Približna konstrukcija nekoliko pravilnih poligona

Ivana Marušić[1], *Danijela Erceg*[2]

Prva pojava pravilnih četverokuta, šesterokuta i osmerokuta uočljiva je na egipatskim i babilonskim spomenicima. Oni su bili vidljivi kao crteži na zidovima, ukrasi usječeni u kamenu i napravljeni od kamena. Podjela kruga na jednake dijelove zainteresirala je pitagorejce koji su proučavali konstrukcije pravilnih poligona. Samo učenje o pravilnim poligonima započinje u 6. st. pr. Kr. u Pitagorinoj školi, a nastavlja se u 5. i 4. st. pr. Kr. Euklid je sistematizirao i izložio u IV. knjizi *Elemenata* sve konstrukcije pravilnog trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta te je riješio zadatak konstrukcije pravilnog petnaesterokuta uz pomoć ravnala i šestara. Stari matematičari, iznenađeni ljepotom konstruiranog lika, primjećuju da luk kuta priklona ekliptike prema ekvatoru iznosi $1/15$ same kružnice, odnosno poveznicu sa stranicom pravilnog petnaesterokuta. Znajući konstrukciju pravilnog n-terokuta, jednostavno je konstruirati pravilni $2n$-terokut. Dugi niz godina raspravljalo se o konstrukciji pravilnog sedmerokuta, deveterokuta i jedanaesterokuta iako se nije sa sigurnošću moglo potvrditi da se konstrukcija provodi ravnalom i šestarom. Taj problem riješio je tada 19-godišnji njemački matematičar Karl Friedrich Gauss[3] dokazavši ovaj teorem.

Teorem 1 (Gaussov teorem). *Ako je $n = 2^r p_1 p_2 \cdots p_k$, gdje su $n \geq 3$, $r \geq 0$ i p_i različiti Fermatovi prosti brojevi, pravilni je n-terokut konstruktibilan.*

U svojoj knjizi *Disquisitiones Arithmeticae* na kraju sedmog poglavlja *Sectio septima de aequationibus circuli sectiones definientibus* (o jednadžbama koje definiraju odjeljke kruga), Gauss navodi sljedeće: *"Općenito, dakle, kako bi mogli podijeliti kružnicu geometrijski na N dijelova, N mora biti 2 ili neka veća potencija od 2, ili prost broj oblika $2^m + 1$, ili produkt nekoliko prostih brojeva tog oblika, ili jednog ili nekoliko takvih prostih brojeva s 2 ili nekom većom potencijom od 2. Ukratko, potrebno je da N ne sadrži neparni prosti faktor koji nije oblika $2^m + 1$ niti prosti faktor oblika $2^m + 1$ više od jednom. Ovdje je navedeno 38 vrijednosti broja N manjih od 300: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272."* [[5], str. 463]

U radosnom raspoloženju, Gauss je svoje rješenje problema napisao na malu pločicu i poklonio je svom prijatelju sa studija, mađarskom matematičaru Wolfgangu Bolyaiju.

Osim otprije poznatih pravilnih mnogokuta s 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 20, 24, 30, 32... stranice koji su se mogli konstruirati jednobridnim ravnalom i šestarom, nakon Gaussova otkrića dokazano je da se istim pomagalima mogu konstruirati pravilni mnogokuti sa 17, 34, 68, 136, 256, 272... stranica. Također, koristeći jednobridno ravnalo i šestar konstruirati pravilne mnogokute sa 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27... stranica bilo je nemoguće pa su u staro doba matematičari zbog različitih potreba radili približne konstrukcije pravilnih mnogokuta. Tako je, Heron našao približnu konstrukciju stranice pravilnog deveterokuta, a Bion predložio praktičnu metodu dijeljenja kružnice na devet jednakih dijelova.

