Vol 40.

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Fibonacci, Tribonacci, ... i četiri konstante

M. Buzov; P.M. Gojun i N. Jakovčević Stor

Sažetak

Fibonaccijevi brojevi popularna su tema, o njima je puno toga napisano ([1],[3]), kako o samom nizu tako i o vezi sa zlatnim rezom, pojavljivanju u prirodi, umjetnosti, arhitekturi, ... Njihovo proširenje u vidu Tribonaccijevih brojeva manje je poznato pa ćemo u ovom radu nakon malog ,,Fibonacci" uvoda predstaviti Tribonaccijeve brojeve, njihovu vezu s Fibonaccijevim brojevima te Tribonaccijevu konstantu. Zlatni rez i Tribonaccijeva konstanta su Pisotovi brojevi. Što su Pisotovi brojevi, koji je najmanji Pisotov broj, poznat još i kao plastična konstanta te kako se u tu priču uklapaju Pellovi brojevi i konstanta zvana srebreni rez, koja je također Pisotov broj pročitajte u nastavku.

1 Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez

Fibonaccijevi brojevi F_n definirani su rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ za } n > 1, \tag{1}$$

uz početne uvjete $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Prvih nekoliko članova Fibonaccijevog niza je

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Niz je dobio ime po Leonardu Pisanu Fibonacciju koji je postavio problem razmnožavanja zečeva i time formirao gornji niz.

Fibonaccijev broj F_n, odnosno n-ti član Fibonaccijevog niza može se odrediti Binetovom formulom:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Nadalje, Fibonaccijevi brojevi se mogu generirati računanjem potencija matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tj. vrijedi

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Ovo su neke od poznatijih relacija koje zadovoljavaju Fibonaccijevi brojevi:

(1) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ za sve $m, n \geq 1$,

(2) Cassinijev identitet: $F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$ za $n \geq 2$,

(3) Catalanov identitet: $F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2$ za $n \geq r \geq 1$,

(4) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ za $n \geq 0$, pa slijedi da niz kvadrata Fibonaccijevih brojeva ima svojstvo da sume dva uzastopna člana redom daju Fibonaccijeve brojeve s neparnim indeksima.

Limes niza kvocijenta dva susjedna Fibonaccijeva broja je

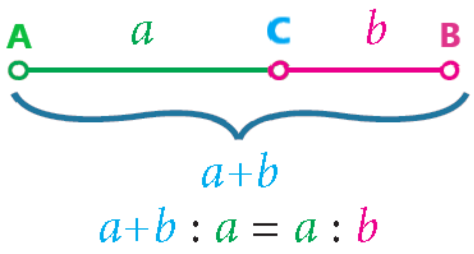
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{2}$$

odnosno konstanta naziva zlatni rez. Označavamo ju s

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874\ldots.$$

Karakterizacija zlatnog reza, prikazana na Slici 1, je sljedeća:
Neka su dane dužina $\overline{AB}$ i točka C na dužini takva da je omjer duljine cijele dužine $\overline{AB}$ i duljine duljeg dijela $\overline{AC}$ jednak omjeru duljine dužine $\overline{AC}$ i duljine dužine $\overline{BC}$. Taj omjer iznosi

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Slika 1: Zlatni rez

Zlatni rez φ zadovoljava identitete:

$$\varphi + 1 = \varphi^2,$$
$$\varphi - 1 = \varphi^{-1}.$$

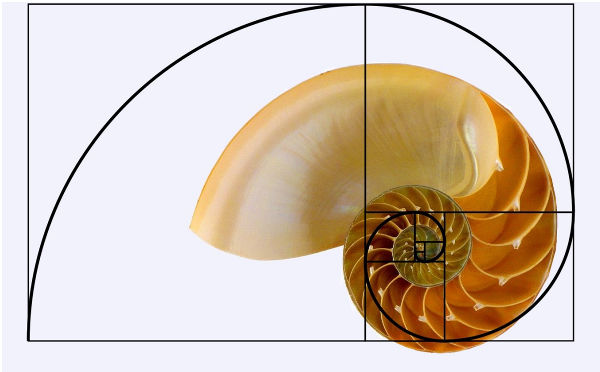
Neki primjeri Fibonaccijevog niza i zlatnog reza u prirodi [6]:

(1) Broj ženskih pčela podijeljen s brojem muških pčela, u bilo kojoj košnici u bilo kojem trenutku jednak je φ.

