Statistička fizika biljara

Filip Vučić[1]

Uvod

Biljar je nadaleko poznata društvena i sportska igra za dva igrača (ili u parovima po dvoje) s tri i više kugli koje se udaraju vrhom biljarskog štapa na posebnom stolu. U svijetu se biljar vrlo često može naći u kavanama i gostionicama gdje se najčešće i igra amaterski, [1]. U članku će biti korišten sljedeći model za statistički opis sustava koji čini mnoštvo biljarskih kuglica na biljarskom stolu.

Dan je biljarski stol znatno većih dimenzija od standardnih (npr. duljine i širine po nekoliko stotina kilometara). Duljina biljarskog stola neka je l, a širina b. Neka je na tom stolu vrlo velik broj biljarskih kuglica N (npr. reda veličine 10^{23}). Sve su kuglice jednakih polumjera r i jednake mase m, a međusobni sudari kuglica kao i sudari kuglica s rubovima stola savršeno su elastični. U početnom trenutku sve kuglice miruju, a nakon toga se jedna od njih udari štapom u točku na visini središta i dobije translacijsku brzinu v_0. Nakon toga sustav kuglica prelazi u slobodno gibanje. Trenje na stolu, kao i svi ostali oblici sila otpora i gubitaka energije, zanemarivi su.

Prosječna vrijednost kvadrata brzine kuglice

U ovom je odjeljku cilj odrediti srednju vrijednost kvadrata brzine $\langle v^2 \rangle$ kuglice i odrediti maksimalnu brzinu $v_{\max}$ koju neka kuglica može imati.

Budući da su svi sudari savršeno elastični i nema gubitaka energije na okolinu, može se pisati zakon očuvanja energije u obliku

$$\frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_i^2}{2} \iff v_0^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2, \tag{1}$$

pri čemu je v_i brzina i-te kuglice. Dijeljenjem izraza (1) s brojem kuglica N prepoznaje se srednja vrijednost kvadrata brzine kuglice

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \langle v^2 \rangle = \frac{v_0^2}{N}. \tag{2}$$

Iz izraza (1) vidi se da je $v_{\max} = v_0$.

[1] Autor je učenik 3. razreda I. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: `fico.sah@gmail.com`

Tlak

Poznat je izraz za tlak idealnog plina[2] $p = \frac{Nm\left\langle v^2\right\rangle}{3V}$, gdje je V volumen posude u kojoj se nalazi plin. Taj tlak posljedica je sudara čestica plina sa stjenkama posude. Valja izvesti analogan izraz za tlak sustava mnoštva biljarskih kuglica na stolu koji nastaje uslijed sudaranja biljarskih kuglica s rubovima stola.

Razlika između izraza za tlak kuglica na biljarskom stolu i tlak idealnog plina nastat će uslijed toga što je gibanje kuglica dvodimenzionalno, a gibanje čestica plina trodimenzionalno. Stoga je dovoljno primijeniti bilo koji od izvoda za tlak idealnog plina i uvažiti da je gibanje dvodimenzionalno. Promotrimo cilindar s površinom baze S. Na bazu cilindra nalijeće kuglica s komponentom brzine okomitom na njegovu bazu, v_x. Sila koja uslijed promjene količine gibanja kuglice djeluje na bazu cilindra jednaka je

$$F = \frac{2mv_{i,x}}{\Delta t}.$$

Tlak je stoga jednak

$$p_i = \frac{2mv_{i,x}}{S\Delta t} = \frac{2m{v_{i,x}}^2}{Sv_{i,x}\Delta t}. \tag{3}$$