[1] Autorica je predavač na Veleučilištu u Bjelovaru; e-pošta: imarusic@vub.hr

[2] Autorica je studentica računarstva na Veleučilištu u Bjelovaru; e-pošta: derceg@vub.hr

[3] (1777. – 1855.), njemački matematičar i astronom

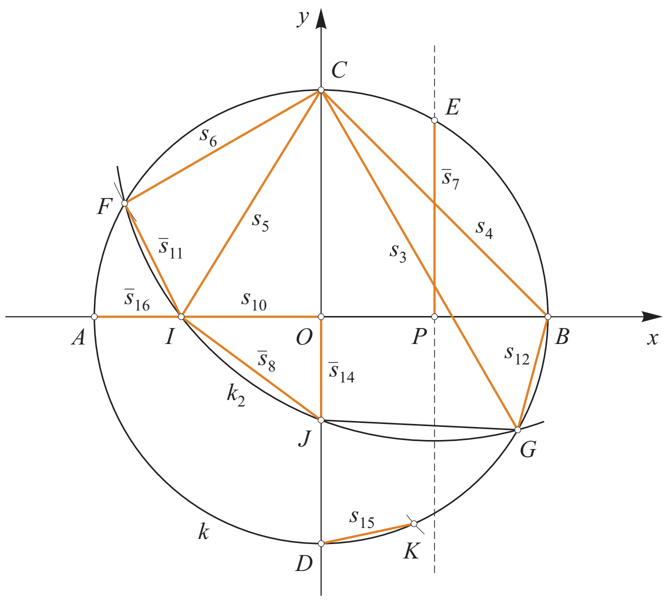
Teorija mnogokuta razvila se u 19. stoljeću i za nju je zaslužan njemački matematičar Möbius.

Pokušajmo riješiti problem koji su matematičari imali u staro doba:

U danu kružnicu k polumjera r upišite pravilni n-terokut.

Opisat ćemo kako se na jednom crtežu mogu očitati stranice nekoliko poligona.

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ međusobno okomiti promjeri te kružnice; točka P polovište dužine $\overline{OB}$ i s simetrala dužine $\overline{OB}$. Simerala s siječe kružnicu k u točki E, a kružnica k_1 sa središtem u C polumjera r siječe k u točki F. Nacrtajmo kružnicu k_2 sa središtem u E i polumjera $|EF|$. Ona siječe pravce AO i OD te kružnicu k redom u točkama I, J, G. Nadalje, opišemo kružnicu k_3 sa središtem u G polumjera $|OI|$ koja kružnicu k siječe u točki K.



Slika 1. Približna konstrukcija nekoliko pravilnih poligona.

Uz ovako navedene oznake vrijedi sljedeće:

$$s_3 = |CG|, \quad s_4 = |CB|, \quad s_5 = |CI|, \quad s_6 = |CF|,$$
$$\overline{s}_7 = |PE|, \quad \overline{s}_8 = |IJ|, \quad s_{10} = |OI|, \quad \overline{s}_{11} = |FI|,$$
$$s_{12} = |BG|, \quad \overline{s}_{14} = |OJ|, \quad s_{15} = |DK|, \quad \overline{s}_{16} = |AI|.$$

Izrazimo prethodne veličine pomoću r koristeći koordinatnu metodu. Koordinatni sustav ima ishodište u točki O, pravac AB je os apscisa, a pravac CD os ordinata. U tom koordinatnom sustavu istaknute točke imaju ove koordinate:

$$O(0,0), \quad A(-r,0), \quad B(r,0), \quad C(0,r), \quad D(0,-r), \quad P\left(\frac{r}{2},0\right).$$

Jedno rješenje sustava:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = \frac{r}{2}$$

točka je $E\left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$.

