ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2022. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/289.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

3847. Nađi dvoznamenkasti pozitivan cijeli broj čiji je omjer sa zbrojem njegovih znamenaka minimalan.

3848. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$(16x^2-9)^3+(9x^2-16)^3=(25x^2-25)^3.$$

3849. Neka su a i b pozitivni brojevi takvi da je

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=5\sqrt{5ab}.$$

Dokaži da je

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}.$$

3850. Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)\geq 3.$$

3851. Postoji li pozitivan cijeli broj x koji zadovoljava nejednadžbu

$$\left|5+\log_x\frac{1}{5}\right|<\frac{8}{5}?$$

3852. Nađi sve parove (a,b) realnih brojeva za koje sustav jednadžbi

$$20x^2+20y^2+ax+by+18=0$$

$$18x^2+18y^2+ax+by+20=0$$

ima zajedničko rješenje.

3853. Točka P je unutar trokuta ABC takva da je $\sphericalangle ABP=\sphericalangle PCA=10^\circ$, $\sphericalangle CAP=20^\circ$ i $\sphericalangle PAB=30^\circ$. Dokaži da je $\triangle ABC$ jednakokračan.

3854. Neka je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC. Nadalje, točke $D\in\overline{AB}$, $E\in\overline{BC}$ i $F\in\overline{AC}$ zadovljavaju uvjete $|AD|=|BE|=|CF|=x$.

a) Dokaži da je trokut DEF jednakostraničan.

b) Nađi vrijednost parametra x za koji je površina trokuta DEF minimalna.

3855. Dan je pravokutnik $ABCD$, $|AB|<|BC|$. Na stranici $\overline{AD}$ je točka E takva da je $|BE|=|BC|$. Pravac kroz C okomit na BD siječe AB u F. Dokaži da je $\sphericalangle BEF$ pravi kut.

3856. Dan je trokut ABC. Pravci AD i AE su okomice iz vrha A na simetrale kutova C i B, tim redom. Dokaži $DE\parallel BC$.

3857. Dvije kružnice se dodiruju izvana, a PAB i PA_1B_1 su zajedničke tangente, pri čemu je $|PA|=|AB|=d$. Kolika je površina manjeg kruga?

3858. Ako su c i h duljine hipotenuze i visine pravokutnog trokuta, dokaži nejednakost

$$\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geq\frac{5}{2}.$$

3859. Novčić A se baca tri puta, a novčić B četiri puta. Kolika je vjerojatnost da je broj glava u oba slučaja jednak?

3860. Stol za biljar ima oblik kruga polumjera R. Biljarska kugla se nalazi na stolu u položaju K i udaljena je od njegova središta O za d. Pod kojim kutom prema OK treba udariti kuglu da ona nakon druge refleksije od ruba stola opet prođe kroz položaj K?

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 498. Učenik ima dvije vrste utega od kojih jedni imaju 3 puta veću masu od drugih. Kad na istu oprugu objesi 3 manja utega njena je duljina 19 cm, a kad objesi dva veća dugačka je 25 cm. Kolika je duljina neopterećene opruge?

OŠ – 499. Automobil se dvije trećine vremena gibao jednolikom brzinom, a trećinu je vremena jednoliko ubrzavao pri čemu je postigao dvostruko veću brzinu od početne. Koliki je omjer prijeđenih putova u prvom i drugom dijelu gibanja?

OŠ – 500. Predmet visok 3 cm se nalazi na optičkoj osi ispred sabirne leće koja stvara stvarnu sliku visoku 6 cm. Kad se predmet približi leći za 15 centimetara nastaje prividna slika visoka 12 cm. Kolika je jakost te leće?

OŠ – 501. Zemlji za jedan okret oko Sunca treba 365 dana i 6 sati, pa kažemo da godina ima 365 dana, a onih 6 sati brojimo zajedno svake prijestupne godine. Nekada je Zemlja brže rotirala oko svoje osi pa je godina imala 385 dana. Do promjena u brzini rotacije dolazi zbog promjena u udaljenosti Zemlje i Mjeseca. Kad bi te nekadašnje kraće dane podijelili na 24 sata koliko bi taj svaki sat imao sadašnjih minuta?

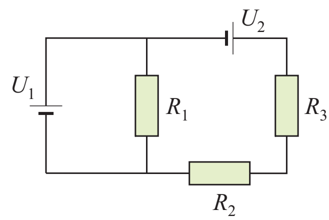
1777. Tijelo pada s vrha zgrade na tlo tako da u posljednjoj sekundi gibanja prevali 60.8 % visine zgrade. Ako je brzina izbačaja s vrha zgrade 7.9 m/s (prema dolje), odredi visinu zgrade i vrijeme pada tijela. Otpor zraka zanemariti.