Vremenski interval Δt je prosječno vrijeme između dvaju sudara i-te čestice s nekom bazom pa ako je visina cilindra jednaka h, tada je $\Delta t = \frac{2h}{v_{i,x}}$ jer kuglica mora doći od jedne baze do druge (put h) i zatim od druge baze natrag do prve (put h). Uvrštavanjem toga u (3) slijedi

$$p_i = \frac{m{v_{i,x}}^2}{Sh}.$$

Uočimo u prethodnom izrazu da je Sh volumen cilindra pa imamo

$$p_i = \frac{m{v_{i,x}}^2}{V}. \tag{4}$$

No to je tlak uzrokovan sudarom jedne kuglice, a ukupan tlak jednak je zbroju tlakova izazvanih sudarom svih kuglica u nekom vremenskom intervalu Δt pa zbrajanjem (4) po svim i slijedi

$$p = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{N} {v_{i,x}}^2. \tag{5}$$

Član $\sum_{i=1}^{N} {v_{i,x}}^2$ može se izraziti preko srednje vrijednosti kvadrata x-komponente brzine na način

$$\sum_{i=1}^{N} {v_{i,x}}^2 = N\left\langle {v_x}^2\right\rangle. \tag{6}$$

Uvrštavanjem (6) u (5) dobiva se

$$p = \frac{Nm}{V}\left\langle {v_x}^2\right\rangle. \tag{7}$$

[2] Razni izvodi ovog izraza mogu se naći u [2], [3] i [4].

Budući da u sustavu biljarskih kuglica na stolu ne djeluju vanjske sile vrijedi

$$\langle {v_x}^2 \rangle = \langle {v_y}^2 \rangle . \tag{8}$$

Kako zbog Pitagorinog poučka za svaku kuglicu vrijedi ${v_x}^2 + {v_y}^2 = v^2$, to zbog svojstva aditivnosti srednje vrijednosti i dijeljenja jednadžbe s konstantom slijedi

$$\langle {v_x}^2 \rangle + \langle {v_y}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle . \tag{9}$$

Kombiniranjem (9) i (8) imamo

$$\langle {v_x}^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{2}. \tag{10}$$

Eliminacijom $\langle {v_x}^2 \rangle$ iz (7) i (10), dobiva se

$$p = \frac{Nm}{2V} \langle v^2 \rangle . \tag{11}$$

Uvrštavanjem (2) u (11) dobiva se konačan izraz za tlak biljarskih kuglica na rubove stola

$$p = \frac{mv_0^2}{2V}. \tag{12}$$

Volumen V može se iskazati izrazom

$$V = 2rbl, \tag{13}$$

što uvrštavanjem u (12) daje

$$p = \frac{mv_0^2}{4rbl}. \tag{14}$$

Valja uočiti da bi za idealni plin u nazivniku izraza (10) bio faktor 3 jer je gibanje trodimenzionalno pa bi se uvrštavanjem u (7) dobio ranije spomenuti izraz. Zanimljivo je još uočiti kako izrazi (12) i (14) nemaju parametar N što znači da u promatranom sustavu kuglica tlak koji se opaža na rubovima stola ne ovisi o broju kuglica.

Razdioba brzina kuglica

Sada se može krenuti na razmatranja o razdiobi brzina kuglica. U statističkoj fizici postoji Maxwellova razdioba brzina čestica idealnog plina. Maxwellova je razdioba funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane varijable (brzine čestice)[3]. U ovom odjeljku cilj je izvesti funkciju razdiobe brzina kuglica analognu Maxwellovoj razdiobi.

Razdioba brzina čestica idealnog plina i razdioba brzina biljarskih kuglica na stolu razlikovat će se utoliko što brzina biljarske kuglice ne može biti veća od brzine v_0. Stoga je očito potrebno izvesti prvo razdiobu brzina bez te restrikcije (dakle dvodimenzionalnu Maxwellovu razdiobu), a zatim primijeniti Bayesovu formulu za uvjetnu vjerojatnost kako bi se dobila tražena funkcija razdiobe. Jasno je i da će se struktura funkcije razdiobe brzina kuglica i idealnog plina razlikovati jer je gibanje kuglica dvodimenzionalno, a čestica idealnog plina trodimenzionalno.

