Osječki matematički list 21 (2021), 123–136

Ekvipotentnost skupova: kako smjestiti beskonačno mnogo osoba u već pun Hilbertov hotel

Dragana Jankov Maširević*, Tihana Vuković†

Sažetak

U ovom članku promatramo skupove i njihovu prebrojivost, kroz naivnu teoriju skupova. Prvi, glavni dio rada bavi se jednakobrojnim, odnosno ekvipotentnim skupovima. Nakon toga, bavimo se najbitnijim pojmovima vezanim uz konačne skupove te uz prebrojive i neprebrojive skupove.

Ključne riječi: *skup, ekvipotentnost, Hilbertov hotel, konačan skup, prebrojiv skup, neprebrojiv skup*

Equipotence of sets: how to accommodate an infinite number of people in the Hilbert's hotel which is already full

Abstract

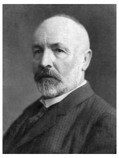
In this paper we observe sets and their countability through naive set theory. First and the main part of the paper deals with equipotent sets. After that, we deal with the most important concepts related to finite sets as well as countable and uncountable sets.

Keywords: *set, equipotency, Hilbert's hotel, finite set, countable set, uncountable set*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: djankov@mathos.hr
†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: tvukovic@mathos.hr

1 Naivna teorija skupova

Još od najranijeg djetinjstva imamo potrebu predmete koji imaju neko zajedničko svojstvo svrstavati u skupine i time ih razlikovati jedne od drugih. Prirodno je i zapitati se koliko ima takvih predmeta u svakoj pojedinoj skupini te postoje li dvije skupine s istim brojem predmeta u njima. Tako smo, na samim počecima u osnovnoj školi, brojali imamo li jednako mnogo krušaka i jabuka, da bismo kasnije tijekom školovanja bili u mogućnosti odlučiti jesu li $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednakobrojni skupovi. U nastavku se bavimo upravo time – promatramo različite skupove i želimo vidjeti u kakvoj su vezi jedan s drugim.



Georg Cantor (1845.–1918.), njemački matematičar

Ernst Zermelo (1871.–1953.), njemački matematičar

Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891.–1965.), njemački matematičar

Teorija skupova, jedna od fundamentalnih matematičkih disciplina, za glavnu svrhu upravo ima proučavanje skupova, pri čemu je to pojam koji se ne definira, nego se smatra da već postoji određena intuicija pojedinca o njemu te se ponekad kaže da je *skup kolekcija objekata koji zajedno čine cjelinu*. Takav pristup, odnosno *naivnu teoriju skupova* utemeljio je Cantor svojim otkrićem da postoje *beskonačnosti različite veličine* [1, str. 169]. Cantor je, kao *otac teorije skupova,* izgradio veliki dio ove teorije, koju je kasnije, zbog pojave određenih paradoksa, trebalo dodatno izgraditi uvođenjem aksioma, za koje su zaslužni Zermelo i Fraenkel (tzv. Zermelo–Fraenkelov sustav aksioma).

2 Ekvipotentnost skupova

Od kada smo se počeli baviti *prebrojavanjem* javljaju se pitanja *možemo li dvije skupine dovesti u vezu po jednakobrojnosti elemenata?* te *kako postupiti u situacijama kada ne znamo prebrojati koliko neka cjelina ima članova, jer je taj broj beskonačan?*. Interesantna priča koja potiče na razmišljanje o pojmu prebrojivosti vezana je uz *Hilbertov hotel* (vidi [15, str. 21]).

