Osječki matematički list 21 (2021), 137–149

Matematičke dijagnostičke probe

Ines Kladušić*, Ljerka Jukić Matić†

Sažetak

Dijagnostičko vrednovanje provodi se kako bi se utvrdila kvaliteta i razina učeničkih predznanja i vještina prije početka procesa poučavanja. Ovaj oblik vrednovanja može se koristiti i za određivanje prikladnoga oblika odgojno-obrazovne podrške pojedinim učenicima. Matematičke dijagnostičke probe kratki su zadaci koji pomažu učiteljima prikupiti informacije o predznanju učenika, kao i o kolektivnim miskoncepcijama te individualnim poteškoćama učenika. Mogu se primijeniti u svim domenama matematike kako u osnovnoj tako i srednjoj školi.

Ključne riječi: *probe, vrednovanje, ideje za podučavanje, kurikulum, ishodi učenja, otkrivanje*

Mathematics diagnostic probes

Abstract

Diagnostic assessment is conducted to determine the quality and level of students' prior knowledge and skills before the beginning of the teaching process. This form of evaluation can also be used to determine the appropriate form of educational support for individual students. The Mathematics Assessment Probes are short, targeted assessments designed to elicit students' prior knowledge as well as the common understandings and misunderstandings related to a topic. The probes can be used in primary and secondary school as well.

Keywords: *probes, assessment, instructional ideas, curriculum, learning outcomes, uncovering*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ikladusi@mathos.hr
†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ljukic@mathos.hr

1 Uvod

Vrednovanje učeničkog znanja može poslužiti u različite svrhe. Većina učitelja upoznata je s tradicionalnim načinom vrednovanja učeničkog znanja pomoću ispita. Postoji razlog zašto je ova vrsta vrednovanja toliko popularna - isplativa je, uzima relativno kratko vrijeme za izradu i ocjenjivanje, te pruža numerički sažetak (ocjenu) koliko je učenika naučilo i na kojoj razini. Ovakav tip vrednovanja naziva se sumativno vrednovanje [3]. No ovaj načina vrednovanja ne daje niti učeniku niti učitelju povratnu informaciju o procesu učenja koji se dogodio, već samo krajnji rezultat. Upravo je taj nedostatak povratnih informacija prilična prepreka u procesu učenja.

Drugi tip vrednovanja, poznat kao formativno vrednovanje, ima drugačiju ulogu od sumativnog vrednovanja[3]. Formativno vrednovanje događa se tijekom procesa učenja kako bi se uočilo nerazumijevanje i pogrešno shvaćanje ili "rupe" u znanju prije sumativnog vrednovanja. Ono se može provoditi i nekoliko puta u svakom nastavnom satu. Može imati mnogo oblika poput učiteljevog promatranja učenika, razrednih diskusija, slušanja učeničkih odgovora, kvizova, neformalnih pitanja, a može sadržavati podatke u obliku brojeva, opisa, komentara, kontrolnih popisa itd. Formativno vrednovanje omogućuje učenicima uvježbavanje vještina ili provjeru znanja bez pritisaka povezanih s ocjenama.

Posebno i važno mjesto zauzima dijagnostičko vrednovanje. Dijagnostičko vrednovanje jest vrednovanje koje se provodi radi utvrđivanja kvalitete i razine učeničkoga znanja i vještina prije početka procesa učenja i poučavanja. To može biti na početku nove nastavne godine (inicijalni ispit), ali također na početku nove nastavne jedinice ili teme (npr. domaća zadaća od prošlog nastavnog sata). Rezultati dijagnostičkoga vrednovanja daju učitelju uvid u postojeće znanje, vještine i stavove učenika. Ovisno o rezultatima, učitelj može planirati i prilagoditi proces učenja i poučavanja.

U ovom članku opisat ćemo matematičke dijagnostičke probe koje mogu poslužiti i kao strategije dijagnostičkog vrednovanja i kao strategije formativnog vrednovanja.