Pri izvodu Maxwellove razdiobe koriste se sljedeće dvije pretpostavke:

- vjerojatnost da kuglica ima x komponentu brzine između $v_x + dv_x$ ovisi samo o v_x, a analogno vrijedi i za y komponentu brzine;

[3] Čitatelje koji žele više saznati o vjerojatnosti, distribucijama vjerojatnosti i statistici upućuje se na [5] i [6].

- vjerojatnost ovisi samo o iznosu brzine, a ne i o orijentaciji (odnosno, brzine v_x i $-v_x$ imaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja).

Druga je pretpostavka ispunjena ako je funkcija gustoće razdiobe neka funkcija kvadrata brzine pa po pretpostavkama možemo pisati:

$$dp_x = f\left(v_x^2\right) dv_x$$
$$dp_y = f\left(v_y^2\right) dv_y,$$

gdje je f funkcija gustoće vjerojatnosti koju valja odrediti, a dp_x diferencijal vjerojatnosti (analogan je i dp_y). Po pravilu multiplikacije vjerojatnosti tada vrijedi

$$dp_x dp_y = dp = f\left(v_x^2\right) f\left(v_y^2\right) dv_x dv_y,$$

gdje je dp vjerojatnost da brzina kuglice bude između v i $v+dv$. Neka je

$$\rho(v^2) = f\left(v_x^2\right) f\left(v_y^2\right). \tag{15}$$

Po Pitagorinom poučku imamo

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{16}$$

Uvrštavanjem (16) u (15) dobiva se:

$$\rho(v_x^2 + v_y^2) = f\left(v_x^2\right) f\left(v_y^2\right). \tag{17}$$

Pod pretpostavkom da su ρ i f funkcije istog tipa (npr. obje su eksponencijalne, logaritamske, linearne ili kvadratne), jednadžba (17) je Cauchyjeva funkcijska jednadžba čija su rješenja:

$$f\left(v_x^2\right) = Ce^{-av_x^2}$$
$$f\left(v_y^2\right) = Ce^{-av_y^2}$$
$$\rho(v^2) = C^2 e^{-av^2},$$

gdje su a i C neke pozitivne realne konstante. Konstanta C određuje se iz uvjeta potpune vjerojatnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-av_x^2} dx = 1 \iff C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-av_x^2} dv_x}. \tag{18}$$

Integral u nazivniku izraza (18) je Gaussov integral i njegovo je rješenje opće poznato (a može se naći u [2] i [5])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-av_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{19}$$

pa uvrštavanjem u (18) dobivamo

$$C = \sqrt{\frac{a}{\pi}}. \tag{20}$$

Promotrimo sada očekivanje kvadrata x komponente brzine

$$\left\langle {v_x}^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dp_x = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-av_x^2} dv_x. \tag{21}$$

Integral u (21) moguće je riješiti parcijalnom integracijom na način:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-av_x^2} dv_x = \left[\int_{-\infty}^{\infty} udv = uv\left(\infty\right) - uv\left(-\infty\right) - \int_{-\infty}^{\infty} vdu;\ u = v_x,\ dv = v_x e^{-av_x^2} dv_x\right].$$

Budući da je $u = v_x$, deriviranjem po v_x dobiva se $du = dv_x$. Nadalje, vrijedi:

$$v = \int v_x e^{-av_x^2} dv_x = \left[-av_x^2 = t, \frac{dt}{dv_x} = -2av_x \right]$$
$$= \int v_x e^t \frac{dt}{-2av_x} = \frac{1}{-2a} \int e^t dt = \frac{1}{-2a} e^{-av_x^2}.$$

Sada je moguće izvršiti parcijalnu integraciju:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-av_x^2} dv_x = \lim_{v_x \to \infty} \frac{1}{-2a} e^{-av_x^2} v_x - \lim_{v_x \to -\infty} \frac{1}{-2a} e^{-av_x^2} v_x + \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-av_x^2} dv_x \quad (22)$$

Iz L'Hospitalovog se pravila vidi da su oba limesa u izrazu (22) jednaka 0 pa uvrštavanjem (19) u (22) slijedi traženi integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-av_x^2} dv_x = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (23)$$