(2) Broj latica u cvijetu dosljedno slijedi Fibonaccijev niz. Primjerice, ljiljan koji ima tri latice, ljutići koji imaju pet, cikorija 21, tratinčica 34, i tako dalje (Slika 2, [5]). Svaka latica postavlja se po zavoju omogućavajući najbolje moguće izlaganje sunčevoj svjetlosti i drugim čimbenicima.

Slika 2: Ljiljan, ljutić, uresnica, zvjezdan, krizantema

(3) Pravokutnik u kojem je omjer stranica $a : b$ jednak zlatnom rezu φ, može rezultirati postupkom gniježđenja koji se može ponoviti u beskonačnost - i koji poprima oblik spirale. U prirodi takav oblik imaju na primjer ljuske puževa i nautilus (Slika 3, [9]).



Slika 3: Nautilus i zlatni rez

2 Tribonaccijevi brojevi i konstanta

Kao što je u Fibonaccijevom nizu svaki član počevši od trećeg po redu suma prethodna dva tako je u Tribonaccijevom nizu ([14],[19]) svaki član počevši od četvrtog suma prethodna tri:

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} \text{ za } n > 1,$$

gdje je $T_0 = T_1 = 1$ i $T_2 = 2$ pa je prvih nekoliko članova niza:

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \ldots$$

Niz je prvi put formalno opisao Agronomof 1914. godine, ali prvu nenamjernu upotrebu u podrijetlu vrsta dao je Charles R. Darwin. U primjeru koji ilustrira rast populacije slonova, oslanjao se na izračune koje je izvršio njegov sin George H. Darwin. Izraz Tribonacci predložio je Feinberg [4], 1963. godine. Analogno Binetovoj formuli za Fibonaccijeve brojeve n-ti Tribonaccijev broj možemo izračunati po formuli

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

gdje su α, β i γ korijeni polnoma $x^3 - x^2 - x - 1$. Također vrijedi

$$T_n = \left[3 \frac{\left(\frac{1}{3}\left(19+3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(19-3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right)^n \left(586+102\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(586+102\sqrt{33}\right)^{\frac{2}{3}} + 4 - 2\left(586+102\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}} \right] \tag{3}$$

gdje je $[\quad]$ oznaka za funkciju "najbliže cijelo". Niz kvocijenta susjednih članova Tribonaccijevog niza konvergira, analogno kao što vrijedi i za Fibonaccijev niz (1).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \psi,$$

gdje je

$$\psi = \frac{1}{3}\left(1 + (19+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + (19-3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}\right) = 1.83929\ldots$$

konstanta koja se naziva Tribonaccijeva konstanta. Primijetimo da je Tribonaccijeva konstanta dio brojnika formule (3).

3 Pellovi brojevi i srebreni rez

Pellovi brojevi P_n i Pell Lucasovi brojevi Q_n ([7],[13],[16]) definirani su rekurzivnim relacijama

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \text{ za } n > 1,$$

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \text{ za } n > 1,$$

uz početne uvjete $P_0 = 0$ i $P_1 = 1$ za Pellove brojeve, odnosno $Q_0 = Q_1 = 2$ za Pell Lucasove brojeve. Prvih nekoliko Pellovih brojeva je

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \ldots,$$

a Pell Lucasovih

$$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, \ldots$$

Pellovi i Pell Lucasovi brojevi povezani su relacijom

$$Q_n = \frac{P_{2n}}{P_n}.$$

Nadalje, ovi brojevi dani su eksplicitno formulama

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

$$Q_n = (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n.$$

Pellovi brojevi se mogu generirati potenciranjem matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, tj. vrijedi