2 Matematičke dijagnostičke probe

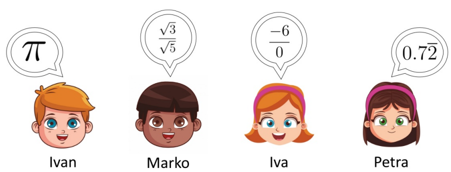
Dijagnostičko vrednovanje najčešće se provodi pomoću pisanih pitanja kojima se procjenjuje trenutno znanje učenika s obzirom na temu koja će se proučavati. Cilj je dobiti uvid u postojeće učeničko znanje [4]. S jedne strane dijagnostičko vrednovanje zahtijeva da učitelj odredi koja se znanja smatraju stvarnim preduvjetima za daljnje učenje. Zapravo, učitelj mora odrediti koji su nužni preduvjeti za daljnje učenje, a ne svi mogući preduvjeti. Ponekad to uključuje pregled kurikuluma iz prethodnog razreda ili više od jednog razreda unatrag; ponekad se određeni matematički sadržaj učio ranije u istom razredu. S druge strane, dijagnostičkim vrednovanjem učitelj procjenjuje znanje svojih učenika kako bi otkrio pogrešna shvaćanja tj. miskoncepcije. Ponekad se dijagnostička procjena provodi s jednim zadatkom, a ponekad bi to moglo biti nešto više poput kviza u kojem se istražuje mnogo zasebnih dijelova. U oba slučaja učitelj mora odlučiti što treba provjeriti: vještine (postupke) ili matematičke koncepte ili oboje.

Matematičke dijagnostičke probe kratka su dijagnostička pitanja dizajnirana tako da učiteljima daju uvid u razinu učeničkog razumijevanja te najčešća pogrešna shvaćanja određenog matematičkog koncepta [5, 6]. Svaka proba sastoji se od dva dijela - učenici trebaju odabrati odgovor koji smatraju točnim, a zatim obrazložiti zašto su se odlučili baš za taj odgovor. Tako strukturirani zadaci pomažu učiteljima u dijagnosticiranju kolektivnih pogrešnih shvaćanja, ali i individualnih poteškoća učenika. Proces upotrebe ovako dizajniranih dijagnostičkih zadataka, a zatim reagiranje u skladu s dobivenim informacija ključni su za pomoć učenicima u izgradnji njihovog matematičkog znanja [2]. No ove dijagnostičke probe ne moraju se koristi samo za dijagnostičko vrednovanje. Zbog svoje strukture one se mogu rabiti tijekom poučavanja neke matematičke teme kao strategija formativnog vrednovanja.

2.1 Primjeri proba

2.1.1 Jesam li iracionalan broj?

U 8. razredu osnovne škole učenici se upoznaju s realnim brojevima, razlikuju racionalne od iracionalnih brojeva te povezuju iste brojeve različitoga zapisa. U probi *Jesam li iracionalan broj?* četiri učenika dobila su zadatak navesti primjer iracionalnog broja. Učenici trebaju odabrati s kojim se učenikom slažu te obrazložiti svoj odabir. Ovaj dijagnostički zadatak pokazuje razumiju li učenici da se iracionalni brojevi ne mogu zapisati u obliku razlomka, smatraju li da je korijen broja iracionalan broj, razumiju li da je kvocijent dva racionalna broja racionalan broj te da je kvocijent racionalnog i iracionalnog iracionalan broj.



Učenik	Odaberi.		Objasni svoj odabir.
Ivan	**Slažem se**	Ne slažem se	
Marko	**Slažem se**	Ne slažem se	
Iva	Slažem se	**Ne slažem se**	
Petra	Slažem se	**Ne slažem se**	

Ukoliko se učenik:

- slaže s Ivanom i Markom, a ne slaže s Ivom i Petrom, svoju klasifikaciju temelji na karakteristikama racionalnih i iracionalnih brojeva.
- ne slaže s Ivanom, poistovjećuje π s $\frac{22}{7}$.
- ne slaže s Markom, ne razumije što je rezultat osnovnih računskih operacija s dva iracionalna broja.
- slaže s Ivom, iracionalne brojeve poistovjećuje s dijeljenjem s 0, što je nedefinirano.
- slaže s Petrom, beskonačni periodični decimalni broj tumači kao iracionalan broj.

Kako bismo učenicima pomogli shvatiti pojam realnih brojeva, mogli bismo:

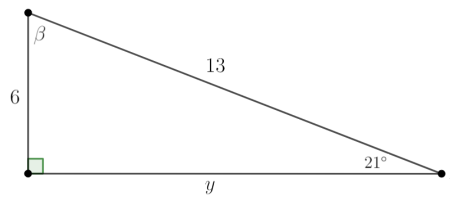
- pitati ih zašto ponekad π identificiramo s 3.14 te im dodatno pojasniti zašto je njihovo mišljenje ispravno, odnosno neispravno.
- tražiti učenike da objasne kako prepoznaju kada je neki broj iracionalan, a kada racionalan. Zatim učenici svoja objašnjenja trebaju primijeniti na neki skup brojeva npr. $\{\sqrt{5}, 0.575, (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}), \frac{\sqrt{5}}{7}, 5.52\ldots\}$. Kako bi otvorili diskusiju s učenicima, broj $5.52\ldots$ namjerno smo zadali s prve dvije decimale. Učenici trebaju uočiti da iz zapisa broja $5.52\ldots$ nije moguće odlučiti je li broj racionalan ili iracionalan, jer ne znamo je li periodičan ili neperiodičan. Zatim učenici trebaju

navesti primjere brojeva s periodičnim i neperiodičnim decimalnim dijelom kao primjere racionalnih i iracionalnih brojeva.

2.1.2 Trigonometrijski omjeri

U 1. razredu srednje škole učenici koriste trigonometrijske omjere. U probi *Trigonometrijski omjeri* učenici trebaju odrediti može li se pomoću danih trigonometrijskih omjera odrediti duljina stranice koja nedostaje te obrazložiti svoj odabir. Ovaj dijagnostički zadatak pokazuje mogu li učenici prepoznati ispravne trigonometrijske omjere prilikom određivanja nepoznatih duljina stranica u pravokutnom trokutu.

Odredi može li se pomoću danih trigonometrijskih omjera odrediti duljina stranice koja nedostaje te obrazloži svoj odabir.



Duljina stranice y:	Zaokruži.		Obrazloži svoj odabir.
a) $\sin 21^\circ = \frac{y}{13}$	Da	**Ne**	
b) $\cos 21^\circ = \frac{y}{13}$	**Da**	Ne	
c) $\text{tg } 21^\circ = \frac{y}{6}$	Da	**Ne**	
d) $\text{tg } 21^\circ = \frac{6}{y}$	**Da**	Ne	

Ukoliko učenik odabere:

- a) Ne, b) Da, c) Ne i d) Da, može pronaći nepoznate duljine stranica i mjere kutova primjenom trigonometrijskih omjera.
- ostale odgovore, nema adekvatno znanje o trigonometrijskim omjerima.

Kako bismo učenicima približili koncept trigonometrijskih omjera, mogli bismo:

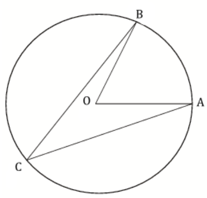
- omogućiti im da temeljito istraže pravokutne trokute uz pomoć različitih modela i tehnologije.
- crtati pravokutne trokute u različitim položajima kako bi bolje razlikovali nasuprotnu i priležeću stranicu.
- imenovati vrhove trokuta i drugim slovima abecede tako da uz oznaku $\triangle ABC$, učenici susretnu i oznake poput $\triangle EFG$ ili $\triangle KLM$.

2.1.3 Kružnice i kutovi

U 2. razredu srednje škole učenici primjenjuju poučak o obodnom i središnjem kutu pri dokazu Talesova poučka. U probi *Kružnice i kutovi* dana je kružnica sa središtem u točki O, kut AOB mjere $75°$ i A, B, C točke dane kružnice. Troje učenika raspravljalo je može li se odrediti mjera kuta ACB. Učenici trebaju odabrati s kojim učenikom se slažu te obrazložiti svoj odabir.

Ovaj dijagnostički zadatak pokazuje mogu li učenici prepoznati i koristiti odnose između središnjeg i obodnih kutova pri rješavanju problema koji uključuju mjerenje kutova.

Na slici je prikazana kružnica sa središtem u točki O i kut AOB mjere $75°$.



Troje učenika raspravljalo je može li se naći mjera kuta ACB:

Sara: Mjera kuta ACB iznosi $75°$.

Luka: **Mjera kuta ACB iznosi $37.5°$.**

Ivana: Nema dovoljno podataka za pronalaženje mjere kuta ACB.

S kojim učenikom se slažeš i zašto?

Ukoliko se učenik:

- slaže s Lukom, prepoznaje i može koristiti odnose između središnjeg i obodnih kutova.

- slaže s nekim od preostalih učenika, ne razumije odnose između središnjeg i obodnih kutova nad istim kružnim lukovom (*Veličina središnjeg kuta dvostruko je veća od veličine obodnog kuta nad istim lukom.*).