Uvrštavanjem (23) u (21) dobiva se

$$\left\langle {v_x}^2 \right\rangle = \frac{1}{2a} \quad (24)$$

Uvažavajući izraze (8) i (9) koji vrijede i u ovom slučaju i uvrštavanjem (24) u iste slijedi

$$\frac{1}{a} = \left\langle v^2 \right\rangle.$$

Uvrštavanjem (2) u prethodni izraz dobiva se vrijednost parametra a

$$a = \frac{N}{v_0^2}. \quad (25)$$

Kombiniranjem (20) i (25) te uvažavanjem $\rho(v^2) = C^2 e^{-av^2}$ imamo

$$\rho(v^2) = \frac{N}{v_0^2 \pi} e^{-N \frac{v^2}{v_0^2}}. \quad (26)$$

Kako je $dp_x dp_y = dp = \rho(v^2) dv_x dv_y$, to uvrštavanjem (26) slijedi

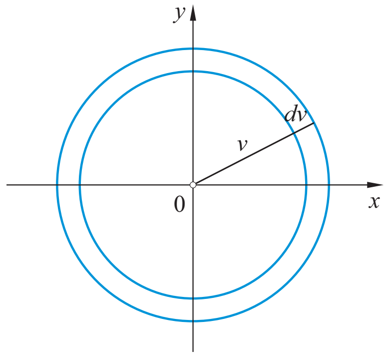
$$dp = \frac{N}{v_0^2 \pi} e^{-N \frac{v^2}{v_0^2}} dv_x dv_y. \quad (27)$$

Član $dv_x dv_y$ je diferencijal površine koja se može zamisliti na sljedeći način. U ravnini stola postavimo koordinatni sustav i u ishodištu tog koordinatnog sustava opišemo kružnice polumjera v i polumjera $v + dv$ kao što je prikazano na slici 1.

Budući da je za vjerojatnost bitno samo da iznos brzine kuglice bude između v i $v + dv$ neovisno o pravcu kretanja, slijedi da je površina $dv_x dv_y$ jednaka površini kružnog vijenca koji tvore koncentrične kružnice sa slike 1 pa stoga vrijedi $dv_x dv_y = 2\pi v dv$.

Uvrštavanjem toga u (27) slijedi

$$dp = \frac{2N}{v_0^2} e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}} v dv. \tag{28}$$



Slika 1. Diferencijal površine u ravnini brzina.

Time je izvedena funkcija gustoće vjerojatnosti za brzinu kuglica, no valja još ispuniti uvjet $v \le v_0$, odnosno uvjet (35). Vjerojatnost događaja uz uvjet da se dogodio neki drugi događaj određuje poznata Bayesova formula

$$p\,(HA) = \frac{p(H)p(AH)}{p(A)},$$

gdje je $p\,(HA)$ vjerojatnost da se dogodio događaj H uz uvjet da se dogodio događaj A, $p(H)$ vjerojatnost da se dogodio događaj H, $p(A)$ vjerojatnost da se dogodio događaj A i $p(AH)$ vjerojatnost da se dogodio događaj A uz uvjet da se dogodio događaj H. U promatranom slučaju događaj H je brzina kuglice je u intervalu između v i $v + dv$, a događaj A koji se sigurno mora dogoditi zbog (1) je da se brzina kuglice nalazi u intervalu između 0 i v_0. Uvrštavanjem (28) u Bayesovu formulu dobivamo

$$dp\,(HA) = \frac{2N}{v_0^2} v \frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}} p(AH)}{p(A)} dv \tag{29}$$

U izrazu (29) derivacija $\dfrac{dp\,(HA)}{dv}$ je gustoća vjerojatnosti od v, tj. $\Psi(v) = \dfrac{dp\,(HA)}{dv}$ pa imamo

$$\Psi(v) = \frac{2N}{v_0^2} v \frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}} p(AH)}{p(A)}. \tag{30}$$