Primjer 2.1 (Hilbertov hotel). *Zamislimo da negdje daleko u Svemiru postoji hotel s beskonačno mnogo soba koje su numerirane brojevima* $1, 2, 3, \ldots$ *No, zamislimo da su sve sobe zauzete gostima, i dolazi još jedan putnik koji želi sobu. Što će portir napraviti s njim? Jednostavno, zamolit će gosta iz sobe* 1 *da se premjesti u sobu* 2*, gosta iz sobe* 2 *u sobu* 3*, itd. Novopridošlog gosta će tada smjestiti u sobu broj* 1*.* (*Nemojte si postavljati pitanje koliko će to premještanje trajati!*) *Pokušajte sami odgovoriti što će portir napraviti kada stigne tisuću novih gostiju, a sve sobe hotela su pune.*

Zamislimo nadalje da se već spomenuti portir našao u sljedećem problemu: u Svemiru postoji još jedan takav hotel s beskonačno mnogo soba čije su sve sobe *popunjene gostima. Jednoga dana glavna komisija za graditeljstvo u svemirskim prostranstvima otkrila je da taj drugi hotel nema građevinsku dozvolu. Istog trena taj drugi hotel je morao biti zatvoren i svi gosti (beskonačno mnogo njih!) stali su pred vrata prvog hotela (čije su sve sobe pune). No, portir se brzo snašao. Gosta iz sobe* 1 *svojeg hotela premjestio je u sobu* 2, *gosta iz sobe* 2 *u sobu* 4, *gosta iz sobe* 3 *u sobu* 6, *itd. Tako je ispraznio sve sobe s neparnim brojevima te je u njih smjestio goste iz zatvorenog hotela.*

Promotrimo još jedan problem koji bi portiru mogao zadati glavobolje. Zamislimo da u Svemiru postoji beskonačno mnogo hotela poput ona ranija dva, tj. s beskonačno mnogo soba, i sve su sobe popunjene gostima. Svemirska građevinska komisija iz raznih je razloga zatvorila sve hotele osim jednog. Tada su svi gosti (po beskonačno mnogo njih iz svakog od beskonačno mnogo zatvorenih hotela) došli pred vrata tog jednog hotela koji je još imao dozvolu za rad. Snalažljivi portir sada nije znao rješenje ove, na prvi pogled, bezizlazne situacije. Trebao je pomoć matematičara.

Može li se uopće ova ogromna grupa novopridošlih gostiju smjestiti u (puni!) hotel? Možete li pomoći portiru? ◀

Kako bismo pomogli portiru riješiti problem, u nastavku ćemo se upoznati s *ekvipotentnim skupovima*, za što nam je potreban pojam bijektivne funkcije.

Naime, još su u dalekoj prošlosti ljudi imali potrebu ustanoviti jesu li svi predmeti na broju, iako još nisu postojali nazivi niti znakovi za brojeve, o čemu svjedoče takozvani *rovaši* – drveni štapovi ili kosti na koje su urezani zarezi [10, str. 6]. Pri tome, svakom zarezu odgovara jedan predmet i svakom predmetu odgovara jedan zarez, odnosno skupovi predmeta i zareza su *jednakobrojni*. Na taj je način definirana funkcija sa skupa zareza na skup predmeta koja se naziva *bijekcija*; preciznije, to je *funkcija jedan na jedan, odnosno svakom elementu jednog skupa pridružen je jedan i samo jedan element drugog skupa, i obratno* (preciznije o bijekcijama čitatelj može vidjeti u [7]).

Sada možemo definirati pojam ekvipotentnih skupova uspostavljanjem posebne vrste preslikavanja između njih.

Definicija 2.1. Kažemo da je skup A *ekvipotentan* skupu B ako postoji barem jedna bijekcija $f\colon A \to B$. Tada pišemo $A \sim B$.

Inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon B \to A$ također je bijekcija te vrijedi $B \sim A$. Lako je uočiti da je ekvipotentnost skupova relacija ekvivalencije, odnosno da vrijede sljedeća svojstva:

- *refleksivnost*: $A \sim A$, za svaki skup A, jer je identiteta $id_A\colon A \to A$ bijekcija

- *simetričnost*: $A \sim B \implies B \sim A$, što slijedi iz gornjeg razmatranja
- *tranzitivnost*: $A \sim B$ i $B \sim C \implies A \sim C$, jer je kompozicija bijekcija ponovno bijekcija (vidi [8, poglavlje Algebra skupova, str. 3]).