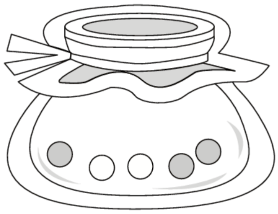
Kako bismo učenicima pomogli približiti koncept središnjeg i obodnih kutova nad istim kružnim lukom, mogli bismo:

- dati im da istraže različite vrste kutova konstruiranih u različitim položajima na kružnici.

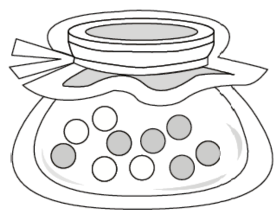
- ostaviti vremena da sami istraže mjere kutova npr. kutomjerom ili pomoću papira dok ne uvide vezu između središnjeg i obodnih kutova nad istim kružnim lukom.

2.1.4 Kolika je vjerojatnost?

U probi *Kolika je vjerojatnost?* imamo dvije staklenke s crnim i bijelim kuglicama. Ako je iz svake staklenke nasumično izvučena kuglica, učenici trebaju odrediti koja je od ponuđenih tvrdnji točna, a koja netočna te obrazložiti svoj odabir. Ovaj dijagnostički zadatak pokazuje računaju li učenici vjerojatnost nezavisnih događaja na ispravan način.



Slika 1. Staklenka A



Slika 2. Staklenka B

Točno ili netočno?	Objasni.
1. Veća je vjerojatnost da je crna kuglica izvučena iz staklenke B. Točno **Netočno**	
2. Vjerojatnost da je iz obje staklenke izvučena bijela kuglica je $\frac{4}{25}$. **Točno** Netočno	
3. Vjerojatnost da je iz obje staklenke izvučena crna kuglica je $\frac{9}{15}$. Točno **Netočno**	

Ukoliko učenik:

- za tvrdnje zaokruži redom Netočno, Točno, Netočno, pravilno određuje vjerojatnosti nezavisnih događaja.
- tvrdnju 1 označi kao točnu, uspoređuje samo broj crnih kuglica. Učenik zaključuje na sljedeći način: s obzirom da u staklenki B ima više crnih kuglica, veća je vjerojatnost da je crna kuglica izvučena iz staklenke B.
- tvrdnju 2 označi kao netočnu, učenik vjerojatno zaključuje na sljedeći način: u obje staklenke imamo ukupno 15 kuglica, od kojih je 6 bijelih, a ne ukupno 25 kuglica od kojih je 4 bijelih
- tvrdnju 3 označi kao točnu, učenik zaključuje na sljedeći način: u obje staklenke imamo ukupno 15 kuglica, od kojih je 9 bijelih.

Kako bismo učenicima približili koncept vjerojatnosti, mogli bismo:

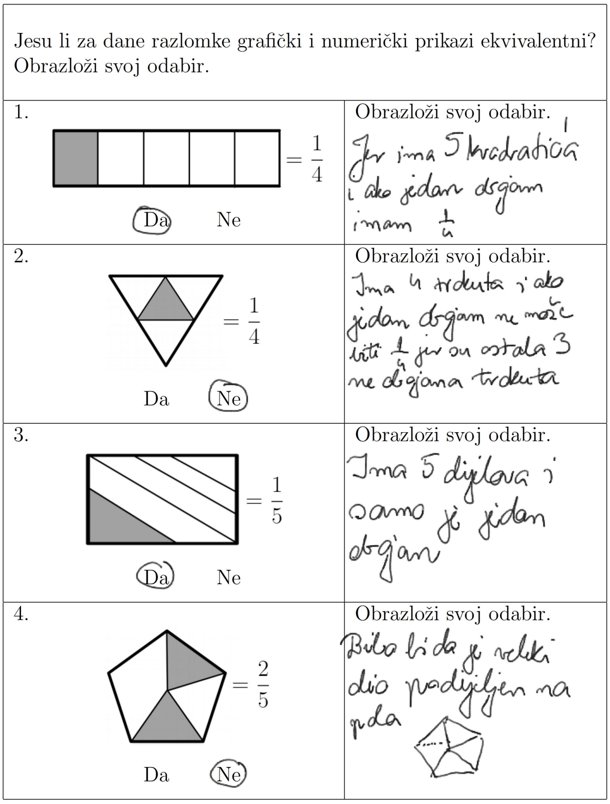
- dodatno pojasniti omjere i proporcije jer su oni ključni za razumijevanje relativnih frekvencija.
- dati učenicima da sami izvedu nekoliko eksperimenata u kojima ima mali broj ishoda. Npr. zadati im da bacaju kockicu ili novčić i bilježe moguće ishode. Tako bi pojam vjerojatnosti mogli generalizirati i na događaje s više mogućih ishoda.
- pokazati dodatne primjere u kojima su događaji nezavisni i izračunati njihovu vjerojatnost.