1778. Balon napunjen vodikom ima volumen 8.5 l. Odredi s koliko grama željeza možemo opteretiti balon da bi i dalje letio. Gustoće su: zrak 1.16 kg/m^3, vodik 0.08 kg/m^3 i željezo 7875 kg/m^3. Masa balona je 5 g, a volumen materijala balona i željeza je zanemariv.

1779. Top ispucava granate početnom brzinom iznosa v_0, uz domet D i vrijeme leta T. Uz 31 m/s veću brzinu ispucavanja od v_0 i isti kut izbačaja, domet se poveća za 1530 m, a vrijeme leta za 3.9 s. Odredi početnu brzinu v_0 i kut izbačaja granate. Otpor zraka zanemariti.

1780. Koliko dana (izmjena dan-noć) na Marsu protekne u jednoj marsovoj godini (jedan krug oko Sunca)? Izračunaj koristeći sljedeće podatke: period rotacije Marsa (siderički dan) traje 24 h 37 min i 23 s, a obiđe Sunce za 1.8808 Zemljinih godina.

1781. Odredi struju i napon otpornika R_2 na shemi. $U_1 = 7$ V, $U_2 = 14$ V, $R_1 = 7\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$.



1782. Automobil se penje uz kosinu konstantnog nagiba jednolikom brzinom. Pri snazi motora od 36.8 kW, brzina iznosi 48 km/h, a pri snazi 46.8 kW brzina je 60 km/h. Koliko se povećala sila otpora zraka na automobil?

1783. Komet se giba oko Sunca tako da mu je brzina u perihelu 54 % veća od brzine u afelu. Odredi numerički ekscentricitet putanje kometa.

C) Rješenja iz matematike

3819. *Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$x^2 - 16x + 9y^2 - 2xy + 72 = 0.$$

Rješenje. Danu jednadžbu promatramo kao kvadratnu jednadžbu po nepoznanici x i pišemo ju u obliku

$$x^2 - 2(y+8)x + 9y^2 + 72 = 0.$$

Računamo njezinu diskriminantu

$$\begin{aligned} D &= [-2(y+8)]^2 - 4 \cdot 9 \cdot (y^2+8) \\ &= -32y^2 + 64y - 32 \\ &= -32 \cdot (y-1)^2. \end{aligned}$$

Da bi rješenja bila realna nužno je da je ona nenegativna, a da bi bila cjelobrojna ona mora biti i potpun kvadrat. Ali, očito je $D \leq 0$ za svaki realan broj y, i jedino moguće je $y = 1$. U tom slučaju polazna jednadžba prelazi u kvadratnu

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$

koja ima jedno dvostruko rješenje $x_{1,2} = 9$. Znači, dana jednadžba ima jedno cjelobrojno (ali i samo jedno realno) rješenje koje zapisujemo kao uređeni par

$$(x, y) = \{(9, 1)\}.$$

Marko Dodig (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3820. *Dani su realni borjevi x i y takvi da je*

$$(x+y)^4 + (x-y)^4 = 4112$$
$$x^2 - y^2 = 16.$$

Odredi $x^2 + y^2$.

Rješenje. Uvedemo supstituciju $u = x + y$ i $v = x - y$, pa sada uvjeti zadatka glase:

$$u^4 + v^4 = 4112$$
$$uv = 16,$$

i treba odrediti vrijednost $x^2 + y^2 = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$.

Sada je iz

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= 4112 \\ (u^2 + v^2)^2 &= 4112 + 2 \cdot (uv)^2 \\ &= 4112 + 2 \cdot 256 \\ &= 4624. \end{aligned}$$

Kako je tražena vrijednost zbroj kvadrata uzimamo samo pozitivan korijen, znači

$$x^2 + y^2 = \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{\sqrt{4624}}{2} = \frac{68}{2} = 34.$$

Borna Gojšić (3), Gimnazija Karlovac, Karlovac

3821. *Produkt dva od četiri korijena jednadžbe*

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

je -32. Odredi parametar k.