Vjerojatnost $p(A)$ računa se integriranjem (28) na način

$$p(A) = \int_0^{v_0} \frac{2N}{v_0^2} e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}} v dv. \tag{31}$$

Prilikom provođenja parcijalne integracije već je izračunat integral oblika $\int xe^{-ax^2}dx$ i dobiven je rezultat $\frac{1}{-2a}e^{-av_x^2}$. Stoga je integral na desnoj strani izraza (31)

$$p(A) = 1 - e^{-N} \tag{32}$$

Uvrštavanjem (32) u (30) dobiva se

$$\Psi(v) = \frac{2N}{v_0^2}v\frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}}}{1-e^{-N}}p(AH). \tag{33}$$

Preostaje još odrediti vjerojatnost $p(AH)$. To je vjerojatnost da je brzina kuglice manja ili jednaka v_0 uz uvjet da se dogodio događaj brzina kuglice je u intervalu $v + dv$. Stoga očigledno vrijedi:

$$p(AH) = \begin{cases} 0, & v > v_0 \\ 1, & v \leq v_0 \end{cases} \tag{34}$$

Kombiniranjem (34) i (33) dobiva se funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$\Psi(v) = \begin{cases} 0, & v > v_0 \\ \frac{2N}{v_0^2}v\frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}}}{1-e^{-N}}, & v \leq v_0 \end{cases} \tag{35}$$

Vjerojatnost da se brzina kuglice nađe u intervalu između v_1 i v_2 $(v_1 < v_2)$ dobiva se integriranjem (35)

$$P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} \Psi(v)dv. \tag{36}$$

Iz izraza (36) nakon integracije dobiva se funkcija razdiobe vjerojatnosti brzina kuglica:

$$P(v_1, v_2) = \begin{cases} 0, & v_1 \geq v_0 \\ \frac{e^{-N\frac{v_1^2}{v_0^2}} - e^{-N\frac{v_2^2}{v_0^2}}}{1-e^{-N}}, & v_2 \leq v_0 \\ \frac{e^{-N\frac{v_1^2}{v_0^2}} - e^{-N}}{1-e^{-N}}, & v_1 < v_0,\ v_2 > v_0 \end{cases}$$

Lako se uvjeriti da vrijedi

$$\int_0^\infty \Psi(v)dv = 1,$$

čime je ispunjen i uvjet normiranosti funkcije gustoće vjerojatnosti. Također, mora biti zadovoljen uvjet

$$\int_0^\infty v^2\Psi(v)dv = \int_0^{v_0} v^3\frac{2N}{v_0^2}\frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}}}{1-e^{-N}}dv = \frac{v_0^2}{N} \tag{37}$$

Preostaje još provjeriti vrijedi li (37). U tu svrhu valja riješiti integral na lijevoj strani izraza (37). Taj integral rješava se parcijalnom integracijom uz $v^2\frac{2N}{v_0^2}\frac{1}{1-e^{-N}} = u$ i

$dv = ve^{-N\frac{v^2}{v_0^2}}dv$. Nakon provođenja parcijalne integracije[4] dobiva se rješenje:

$$\int_0^{v_0} v^3 \frac{2N}{v_0^2} \frac{e^{-N\frac{v^2}{v_0^2}}}{1-e^{-N}} dv = \frac{v_0^2}{N} \frac{1-e^{-N}(N+1)}{1-e^{-N}} = \frac{v_0^2}{N} - v_0^2 \frac{e^{-N}}{1-e^{-N}}. \tag{38}$$

Izrazi (37) i (38) nisu jednaki, no valja iznaći uvjete u kojima su ti izrazi približno jednaki. Da bi vrijedilo (37) u približnom obliku, tj. $\int_0^\infty v^2\Psi(v)dv \approx \frac{v_0^2}{N}$, iz izraza (38) vidi se da mora vrijediti

$$\frac{v_0^2}{N} \gg v_0^2 \frac{e^{-N}}{1-e^{-N}} \iff 1 \gg e^{-N}(N+1). \tag{39}$$