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Također, neka je $F = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ tada je (prema [2])

$$FM^n = \begin{bmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Vrijedi:

(1) $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$, analogon Cassinijevog identiteta za Fibonaccijeve brojeve,
(2) $P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1}P_n$,
(3) $P_{m+n} = 2P_m Q_n - (-1)^n P_{m-n}$,
(4) $Q_n^2 = 4\big(2P_n^2 + (-1)^n\big)$,
(5) $Q_{2n} = Q_n^2 - 2(-1)^n$.
(6) Uređena trojka

$$\big(2P_nP_{n+1},\ P_{n+1}^2 - P_n^2,\ P_{2n+1}\big)$$

čini Pitagorinu trojku. Prvih nekoliko takvih trojki je

$$(4,3,5), (20,21,29), (120,119,169), (696,697,985), \ldots$$

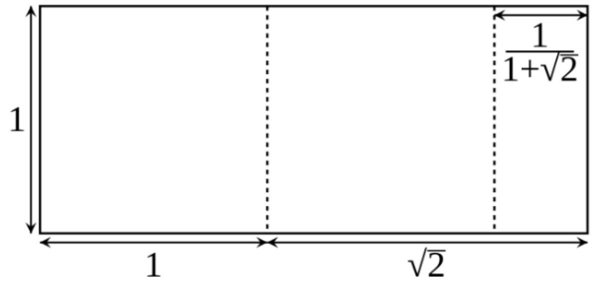
Slično kao što je zlatni rez limes kvocijenta susjednih Fibonaccijevih brojeva, srebreni rez S je limes kvocijenta susjednih Pellovih brojeva, tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \sqrt{2} = S.$$

Kažemo da su dvije veličine a i b, $a \geq b$, u omjeru srebrenog reza (Slika 4) ako je omjer veće od te dvije veličine i manje veličine jednak omjeru zbroja manje i dvostruke veće veličine i veće veličine, tj. srebreni rez S se definira s

$$S = \frac{a}{b} = \frac{2a+b}{a}.$$

Uvođenjem supstitucije $x = \dfrac{a}{b}$ dobiva se kvadratna jednadžba $x^2 - 2x - 1 = 0$, a jedno od njenih rješenja je $S = 1 + \sqrt{2}$.



Slika 4: Stranice pravokutnika su u omjeru srebrenog reza. Nadalje, ovaj prvokutnik se može podijeliti na dva kvadrata i pravokutnik čije stranice su također u omjeru srebrenog reza, [11].

4 Padovanovi brojevi i plastična konstanta

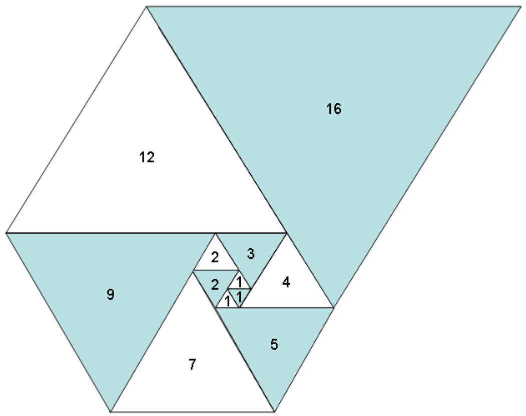
Padovanovi brojevi D_n ([8],[15]) definirani su rekurzivnom relacijom

$$D_n = D_{n-2} + D_{n-3} \text{ za } n > 2,$$

uz početne uvjete $D_0 = D_1 = D_2 = 1$. Prvih nekoliko brojeva Padovanovog niza je

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \ldots$$

Na Slici 5 prikazana je spirala jednakostraničnih trokuta čije stranice su Padovanovi brojevi.