Rješenje. Neka su α, β, γ i δ korijeni dane jednadžbe i neka je npr. $\alpha\beta = -32$. Vièteove formule za ovu jednadžbu glase:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 18$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = k$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -200$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = -1984.$$

Sada je $\gamma\delta = \dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\beta} = \dfrac{-1984}{-32} = 62$. Zadanu jednadžbu možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} &x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 \\ &= (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot(x-\delta) \\ &= \left(x^2 - px - 32\right)\cdot\left(x^2 - qx + 62\right) \end{aligned}$$

za neke realne brojeve p i q. Uspoređujući koeficijente na obje strane jednadžbe dobivamo:

$$p + q = 18$$
$$-62p + 32q = 200$$
$$k = 62 + pq - 32.$$

Prve dvije jednadžbe riješimo kao linearni sustav i dobivamo $p = 4$ i $q = 14$, a iz treće je

$$k = 30 + pq = 86.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3822. *Za pozitivne brojeve a, b, c takve da je $a+b+c = 1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza*

$$S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}.$$

Rješenje. Najprije promatramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i pokazat ćemo da je ona konkavna. To znači da za x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Iz ove nejednakosti slijedi redom:

$$\sqrt[3]{\frac{x_1 + x_2}{2}} \geq \frac{\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}}{2} \quad \Big/\ ^3$$

$$\iff \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right) + x_2}{8}$$

$$\iff x_1 + x_2 \geq \sqrt[3]{x_1x_2}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)\left(\sqrt[3]{x_1^2} - \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}\right) \geq \sqrt[3]{x_1x_2}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)\left(\sqrt[3]{x_1^2} - 2\sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}\right) \geq 0$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)\left(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}\right)^2 \geq 0$$

Budući da je za pozitivne brojeve posljednja nejednakost očita, dokazali smo konkavnost funkcije trećeg korijena za pozitivne brojeve.

Dalje ćemo koristiti Jansenovu nejednakost za konkavne funkcije:

Ako je realna funkcija f konkavna na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a,b\rangle$ onda vrijedi nejednakost:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Sada je specijalno za $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$ i $x_3 = c+a$:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a} \\ &= f(a+b)+f(b+c)+f(c+a) \\ &\leq 3\cdot f\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right) = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{18}. \end{aligned}$$

Prema tome, maksimalna vrijednost danog izraza iznosi $\sqrt[3]{18}$ i postiže se ako je $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Marko Dodig (3), Zagreb

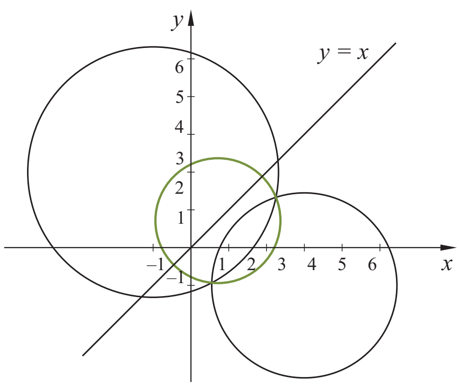
3823. *Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi kroz sjecišta kružnica*

$$x^2+y^2-6x+2y+4=0,$$
$$x^2+y^2+2x-4y-6=0,$$

a središte joj je na pravcu $y=x$.

Rješenje. Da bismo našli presjek ovih dviju kružnica moramo riješiti sustav jednadžbi:

$$x^2+y^2-6x+2y+4=0$$
$$x^2+y^2+2x-4y-6=0.$$



Oduzmemo li ove dvije jednadžbe dobivamo njemu ekvivalentan sustav:

$$x^2+y^2-6x+2y+4=0$$
$$8x-6y-10=0.$$

Iz druge jednadžbe je $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$ i uvrštavanjem u prvu sustava slijedi

$$x^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)^2-6x+2\cdot\left(\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)+4=0$$

odnosno jednostavnim sređivanjem imamo kvadratnu jednadžbu

$$25x^2-70x+31=0$$

$$\Longrightarrow x_{1,2}=\frac{7}{5}\pm\frac{3}{5}\sqrt{2} \Longrightarrow y_{1,2}=\frac{1}{5}\pm\frac{4}{5}\sqrt{2}.$$

Dakle, točke presjeka danih kružnica su

$$A\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{5}\sqrt{2}, \frac{1}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{2}\right) \quad \text{i}$$

$$B\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\sqrt{2}, \frac{1}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\right).$$

