Zanimljive primjene Schurove[1] nejednakosti

Šefket Arslanagić[2], *Daniela Zubović*

U ovom ćemo članku koristeći Schurovu nejednakost dokazati dvije zanimljive algebarske nejednakosti koje se bez nje dokazuju znatno teže.

Promatrajmo sljedeće nejednakosti:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant 2(xy+yz+zx), \quad x,\, y,\, z > 0, \tag{1}$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant 2, \quad x,\, y,\, z > 0. \tag{2}$$

"Dokaz" od (1). Napišimo ovu nejednakost u obliku:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant (xy+yz+zx)+(xy+yz+zx).$$

Poznato je da vrijedi nejednakost:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx, \quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$(\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0).$$

Sada bi bilo dovoljno dokazati

$$\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant xy+yz+zx. \tag{4}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

kao i

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx},$$

tj.

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$

odnosno

$$x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$xy+yz+zx \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Nakon množenja ovih nejednakosti dobivamo:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geqslant 9\sqrt[3]{x^3y^3z^3},$$

tj.

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geqslant 9xyz,$$

---

[1] Issai Schur, njemački matematičar rođen 1875. godine u Carskoj Rusiji, a umro u Tel Avivu, 1941. godine.

[2] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

a odavde

$$\frac{9xyz}{x+y+z} \leqslant xy+yz+zx \tag{5}$$

no ovo nije nejednakost (4), tj. iz nejednakosti (3) i (5) ne slijedi nejednakost (1).

"Dokaz" od (2). Imamo dobro nam poznatu Nesbitovu nejednakost:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}, \quad x,\ y,\ z>0. \tag{6}$$

Napomena 1. Ukupno 24 razna dokaza nejednakosti (6) se može naći u [2], [3] i [4].

Preostaje nam sada dokazati nejednakost

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant \frac{1}{2}, \quad x,\ y,\ z>0. \tag{7}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za po dva pozitivna broja, imamo:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx},$$

odnosno

$$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad y+z \geqslant 2\sqrt{yz}, \quad z+x \geqslant 2\sqrt{zx},$$

a odavde nakon množenja ovih nejednakosti:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8\sqrt{x^2y^2z^2},$$

tj.

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$$

ili

$$\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leqslant \frac{1}{2} \tag{8}$$

Dakle, ne vrijedi nejednakost (7), tj. nakon zbrajanja nejednakosti (6) i (8) ne slijedi (2).

Sada je jasno zašto smo u ovim dokazima napisali "Dokaz".

Postavlja se sada opravdano pitanje da li vrijede nejednakosti (1) i (2), te ako vrijede kako ih dokazati.

Za njihov dokaz ćemo koristiti poznatu Schurovu nejednakost koja glasi:

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0, \quad x,\ y,\ z>0, \quad r \in \mathbb{R}^+ \tag{9}$$

s jednakošću ako i samo ako je $x=y=z$.

Dva različita dokaza ove nejednakosti se mogu naći u [1].

Za $r=1$ iz nejednakosti (9) dobivamo:

$$\begin{aligned} & x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geqslant 0 \\ \iff\ & x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Sređivanjem dobivamo

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant 2(xy+yz+zx),$$

$$\iff (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+9xyz \geqslant 2(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\begin{aligned} \iff\ & x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+9xyz \\ & \geqslant 2\left(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz\right) \\ \iff\ & x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2, \end{aligned}$$

a ovo je nejednakost (10). Ovime je nejednakost (1) dokazana.

Slično imamo:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant 2,$$

$$\iff x(z+x)(x+y)+y(y+z)(x+y)+z(y+z)(z+x)+4xyz \geqslant 2(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\begin{aligned} & x(x^2+xy+xz+yz)+y(y^2+xy+yz+xz)+z(z^2+yz+xz+xy)+4xyz \\ & \geqslant 2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+2xyz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff\ & x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+7xyz \\ & \geqslant 2x^2y+2xy^2+2y^2z+2yz^2+2x^2z+2xz^2+4xyz \\ \iff\ & x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2, \end{aligned}$$

a ovo je opet nejednakost (10). Dakle, dokazali smo i nejednakost (2).

Jednakosti u (1) i (2) vrijede ako i samo ako je $x=y=z$.

Napomena 2. Pokušajte dokazati nejednakosti (1) i (2) ne koristeći Schurovu nejednakost.

Napomena 3. Schurova nejednakost (9) za $r=2$ glasi:

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqslant xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)$$

i može se napisati u više ekvivalentnih oblika.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[4] Š. Arslanagić, D. Zubović, *Nesbitova nejednakost – još tri dokaza i jedna primena*, Tangenta, Beograd, 2020./21., 1–5.