3 Primjeri učeničkih radova

U nastavku ćemo vidjeti nekoliko primjera učeničkih radova iz kojih se mogu uočiti najčešće poteškoće koje učenici imaju s određenim matematičkim pojmovima te ćemo navesti nekoliko ideja za poučavanje.

3.1 Prikazivanje razlomaka

U 5. razredu osnovne škole učenici povezuju slikovni prikaz razlomka s brojevnim zapisom i obratno. Sljedeća proba prikuplja informacije o tome u kolikoj mjeri učenici mogu interpretirati prikaz razlomka pomoću modela površine. Ispravno tumačenje takvih prikaza uključuje razmatranje dijelova jednakih veličina i broja osjenčanih dijelova.


Jesu li za dane razlomke grafički i numerički prikazi ekvivalentni? Obrazloži svoj odabir.

1. $= \frac{1}{4}$ Da Ne	Obrazloži svoj odabir. Jer ima 5 kvadratića i ako jedan obojam imam $\frac{1}{4}$
2. $= \frac{1}{4}$ Da Ne	Obrazloži svoj odabir. Ima 4 trokuta i ako jedan obojam ne može biti $\frac{1}{4}$ jer su ostala 3 ne obojana trokuta
3. $= \frac{1}{5}$ Da Ne	Obrazloži svoj odabir. Ima 5 dijelova i samo je jedan obojan
4. $= \frac{2}{5}$ Da Ne	Obrazloži svoj odabir. Bilo bi da je veliki dio podijeljen na pola

Slika 3.

Na primjeru učeničkog rada (slika 3) vidimo kako učenik pogrešno zaključuje povezujući nazivnik s brojem neosjenčanih dijelova. Broj osjenčanih dijelova povezuje s brojnikom, a ukupan broj dijelova s nazivnikom, ali ne obraća pažnju na veličinu dijelova. Vidi da se dio lika može dodatno podijeliti i da bi tada dobio pet jednakih dijelova, no kako to nije naznačeno u zadatku, smatra da prikazi nisu ekvivalentni.

Rad s različitim slikovnim prikazima razlomaka poboljšat će učeničko razumijevanje pojma brojnika, odnosno nazivnika, kao i razumijevanje nužnosti da dijelovi budu istih veličina tj. površina. Kontekst, poput ravnopravnog dijeljenja s prijateljima, može pomoći učenicima da shvate važnost dijelova jednakih veličina. Od pomoći mogu biti i primjeri i kontraprimjeri određenih razlomaka. Također, za sprječavanje pretjeranih generalizacija od pomoći mogu biti različiti modeli za prikazivanje istog razlomka.

3.2 Množenje i dijeljenje cijelih brojeva

U 6. razredu osnovne škole učenici množe i dijele cijele brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija. Sljedeća proba prikuplja informacije o tome u kolikoj mjeri učenici mogu primijeniti pravila za cjelobrojno množenje i dijeljenje te interpretirati različite simboličke prikaze množenja i dijeljenja.

Na primjeru učeničkog rada (slika 4) vidimo kako učenik ispravno primjenjuje pravila za množenje (negativan · negativan = pozitivan), odnosno dijeljenje cijelih brojeva, no pogrešno tumači množenje, odnosno dijeljenje suprotnih brojeva. Učenik zbraja suprotne brojeve umjesto da ih množi ili dijeli. Također, učenik ne prepoznaje da se potencija može zapisati kao uzastopno množenje broja sa samim sobom.

Kako bi učenici u potpunosti razumjeli koncept cjelobrojnog množenja, odnosno dijeljenja, važno im je naglasiti kako se množenje može prikazati kao uzastopno zbrajanje istih pribrojnika, dijeljenje kao uzastopno oduzimanje istog broja od zadanog broja, a potencije kao uzastopno množenje broja sa samim sobom. Korisni mogu biti i problemski zadaci pomoću kojih bi učenici lakše vizualizirali faktore i umnožak, odnosno djeljenik, djelitelj i količnik. Za jednostavnije usvajanje svojstava računskih operacija s cijelim brojevima prikladno je koristiti uzorke na kojima učenici mogu uočiti kako se mijenja predznak umnoška s obzirom na predznak faktora. Primjerice:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 6 \\ 1 \cdot 3 &= 3 \\ 0 \cdot 3 &= 0 \\ -1 \cdot 3 &= -3 \\ -2 \cdot 3 &= -6. \end{aligned}$$

Na sličan način, uzorke možemo rabiti i za dijeljenje cijelih brojeva, gdje učenici mogu uočiti kako se predznak količnika mijenja s obzirom na predznak djeljenika i djelitelja.