Tražimo kružnicu čija je jednadžba $(x-p)^2+(y-p)^2=r^2$ i koja prolazi točkama A i B. Uvrštavanjem njihovih koordinata imamo sustav:

$$\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{5}\sqrt{2}-p\right)^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{2}-p\right)^2=r^2$$
$$\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\sqrt{2}-p\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{2}-p\right)^2=r^2.$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi, te primjenom formule za razliku kvadrata je

$$\frac{6}{5}\sqrt{2}\cdot\left(\frac{14}{5}-2p\right)+\frac{8}{5}\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-2p\right)=0$$
$$\Longrightarrow p=\frac{5}{7}.$$

Iz bilo koje od gornjih dviju jednadžbi je još $r^2=\frac{134}{49}$, pa je jednadžba tražene kružnice

$$\left(x-\frac{5}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=\frac{134}{49}$$

odnosno njezin opći oblik

$$7x^2+7y^2-10x-10y-12=0.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3824. *Nađi realan broj a takav da funkcija*

$$f(x)=\frac{5x-1}{x^2+x}+a\cdot\frac{5x+1}{x^2-x}$$

bude neparna?

Rješenje. Budući ne smijemo dijeliti nulom, najprije naznačimo da je domena dane funkcije $\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\}$. Uvjet neparnosti daje:

$$f(-x)=-f(x)$$

$$\frac{5(-x)-1}{(-x)^2+(-x)}+a\cdot\frac{5(-x)+1}{(-x)^2-(-x)}=-\frac{5x-1}{x^2+x}-a\cdot\frac{5x+1}{x^2-x}$$

$$\frac{-5x-1}{x^2-x}+a\cdot\frac{-5x+1}{x^2+x}=-\frac{5x-1}{x^2+x}-a\cdot\frac{5x+1}{x^2-x}$$

$$a\cdot\frac{5x+1}{x^2-x}-\frac{5x+1}{x^2-x}=\frac{-5x+1}{x^2+x}-a\cdot\frac{-5x+1}{x^2+x}$$

$$(a-1)\cdot\frac{5x+1}{x^2-x}=(a-1)\cdot\frac{5x-1}{x^2+x}.$$

Ovdje su moguća dva slučaja:

a) Ako je $a=1$ tada posljednja jednakost postaje trivijalni identitet. Dakle, tada jednakost vrijedi pa je i dana funkcija neparna.

b) Ako je $a\neq1$ posljednju jednakost možemo podijeliti s $a-1$:

$$\frac{5x+1}{x^2-x}=\frac{5x-1}{x^2+x}$$

odakle množenjem s $x(x-1)(x+1)$ i sređivanjem dobivamo $x=0$, a to nije moguće zbog domene funkcije.

Dakle, naša funkcija je neparna samo u slučaju kada je $a=1$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3825. *Neka je O središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži identitet*

$$\frac{|OA|^2}{bc}+\frac{|OB|^2}{ac}+\frac{|OC|^2}{ab}=1.$$

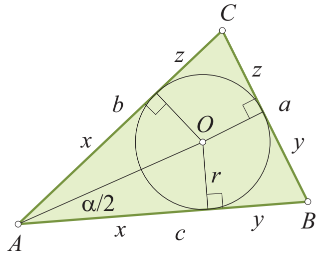
Rješenje. Uz oznake kao na slici najprije imamo:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$$

$$\Longrightarrow\ x=s-(y+z)=s-a$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{r}$$

$$\Longrightarrow\ x=s-a=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$



Sada je još: $|OA|=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ i po formuli za površinu trokuta $bc=\dfrac{2P}{\sin\alpha}$. Dobivamo

$$\frac{|OA|^2}{bc}=\frac{\frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{2P}{\sin\alpha}}=\frac{r^2\cdot2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2P\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{P}=\frac{r(s-a)}{P}.$$

Analogno dobijemo da je:

$$\frac{|OB|^2}{ac}=\frac{r(s-b)}{P}$$

i

$$\frac{|OC|^2}{ab}=\frac{r(s-c)}{P}.$$

Konačno je:

$$\frac{|OA|^2}{bc}+\frac{|OB|^2}{ac}+\frac{|OC|^2}{ab}$$

$$=\frac{r(s-a)}{P}+\frac{r(s-b)}{P}+\frac{r(s-c)}{P}$$

$$=\frac{r}{P}\cdot(3s-a-b-c)=\frac{rs}{P}=\frac{P}{P}=1.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