Slika 5: Padovanova trokutasta spirala

Padovanovi brojevi mogu se generirati pomoću matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

računanjem njenih pozitivnih potencija, tj. vrijedi

$$A^n = \begin{bmatrix} D_{n-5} & D_{n-3} & D_{n-4} \\ D_{n-4} & D_{n-2} & D_{n-3} \\ D_{n-3} & D_{n-1} & D_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Analogno zlatnom rezu kod Fibonaccijevih brojeva, plastična konstanta P je limes kvocijenta susjednih Padovanovih brojeva, tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{D_{n-1}} = P,$$

gdje je

$$P=\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}=1.32471795\ldots$$

Plastična kontanta P [18] zadovoljava identitete:

$$P-1=P^{-4},$$
$$P+1=P^{3}.$$

Plastična konstanta P i zlatni rez φ su jedini brojevi x za koje postoje prirodni brojevi k i l takvi da vrijedi $x+1=x^k$ i $x-1=x^{-l}$, tj. oni su takozvani morfni brojevi.

5 Pisotovi brojevi

Pisotov broj [17] je pozitivni algebarski cijeli broj veći od 1 čiji svi konjugati imaju normu (strogo) manju od 1. Zovu se još i Pisot–Vijayaraghavan brojevi ili kraće PV brojevi.

Primjer 1. *Zlatni rez* $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618\ldots$ *je PV broj. Korijen je minimalnog polinoma* x^2-x-1*, a norma njegovog konjugata,* $\overline{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618\ldots$*, je manja od* 1*.*

Primjer 2. *Tribonaccijeva konstanta* $\psi=1.83929...$ *korijen je kubne jednadžbe* $x^3-x^2-x-1=0$*, a norma njenih konjuganata je približno jednaka* $0.737\ldots$*.*

Primjer 3. *Srebreni rez* $S=1+\sqrt{2}$ *je PV broj. Korijen je kvadratne jednadžbe* $x^2-2x-1=0$*, a norma njegovog konjugata,* $\overline{\psi}=1-\sqrt{2}\approx -0.414\ldots$*, je manja od* 1*.*

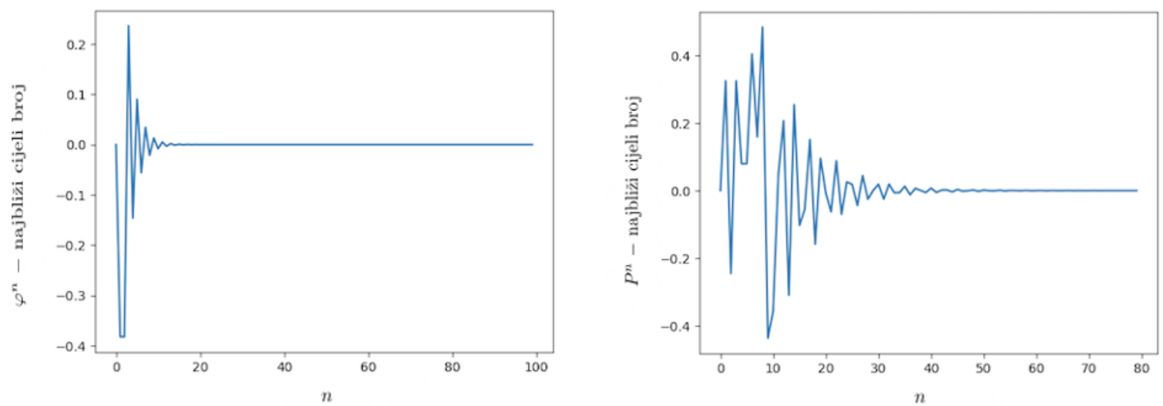
Primjer 4. *Najmanji Pisotov broj dan je pozitivnim korijenom jednadžbe* $x^3-x-1=0$*, i poznat je kao plastična konstanta* P*, a norma njenih konjuganata je približno jednaka* $0.868\ldots$*.*

Dakle, sve četiri konstante su Pisotovi brojevi, a za njih vrijedi još:

(1) Potencije Pisotovih brojeva se približavaju cijelim brojevima. U Tablici 1 dane su vrijednosti prvih 11 potencija zlatnog reza, a na Slici 6, [10], grafički je prikazana zavisnost razlike potencija zlatnog reza i potencija plastične konstante i najbližeg cijelog broja.

n	φ^n
0	1
1	$1.6180\ldots$
2	$2.6180\ldots$
3	$4.2360\ldots$
4	$6.8541\ldots$
5	$11.0901\ldots$
6	$17.9442\ldots$
7	$29.0344\ldots$
8	$46.9787\ldots$
9	$76.0131\ldots$
10	$122.9918\ldots$
11	$199.0050\ldots$

Tablica 1: Potencije zlatnog reza



Slika 6: Razlika potencija zlatnog reza i najbližeg cijelog broja i razlika potencija plastične konstante i najbližeg cijelog broja.

(2) Ako je α PV broj, onda su α^n, $n \in \mathbb{N}$ PV brojevi.

6 Što još zajedničko imaju ove četiri konstante?

(1) Sve se mogu prikazati kao beskonačna ugnježđenja [12]:

- $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$
- $\frac{1}{\psi - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \dots}}}}$
- $\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \dots}}}}$
- $P = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}$

(2) Zadovoljavaju slične algebarske izraze [12], npr.:

$$\varphi + \frac{1}{\varphi^2} = 2$$

$$\psi + \frac{1}{\psi^3} = 2.$$

$$\frac{1}{\varphi} + 1 = \varphi$$

$$\frac{1}{P} + 1 = P^2$$

$$(1-u)^3 = (2u)^2 \text{ gdje je } u = \frac{\psi - 1}{\psi + 1}$$

$$(1-v)^3 = (v)^2 \text{ gdje je } u = \frac{1}{P+1}$$

(3) Sve četiri konstante se mogu izraziti u terminima Dedekind eta funkcije (više o tome u [12]).

Bibliografija

[1] http://www.britannica.com/eb/article-9034168/Fibonacci-numbers (pristupljeno lipanj, 2021.)

[2] A. Dasdemir, On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method, Appl. Math. Sci., 5(64), 3173 - 3181, (2011)

[3] A. Dujella, Fibonaccijevi brojevi, Zagreb, (1999)

[4] M. Feinberg, Fibonacci-Tribonacci, Fibonacci Quarterly 1, 71–74, (1963)

[5] https://www.nationalgeographic.org/media/golden-ratio/(pristupljeno prosinac, 2021.)

[6] https://gizmodo.com/15-uncanny-examples-of-the-golden-ratio-in-nature-59... (pristupljeno lipanj, 2021.)

[7] A. F. Horadam and J. M. Mahon, Pell and Pell-Lucas Polynomials Fi- bonacci Quart., 23(1), 7-20, (1985).

[8] B. Kovačić, L. Marohnić and R. Opačić, O Padovanovu nizu, Osječki matematički list 13, 1-19, (2013).

[9] https://http://www.fibonaccilifechart.com/blog/truth-and-myth-in-the-gol... (pristupljeno prosinac, 2021.)

[10] https://www.johndcook.com/blog/2017/03/26/plastic-powers/(pristupljeno prosinac, 2021.)

[11] https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/meet-the-metallic-me... (pristupljeno prosinac, 2021.)

[12] https://sites.google.com/site/tpiezas/0012 (pristupljeno lipanj, 2021.)

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Pell-number (pristupljeno rujan, 2021.)

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations-of-Fibonacci-numbers (pristupljeno lipanj, 2021.)

[15] https://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html (pristupljeno rujan, 2021.)

[16] https://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html (pristupljeno rujan, 2021.)

[17] https://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html (pristupljeno listopad, 2021.)

[18] https://mathworld.wolfram.com/PlasticConstant.html (pristupljeno rujan, 2021.)

[19] https://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html (pristupljeno lipanj, 2021.)

ISSN 1334-6083