Jednadžba kružnice k_1 sa središtem C i polumjerom r glasi

$$x^2 + y^2 - 2yr = 0.$$

Uvrštavanjem jednadžbe kružnice k u jednadžbu kružnice k_1 dobivamo dvije točke od kojih je jedna tražena točka $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$. Duljina dužine $\overline{EF}$ polumjer je kružnice k_2 sa središtem u E. Jednadžba kružnice k_2 sa središtem E i polumjerom $|EF| = r\sqrt{2}$ glasi

$$x^2 - xr + y^2 - yr\sqrt{3} - r^2 = 0.$$

Rješavanjem sustava:

$$\begin{aligned} x^2 - xr + y^2 - yr\sqrt{3} - r^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

dobivamo dvije točke od kojih je jedna točka $I\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}r, 0\right)$.

Nadalje, jedno od dva rješenja sustava:

$$\begin{aligned} x^2 - xr + y^2 - yr\sqrt{3} - r^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

je točka $J\left(0, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}r\right)$.

Točku $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}r\right)$ dobili smo rješavajući sustav:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 - xr + y^2 - yr\sqrt{3} - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jednadžba kružnice k_3 sa središtem G i polumjerom $|OI| = r\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ glasi

$$2x^2 - 2xr\sqrt{3} + 4y^2 + 2ry - r^2(1-\sqrt{5}) = 0.$$

Rješenje sustava:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ 2x^2 - 2xr\sqrt{3} + 4y^2 + 2ry - r^2(1-\sqrt{5}) &= 0 \end{aligned}$$

točke su presjeka kružnice k i kružnice k_3. Nama je potrebna točka

$$K\left(\frac{r}{4}\sqrt{\frac{14+2\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}-\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{2}}, \frac{-(1+\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})})}{8}r\right).$$

Konačno, dobivamo:

$$s_3 = |CG| = r\sqrt{3}, \quad s_4 = |CB| = r\sqrt{2}, \quad s_5 = |CI| = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad s_6 = |CF| = r,$$

$$\bar{s}_7 = |PE| = r\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{s}_8 = |IJ| = r\sqrt{\frac{8-\sqrt{5}-\sqrt{21}}{2}}, \quad s_{10} = |OI| = r\sqrt{\frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2}},$$

$$\bar{s}_{11} = |FI| = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}}, \quad s_{12} = |BG| = r\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\bar{s}_{14} = |OJ| = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}, \quad s_{15} = |DK| = \frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}},$$

$$\bar{s}_{16} = |AI| = r\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}.$$

Promatramo li karakterističan trokut pravilnog n-terokuta jednostavno dolazimo do formule za duljinu stranice pravilnog n-terokuta

$$s_n = 2r\sin\frac{\pi}{n}.$$

Za $n = 3$ je $s_3 = r\sqrt{3}$ i nema pogreške u konstrukciji. Pogreške u konstukciji nema ni za s_4, s_5, s_6, s_{10}, s_{12} i s_{15}.

Zanimljivo je vidjeti za koliko se $\bar{s}_n$ razlikuje od duljine stranice s_n pravilnog n-terokuta.

Za $n = 7$ je $s_7 = 0.867767r$, dok je u našoj konstrukciji $\bar{s}_7 = 0.866025r$ pa je relativna pogreška $\dfrac{s_7 - \bar{s}_7}{s_7} = 0.2$ %, što je potpuno zadovoljavajuće za praktične potrebe. Primijetimo da se na slici 1 pojavljuju približne stranice za neke poligone koji se mogu konstruirati ($n = 8$, $n = 16$). Pogledajmo relativne pogreške svih preostalih aproksimacija:

$$\Delta_8 = -0.416\ \%, \quad \Delta_{11} = -0.948\ \%, \quad \Delta_{14} = -2.653\ \%, \quad \Delta_{16} = 2.105\ \%,$$

Negativna relativna pogreška pojavit će se kada je duljina približne stranice veća od duljine stranice poligona.

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[2] V. Benčić, *Elementarna geometrija II. dio za pedagoške akademije*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[3] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[4] S. Varošanec, *O konstrukcijama pravilnih poligona*, Zbornik radova 3. susreta nastavnika matematike, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[5] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae in commission apud Gerh. Fleischer, 1801.