Klasa ekvivalencije naziva se *kardinalni broj*, što je pojam koji se pojavio iz potrebe i želje da *brojnost* skupova zapišemo kvantitativno.

Za ekvipotentne skupove kaže se još da su *jednakobrojni* ili da imaju *isti kardinalni broj*.

Kardinalni broj skupa A označava se s $k(A)$.

Primjer 2.2. *Navedimo nekoliko primjera ekvipotentnih skupova:*

a) *trivijalan primjer dvaju ekvipotentnih skupova je* $\{0, 1, 2\} \sim \{\Box, \triangle, \diamond\}$; *naime, dva konačna skupa su ekvipotentna ako i samo ako imaju jednak broj elemenata* [13, str. 54] (*preciznu definiciju konačnog skupa navodimo u sljedećem poglavlju*);

b) *skup svih prirodnih brojeva ekvipotentan je skupu svih parnih prirodnih brojeva, tj.* $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, \ldots\}$, *jer postoji bijekcija* $f\colon \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, \ldots\}$, *dana s* $f(n) = 2n$; *očito je i* $\mathbb{N} \sim \{1, 3, 5, \ldots\}$ (*čitatelju ostavljamo za razmisliti o primjeru odgovarajuće bijekcije*);

c) *skup prirodnih brojeva ekvipotentan je skupu cijelih brojeva, odnosno* $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, *pri čemu je jedna bijekcija* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *zadana s*

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \end{cases}$$

što možemo i ilustrirati kao:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots \end{array}$$

d) *bilo koja dva intervala realnih brojeva su ekvipotentna, tj.* $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$. *Jedna bijekcija* $f\colon \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ *zadana je formulom*

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c;$$

e) *skup realnih brojeva ekvipotentan je bilo kojem intervalu realnih brojeva, tj.* $\mathbb{R} \sim \langle a, b\rangle$.
Definirajmo funkciju $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

koja je kompozicija dviju bijekcija: jedne koja preslikava $\langle a, b\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ *te druge koja potom preslika* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$. *Uočimo kako upravo imamo interval* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, *jer je tangens na tom intervalu bijektivna funkcija.*

$$\begin{tikzcd}
\langle a, b\rangle \arrow[r, "x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-a)"] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)"'] & \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \arrow[r, "\mathrm{tg}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Slika 1. Ilustrativni prikaz preslikavanja f iz primjera e)

Dokaz bijektivnosti preslikavanja definiranih u primjerima c) i e) čitatelj može pogledati u [16]; specijalno, iz primjera e), za $a = 0$, $b = 1$, *dobivamo* $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1\rangle$, *što će nam biti od velike pomoći pri dokazivanju neprebrojivosti skupa realnih brojeva; također, primjer d) može se poopćiti na [9, str. 18, Example 6]*

$$[a, b] \sim \langle a, b] \sim [a, b\rangle \sim \langle a, b\rangle, \ \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b. \qquad \blacktriangleleft$$

Naposljetku, kako bismo pomogli portiru Hilbertovog hotela da smjesti beskonačno mnogo novih gostiju iz beskonačno mnogo ostalih hotela, potrebno je znati *koliko je velik skup prostih brojeva*. Još su stari Grci znali odgovor na to pitanje te u 9. knjizi Euklidovih Elemenata (3. st. pr. Kr.) nalazimo iskaz i dokaz tvrdnje o brojnosti toga skupa [4, str. 42].

Teorem 2.1. *Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno onome što treba dokazati, odnosno pretpostavimo da je skup prostih brojeva konačan. Na intuitivnoj razini, konačne skupove možemo zamišljati kao skupove s konačnim brojem elemenata, u što ćemo se uvjeriti nešto kasnije, te neka su

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_r$$

svi prosti brojevi.