Neka je $f(N) = e^{-N}(N+1)$. Tada je

$$\frac{d}{dN} f(N) = -\frac{N}{e^N}. \tag{40}$$

Stacionarne točke funkcije $f(N)$ su rješenja jednadžbe $\frac{d}{dN}f(N) = 0$ pa se po (40) vidi da su stacionarne točke $N = 0$ i $N \to \infty$. To znači da je funkcija $f(N)$ na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ monotono rastuća ili monotono padajuća. Kako je prema (40) $\frac{d}{dN}f(N) < 0$ za svaki $N \in \langle 0, \infty \rangle$, slijedi da je na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ funkcija $f(N)$ monotono padajuća. Budući da je $f(5) < 0.041 \ll 1$, za veće vrijednosti N (posebno za one mnogo veće od 5) nejednakost (39) će sigurno biti zadovoljena jer je funkcija $f(N)$ monotono padajuća na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Stoga se s pravom može tvrditi $\int_0^\infty v^2\Psi(v)dv \approx \frac{v_0^2}{N}$. Budući da je zadovoljen uvjet normiranosti i s vrlo velikom točnošću je zadovoljen uvjet (37), slijedi da funkcija gustoće vjerojatnosti $\Psi(v)$ dana izrazom (35) točno opisuje razdiobu brzina kuglica u danim uvjetima.

Zaključak

Kroz tri riješena problema iz statističke fizike na modelu biljarskih kuglica koje se međusobno sudaraju na ravnom biljarskom stolu pokazane su analogije s glavnim zakonima statističke fizike – kvadratom srednje brzine idealnog plina, tlakom idealnog plina i Maxwellovom razdiobom brzina idealnog plina. Članak je tek manji dio onoga što čitatelj može napraviti koristeći razne modele iz svakodnevnog života (ili njihova nerealna, ali lako vizualizirana proširenja kao što je upravo ovaj biljarski stol s kuglicama). Te modele čitatelj može upotrijebiti da primijeni zakone ili ideje iz grana fizike koje se naizgled ne mogu primijeniti na taj sustav, a tek dubljom analizom se uviđa da su ti sustavi slični. To ne mora biti samo primjena statističke fizike na sustave slične idealnom plinu, već i uočavanje analogija između drugih naizgled nepovezanih grana fizike. Samo neke od takvih analogija jesu između mehanike fluida i elektrodinamike te između gravitacijske i Coulombove sile. Veza između elektrodinamike i mehanike fluida najbolje se očituje u tome da je prolazak elektrona kroz žicu sličan toku fluida kroz cijev, a viskoznost i električni opor su pojave koje se mogu opisati jednadžbama istog oblika[5].

[4] Provođenje te parcijalne integracije prepušteno je čitatelju.

[5] Dokaz se može naći u [7] na stranicama 175 i 176.

Tako su i gravitacijska i Coulombova sila opisane izrazima istih oblika pa je jasno da će postojati vrlo velika sličnost između te dvije sile. Takvim se uočavanjem analogija između različitih pojava u fizici bavi teorija sličnosti, koja se najčešće primjenjuje u mehanici fluida pa se stoga zainteresirani čitatelj upućuje na posljednje poglavlje [8].

Literatura

[1] biljar. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020. Pristupljeno 17. 8. 2020. `http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=7669`

[2] Vladimir Šips, *Uvod u statističku fiziku*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[3] Tomislav Petković, *Uvod u znanost o toplini i termodinamici*, Element, Zagreb, 2016.

[4] Ivan Supek, *Teorijska fizika i struktura materije I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[5] Nikola Sarapa, *Vjerojatnost i statistika I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[6] Nikola Sarapa, *Vjerojatnost i statistika II. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

[7] Nikola Cindro, *Fizika I*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[8] Zdravko Virag, *Mehanika fluida I – predavanja*, Udžbenik sveučilišta u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2017.