdot |CF| \qquad (5)$$

i

$$p(C,k)=|CH|\cdot|CJ|\,. \quad (6)$$

Iz (5) i (6) je

$$|CE|\cdot|CF|=|CH|\cdot|CJ|\,. \quad (7)$$

Kako je $|CE|=\frac{e}{2}$, $|CF|=e-x$, $|CH|=a-\frac{f}{2}$ i $|CJ|=a+\frac{f}{2}$, iz (7) dalje slijedi

$$\frac{e}{2}\cdot(e-x)=\left(a-\frac{f}{2}\right)\left(a+\frac{f}{2}\right)$$

$$\frac{e^2}{2}-x\cdot\frac{e}{2}=a^2-\frac{f^2}{4}\,. \quad (8)$$

Iz (4) i (8) imamo

$$\frac{e^2}{2}-\left(b^2-\frac{f^2}{4}\right)=a^2-\frac{f^2}{4}$$

$$\frac{e^2}{2}-b^2+\frac{f^2}{4}=a^2-\frac{f^2}{4}$$

$$\frac{e^2}{2}+\frac{f^2}{2}=a^2+b^2$$

$$e^2+f^2=2(a^2+b^2)\,,$$

što je i trebalo dokazati.

Važno je napomenuti da centar kružnice k može biti u bilo kojem vrhu paralelograma, a za polumjer kružnice može se uzeti i $\frac{e}{2}$.

Literatura:

1. Mitrović M., Ognjanović S., Veljković M., Petković LJ., Lazarević N., Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1998.
2. Žužul M., Opća svojstva konveksnog četverokuta, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno–matematički fakultet, 2019.