Promotrimo li broj $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$, lako je uočiti da je on veći od 1 te nije djeljiv niti s jednim od brojeva $p_1, \ldots, p_r$, što povlači da on nije prost te prema Osnovnom teoremu aritmetike[1] mora biti djeljiv nekim prostim

[1]Prema [3], *Osnovni teorem aritmetike* tvrdi da je svaki prirodan broj veći od 1 jednak umnošku potencija prostih brojeva, i ta je faktorizacija jedinstvena do na poredak faktora.

brojem, odnosno postoji prost broj q, $q \neq p_1, \ldots, p_r$, koji dijeli n. Dakle, postoji prost broj q koji ne pripada skupu $\{p_1, \ldots, p_r\}$, što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom te zaključujemo da je skup prostih brojeva zaista beskonačan. □

Prethodni je teorem tijekom vremena dokazan na različite načine, koji su zasnovani na tvrdnjama iz različitih matematičkih grana, a za njih su zaslužni poznati matematičari poput Eulera, Goldbacha, Furstenberga, Kummera [4, str. 42]; također, jedan od drugačijih pristupa dokazivanju, koji uključuje metode matematičke analize, čitatelj može pogledati u [11, str. 12, teorem 1.4.6.].

Sada smo spremni pomoći portiru!

Primjer 2.3 (Hilbertov hotel, rješenje). *Kako bismo riješili postavljeni problem, goste možemo povezati s potencijama prostih brojeva. Ponovno, zbog Osnovnog teorema aritmetike, svakom pojedinom gostu će biti dodijeljena jedinstvena potencija prostog broja. Najprije moramo premjestiti goste koji su već u hotelu (beskonačno mnogo njih) u druge sobe. Krećemo od prostog broja* 2*. Prvo, gosta iz sobe* 1 *premjestimo u sobu* $2^1 = 2$*, zatim gosta iz sobe* 2 *premjestimo u sobu* $2^2 = 4$*, gosta iz sobe* 3 *premjestimo u sobu* $2^3 = 8$ *itd. Općenito, gosta iz sobe* n *premjestimo u sobu* 2^n*.*

Sada dolaze na red gosti iz prvog od beskonačno mnogo zatvorenih hotela. Njih smjestimo tako da uzmemo sljedeći prost broj (što je 3*) te prvog gosta smjestimo u sobu* $3^1 = 3$*, zatim drugog gosta smjestimo u sobu* $3^2 = 9$ *itd. Općenito,* n*-tog gosta iz prvog zatvorenog hotela smjestimo u sobu* 3^n*. Za goste iz drugog zatvorenog hotela uzimamo prost broj* 5 *i njegovim gostima pridružujemo potencije broja* 5*. Ovaj postupak ponavljamo za svaki idući hotel i idući prost broj. Na ovaj način uspjeli bismo smjestiti sve goste u hotel te bismo čak imali i praznih soba jer primjerice sobe* 6 *i* 10 *nisu potencije niti jednog prostog broja.* ◀

Hilbertov hotel jedan je od najpoznatijih neintuitivnih primjera vezanih uz pojam beskonačnosti.

2.1 Riječ-dvije o prebrojivosti

Kako bismo pobliže objasnili pojmove *konačnog* i *beskonačnog* skupa, u nastavku ćemo navesti neke osnovne tvrdnje koje ih opisuju, dok detaljnije o tome zainteresirani čitatelj može pronaći, na primjer, u [5, 6, 9, 13, 15, 16].

Definicija 2.2. Kažemo da je skup A *konačan* ako je prazan ili ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je skup A ekvipotentan skupu $\{1, \ldots, n\}$.

Dakle, u slučaju konačnog skupa, broj njegovih elemenata predstavlja njegovu kardinalnost; odnosno, u tom se slučaju kardinalni broj konačnog skupa A naziva još i *broj elemenata od* A i označavamo ga s $k(A) = n$ za $A \sim \{1, \dots, n\}$, odnosno s $k(A) = 0$ za $A = \emptyset$ [5, str. 13].

Iz definicije neposredno slijedi da ako imamo skupove A i B za koje vrijedi $A \sim B$ i A je konačan skup, onda i B mora biti konačan.

Od bitnih karakteristika konačnih skupova zanimljivo je istaknuti intuitivno jasne tvrdnje da je *svaki podskup konačnog skupa konačan skup* te da *konačan skup ne može biti ekvipotentan nekom svom pravom podskupu*.