Bez računanja odredi je li umnožak/količnik pozitivan, negativan ili nula te obrazloži svoj odabir.	
1. $-24 \cdot (-36)$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. $- \cdot - = +$
2. $-15 \cdot 15$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. To su isti brojevi, ali jedan je pozitivan, a drugi negativan
3. $(-13)^4$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. 4 je pozitivan, a 13 je negativan
4. $-2^3 \cdot 4^5$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. $- \cdot + = -$
5. $85 \div (-85)$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. Ponište se, suprotnog su predznaka
6. $\dfrac{-63}{-33}$ Pozitivan Negativan Nula	Obrazloži svoj odabir. $- : - = +$

Slika 4.

4 Vrednovanje unutar Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika

U hrvatskom školskom sustavu vrednovanje učeničkog znanja regulirano je Pravilnikom o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi [8, 9]. Pravilnik opisuje vrednovanje kao sustavno prikupljanje podataka u procesu učenja i postignutoj razini ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda, kompetencijama, znanjima, vještinama, sposobnostima, samostalnosti i odgovornosti prema radu, u skladu s unaprijed definiranim i prihvaćenim metodama i elementima. Zapravo, Pravilnik pokazuje kako je vrednovanje i ocjenjivanje učeničkog znanja u nastavi matematike važan dio procesa poučavanja i učenja. Stoga je vrednovanje uklopljeno i u novi Kurikulum nastavnog predmeta Matematika [7] koji promiče vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje te vrednovanje naučenog. Vrednovanje za učenje postupak je prikupljanja informacija o procesu učenja. Odvija se tijekom učenja i poučavanja. Vrednovanje kao učenje postupak je aktivnog uključivanja učenika u proces vrednovanja. Polazi od ideje da učenici vrednovanjem uče. Vrednovanje naučenog odnosi se na provjeru usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda učenja usmenim ispitivanjem, pismenim provjerama te matematičkim ili interdisciplinarnim projektima.

Iako unutar kurikuluma nisu eksplicitno navedena tri tipa vrednovanja koja smo opisali na početku članka, nego vrste vrednovanja s obzirom na cilj s kojim se vrednovanje provodi, jasno je da je u nastavi potrebno rabiti sva tri tipa vrednovanja. Vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje postaju formativni kada se rezultati vrednovanja koriste za poboljšanje nastave. Iako je vrednovanje naučenog najčešće sumativno, i ono može biti formativno ako dobivene rezultate učitelj rabi za usmjeravanje nastavnog procesa.

Dakle, u modernoj nastavi matematike vrednovanje nije jednoznačno, nego višeznačno, a uključuje dijagnosticiranje prednosti i potreba učenika prije nastave (dijagnostika), poboljšanje učeničkih vještina i konceptualnog razumijevanja matematike tijekom procesa učenja (formativno) te određivanje razine znanja na kraju svakog nastavnog ciklusa (sumativno) [4].

Literatura

[1] C. Lee, *Language for learning mathematics assessment for learning in practice*, New York, Open University Press, 2006.

[2] I. Kladušić, *Dijagnostičko vrednovanje u nastavi matematike*, diplomski

rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2021.

[3] G. O. Neill, *Curriculum Design in Higher Education: Theory to Practice*, Dublin, UCD Teaching & Learning, 2015.

[4] M. Small, *Math that matters: Targeted assessment and feedback for grades 3-8*, Oakville, Teachers College Press, 2019.

[5] C. R. Tobey, A. B. Arline, *Uncovering student thinking about mathematics in the common core, grades 6-8: 25 formative assessment probes*, Thousands Oaks, Corwin, 2014.

[6] C. R. Tobey, A. B. Arline, *Uncovering student thinking about mathematics in the common core, high school: 25 formative assessment probes*, Thousands Oaks, Corwin, 2014.

[7] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, Narodne novine 10/2019, 2019.

[8] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Pravilnik o izmjenama i dopuni Pravilnika o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi*, Narodne novine 82/2019, 2019.

[9] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi*, Narodne novine 112/2010, 2010.