Posljednja tvrdnja povlači da skup prirodnih brojeva nije konačan, što lako vidimo konstrukcijom bijekcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $f(n) := n + 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Sljedeća, jednostavna definicija upoznaje nas s pojmom beskonačnosti. Također, u nastavku ćemo se pobliže upoznati i s kardinalnošću beskonačnih skupova koju ne možemo tako lako opisati.

Definicija 2.3. Za skup kažemo da je *beskonačan* ako nije konačan.

Direktno iz prethodne definicije slijedi da je $\mathbb{N}$ primjer beskonačnog skupa.

Teorem 2.2. *Neka je A skup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

$a)$ *skup A je beskonačan,*

$b)$ *postoji injekcija sa $\mathbb{N}$ u A,*

$c)$ *postoji injekcija sa A u A koja nije surjekcija,*

$d)$ *skup A je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu.*

Definicija 2.4. Skup A je *prebrojivo beskonačan* ako postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to A$. Skup je *prebrojiv* ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Dakle, skupovi koji su ekvipotentni skupu $\mathbb{N}$ nazivaju se *prebrojivo beskonačni*. Njihov kardinalni broj označava se s $\aleph_0$. Ukoliko označimo $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ..., prebrojivu beskonačnost skupa možemo karakterizirati i ovako:

Skup A je prebrojivo beskonačan ako i samo ako njegove članove možemo poredati u niz međusobno različitih članova, te je tada

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots : a_n \neq a_m \text{ za } n \neq m\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}, a_n \neq a_m \text{ za } n \neq m\}.$$

Primjer 2.4. *Navedimo nekoliko primjera prebrojivo beskonačnih skupova:*

- $\mathbb{N}$ *je prebrojivo beskonačan skup, jer je* $id\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(x) = x$ *bijektivno preslikavanje;*

- *skupovi parnih i neparnih prirodnih brojeva* $\{2, 4, 6, \ldots\}$, *odnosno* $\{1, 3, 5, \ldots\}$ *su prebrojivo beskonačni* (*vidi primjer 2.2 b*)*;*

- $\mathbb{Z}$ *je prebrojivo beskonačan, jer postoji bijekcija sa* $\mathbb{Z}$ *na* $\mathbb{N}$ *navedena u primjeru 2.2 c*). ◀

Do sada smo se uvjerili u prebrojivu beskonačnost skupova prirodnih i cijelih brojeva, no prirodno je zapitati se može li se ista tvrdnja prenijeti i na skup racionalnih te čak realnih brojeva i njihove Kartezijeve produkte. Prije nego odgovorimo na ta pitanja, najprije ćemo navesti nekoliko karakterizacija prebrojivih skupova koje će nam u tome pomoći.

Teorem 2.3. *Neka je* $A \neq \emptyset$*. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) *A je prebrojiv,*

b) *postoji surjekcija* $f\colon \mathbb{N} \to A$*,*

c) *postoji injekcija* $g\colon A \to \mathbb{N}$.

Dokaz. Vidi [14, slide 68, teorem 9.5].

Iz prethodnog teorema zaključujemo:

Propozicija 2.1. *Svaki podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.*

Dokaz. Neka je A prebrojiv skup te $B \subseteq A$. Prema prethodnom teoremu znamo da postoji injekcija $f\colon A \to \mathbb{N}$ te ukoliko pogledamo restrikciju $f|_B$, znamo da je ona injekcija sa skupa B u skup $\mathbb{N}$, iz čega, ponovno prema prethodnom teoremu, zaključujemo da je skup B prebrojiv, odnosno da je on konačan ili prebrojivo beskonačan. □

U sljedećoj tvrdnji uvjerit ćemo se i da je skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojivo beskonačan; dokaz provodimo uz pomoć dijagrama (vidi [6, str. 10, propozicija 1.7]), dok se formalniji dokaz može pronaći u [12, str. 94, teorem 3.3.7].

Propozicija 2.2. *Kartezijev produkt* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je prebrojivo beskonačan.*

Dokaz. Ako iz sljedećeg dijagrama

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & \longrightarrow & (1,3) & & (1,4) & \longrightarrow & (1,5) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & (4,5) & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & & \\
(5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5) & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

uređene parove, počevši od para $(1,1)$ pa nadalje, redom izlistavamo (prebrajamo) u smjeru prikazanom strelicama:

$$(1,1),(2,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(1,5),\ldots$$

možemo uočiti da smo članove skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ poredali u niz međusobno različitih članova, što znači da je taj skup prebrojivo beskonačan. □

Ukoliko imamo prebrojivo mnogo prebrojivih skupova, može nas zanimati što možemo zaključiti o njihovoj uniji i njihovom Kartezijevom produktu. Više o tome navodimo u nastavku.

Teorem 2.4.

a) *Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

b) *Konačan Kartezijev produkt prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Dokaz. Vidi [14, slide 76, teorem 9.9] te [14, slide 77, teorem 9.10].

Korolar 2.1. *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Q}_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}.$$

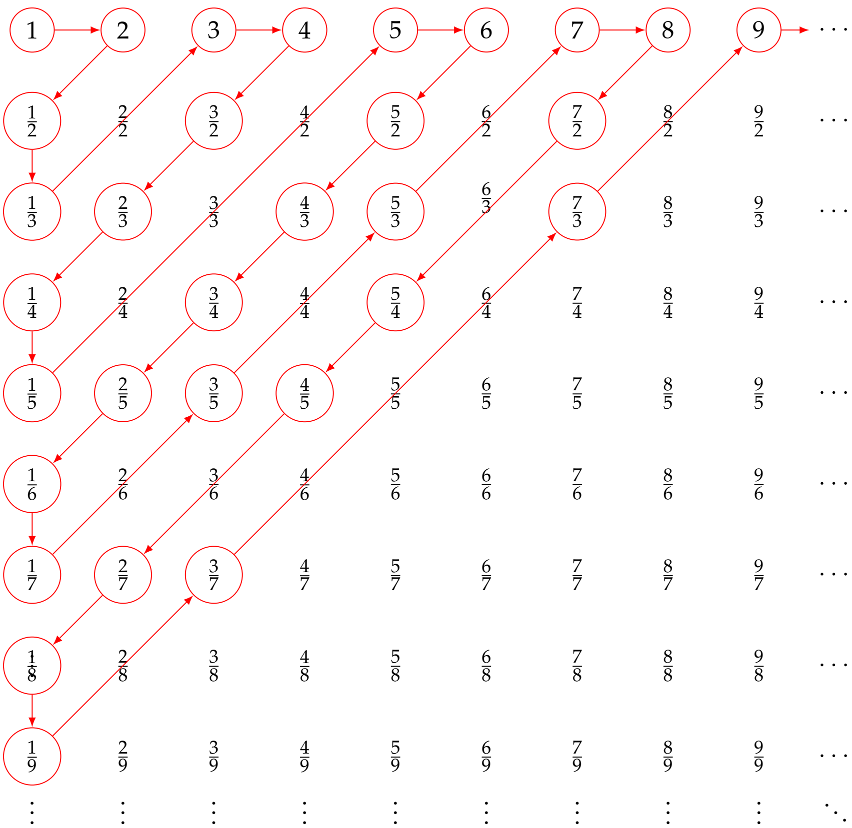
Kako su svi skupovi $\mathbb{Q}_n$, $n \in \mathbb{N}$, prebrojivi (zbog prebrojivosti skupa $\mathbb{Z}$), skup $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$ je prebrojiv, kao prebrojiva unija prebrojivih skupova, prema teoremu 2.4. □

Dokaz prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ možemo i vizualizirati (vidi [14, slide 67]). Ako s $\mathbb{Q}^-$ označimo skup negativnih racionalnih brojeva te s $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva, tada je

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+.$$

Kako je preslikavanje $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$ definirano s $f(q) = -q$ očito bijekcija, dovoljno je, ponovno zbog teorema 2.4, pokazati da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv skup.

Kako bismo pokazali da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv, nađimo bijekciju $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$.



Slika 2. Prikaz Cantorovog prebrojavanja skupa $\mathbb{Q}$

Grafički prikazano, napravimo tablicu kao na slici 2, u kojoj u prvi red bilježimo razlomke s nazivnikom 1, u drugom redu razlomke s nazivnikom 2 i tako dalje. Nižući redom sve brojeve na način prikazan crvenim strelicama dolazimo do zaključka da je skup $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv. Primijetimo da neke razlomke, poput $\frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{2}{4}$ i druge, nismo uključili jer oni predstavljaju već *potrošene* racionalne brojeve. $\square$

Na osnovi teorema 2.4 mogli bi pomisliti da je i Kartezijev produkt beskonačno prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup. No, idući primjer ilustrira kako već u slučaju Kartezijevog produkta beskonačno prebrojivo mnogo dvočlanih skupova nećemo imati prebrojiv skup.

Primjer 2.5. *Skup nizova nula i jedinica* $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ *nije prebrojiv skup.*

Rješenje. Iz teorema 2.3 znamo da ako je skup prebrojiv, tada postoji surjekcija sa skupa prirodnih brojeva na taj skup. Prema kontrapoziciji te tvrdnje, kako bismo pokazali da skup $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nije prebrojiv, dovoljno je uvjeriti se u nepostojanje surjekcije $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Neka je

$$f(n) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_n}, \dots), \quad x_{n_i} \in \{0,1\}, \quad i \in \mathbb{N}$$

te pokažimo da f ne može biti surjekcija. U tu svrhu, odaberimo niz $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ takav da je

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), \quad y_i \in \{0,1\}, \quad y_n = \begin{cases} 0, & x_{n_n} = 1 \\ 1, & x_{n_n} = 0. \end{cases}$$

Iz prethodne konstrukcije od y lako vidimo da će za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijediti da je $f(n) \neq y$. Dakle, funkcija f nije surjekcija pa skup $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nije prebrojiv. ◀

Iz prethodnog je primjera lako uočiti da postoje beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi.

Definicija 2.5. Skup koji nije prebrojiv naziva se *neprebrojiv skup*.

Postupak proveden u primjeru 2.5 naziva se *Cantorov dijagonalni postupak*. Do sada smo se uvjerili u prebrojivost nekih bitnih skupova, a u nastavku ćemo dokazati teorem o neprebrojivosti skupa realnih brojeva, pomoću poopćenja Cantorovog dijagonalnog postupka.

Teorem 2.5. *Skup* $\mathbb{R}$ *je neprebrojiv.*

Dokaz. U primjeru 2.2 pokazali smo da je $\mathbb{R} \sim \langle 0,1 \rangle$, što povlači da je dovoljno pokazati da je $\langle 0,1 \rangle$ neprebrojiv skup. Prema teoremu 2.2, skup $\mathbb{R}$ je beskonačan jer je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\langle 0,1 \rangle$ prebrojivo beskonačan, pa njegove članove možemo poredati u niz, odnosno

$$\langle 0,1 \rangle = \{a_0, a_1, a_2, \dots\},$$

pri čemu svaki $a_i \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis koji sadrži beskonačno mnogo decimala različitih od nule:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \ldots \\ a_1 &= 0.a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \ldots \\ a_2 &= 0.a_{20}\, a_{21}\, a_{22} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Primjera radi, pišemo 0.73004999... umjesto 0.73005. Ukoliko za svaki prirodan broj k definiramo

$$b_k = \begin{cases} a_{kk} + 1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \\ 1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{8, 9\}, \end{cases}$$

možemo definirati $b = 0.b_0\, b_1\, b_2 \ldots$. Jasno je da b nikada ne može postići vrijednosti 0 i 1, pa je $b \in \langle 0, 1 \rangle$. Također, $b \neq a_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, jer se međusobno razlikuju barem na k-tom decimalnom mjestu i time smo došli do kontradikcije. Dakle, $\langle 0, 1 \rangle$ je neprebrojiv, pa je takav i $\mathbb{R}$. $\square$

Već smo prije naglasili da kardinalnost nekog proizvoljnog beskonačnog skupa ne možemo lako opisati. Za preciznu definiciju kardinalnog broja potrebna je definicija ordinalnih brojeva i prije svega aksiomatska teorija skupova, što je izvan dosega ovoga rada. Iza pojma kardinalnosti krije se snažna teorija koju čitatelj može upoznati detaljnim proučavanjem već spomenute literature. Ipak, za sam kraj ovog rada navodimo jedan od najvažnijih teorema ove grane matematike, odnosno *Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem* koji ćemo zatim ilustrirati i na jednom od brojnih primjera. Povijesno gledano, Cantor je prvi iskazao tvrdnju teorema, a Bernstein ga je 1897. godine prvi dokazao. Nakon Bernsteina, 1898. godine dokazao ga je i Schröder. Teorem je do danas dokazan na više različitih načina. U nekim izvorima mogu se pronaći i nazivi Cantor-Bernsteinov ili Schröder-Bernsteinov teorem, ovisno o verziji i godini izdanja dokaza.

Teorem 2.6. (***Cantor-Schröder-Bernstein***)
Ako postoje injekcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$, onda postoji i bijekcija između skupova X i Y, to jest $X \sim Y$.

Dokaz. Vidi [15, str. 37].

Napomena 2.1. *U terminima kardinalnosti, Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem možemo iskazati i na sljedeći način:*

Ako je $k(X) \leq k(Y)$ i $k(Y) \leq k(X)$, tada je $k(X) = k(Y)$.

U nastavku navodimo ilustraciju prethodnog teorema [15, str. 38, primjer 1.43], dok zainteresirani čitatelj veliki broj riješenih primjera može pogledati npr. u [2, 16].

Primjer 2.6. *Želimo pokazati da je $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, odnosno naći injekciju sa skupa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ i obratno.*

Rješenje. Jedna injekcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ je dana s

$$x \mapsto (x, 0), \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

U primjeru 2.2 pokazali smo da je $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1 \rangle$ te očito vrijedi

$$\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Iz prethodnog slijedi da je umjesto injekcije sa $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ dovoljno naći injekciju sa $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ u $\mathbb{R}$. Definiramo funkciju sa $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ u $\mathbb{R}$ s

$$(0.y_0 y_1 \ldots, 0.z_0 z_1 \ldots) \;\mapsto\; 0.y_0 1 z_0 1 y_1 1 z_1 \ldots$$

koja je zbog načina na koji je definirana očito injekcija. ◀

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[2] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, Sveučilište u Zagrebu, PMF–Matematički odsjek, Zagreb, 2009.

[3] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF–Matematički odsjek, Zagreb (javno dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`)

[4] Z. Franušić, N. Pavlinić, *O distribuciji prostih brojeva*, Acta Mathematica Spalatensia, Series didactica, Vol. 1, 41–50, 2018.

[5] D. Jankov Maširević, *Zbirka riješenih zadataka iz teorije mjere i integracije*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[6] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[7] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I (Prepravljeno izdanje)*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[8] D. Kovačević, D. Žubrinić, *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb, 2006.

[9] M. Maleš, *Teorija skupova*, skripta, Split, 2003.

[10] M. Marijić, *Problematika ekvipotentnosti skupova u školskoj matematici*, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018.

[11] I. Matić, *Uvod u teoriju brojeva*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[12] N. Okičić, *Teorija skupova*, Tuzla, 2008.

[13] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[14] Š. Ungar, *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku*, online dostupna prezentacija, Osijek, 2016. (javno dostupno na: `https://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/skupovi/skupovi-slides.pdf`)

[15] M. Vuković, *Teorija skupova*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2015.

[16] T. Vuković, *Prebrojivost skupova*, Završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera U Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2020.