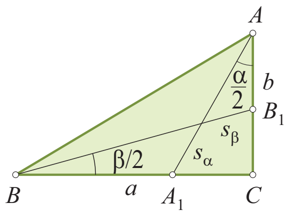
3826. *Neka su $|AA_1|=s_\alpha$ i $|BB_1|=s_\beta$ duljine simetrala unutarnjih šiljastih kutova pravokutnog trokuta ABC. Dokaži da vrijedi nejednakost $s_\alpha s_\beta\geq4P(2-\sqrt{2})$, gdje je P površina trokuta.*

Prvo rješenje. Imamo:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{s_\alpha} \implies s_\alpha=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{a}{s_\beta} \implies s_\beta=\frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$P=\frac{ab}{2}.$$



Nadalje,

$$\begin{aligned}
s_\alpha s_\beta &= \frac{ab}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\\
&= \frac{2P}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \frac{2P}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2}+\sin 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \frac{2P}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)}\\
&= \frac{2\sqrt{2}P}{\frac{\cos\alpha+1}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}}\\
&= \frac{4\sqrt{2}P}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Iz identiteta

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 &= 1+2\sin\alpha\cos\alpha\\
&= 1+\sin 2\alpha \leqslant 2
\end{aligned}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha+1 \leqslant \sqrt{2}+1$$

$$\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
s_\alpha s_\beta &= \frac{4\sqrt{2}P}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \geqslant \frac{4\sqrt{2}P}{\sqrt{2}+1}\\
&= 4P(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

Drugo rješenje. Koristeći formule za duljinu simetrala unutarnjih šiljastih kutova pravokutnog trokuta

$$s_\alpha=b\sqrt{\frac{2c}{b+c}},\quad s_\beta=a\sqrt{\frac{2c}{a+c}},$$

te formule za površinu $P=\frac{ab}{2}$ dana nejednakost postaje ekvivalentna nejednakosti:

$$\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \geq 2-\sqrt{2}. \qquad (*)$$

Sada iskoristimo poznate nejednakosti

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ i $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\\
&= \sqrt{\frac{c^2}{ab+c^2+c(a+b)}}\\
&= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab+(a^2+b^2)+\sqrt{a^2+b^2}(a+b)}}\\
&\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2+b^2)+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2(a^2+b^2)}}}\\
&\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2+b^2)+\sqrt{2}(a^2+b^2)}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3+2\sqrt{2}}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\\
&= 2-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ovim je dokazana nejednakost $(*)$, pa i zadana.

Marko Dodig (3), Zagreb

3827. *Unutarnji kut γ trokuta ABC podijeljen je zrakama $a_1, \ldots, a_{n-1}$ na n jednakih dijelova. S $C_1, \ldots, C_{n-1}$ su označene točke u kojima te zrake sijeku stranicu $\overline{AB}$. Dokaži da je*

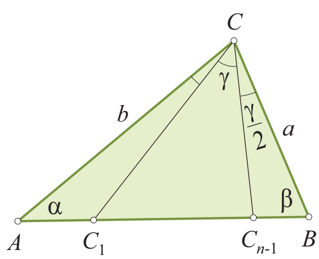
$$\frac{\frac{1}{|AC_1|}-\frac{1}{|AB|}}{\frac{1}{|C_{n-1}B|}-\frac{1}{|AB|}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Rješenje. Iz poučka o sinusima imamo:

$$|AC_1| = b\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{n}}{\sin\left(\pi-\alpha-\frac{\gamma}{n}\right)} = b\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{n}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)}$$

$$|C_{n-1}B| = a\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{n}}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)}$$

$$|AB| = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$



Tada je

$$\frac{\frac{1}{|AC_1|}-\frac{1}{|AB|}}{\frac{1}{|C_{n-1}B|}-\frac{1}{|AB|}} = \frac{\frac{1}{b}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)}{\sin\frac{\gamma}{n}}-\frac{1}{b}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)}{\sin\frac{\gamma}{n}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)\sin\gamma-\sin\beta\sin\frac{\gamma}{n}}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)\sin\gamma-\sin\alpha\sin\frac{\gamma}{n}}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\Big(\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}+\gamma\right) - \cos\left(\beta-\frac{\gamma}{n}\right)+\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)\Big/$$
$$\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)-\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}+\gamma\right) - \cos\left(\alpha-\frac{\gamma}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)\Big)$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\Big(\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)-\cos\left(\pi-\beta+\frac{\gamma}{n}\right) - \cos\left(\beta-\frac{\gamma}{n}\right)+\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)\Big/$$
$$\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)-\cos\left(\pi-\alpha+\frac{\gamma}{n}\right) - \cos\left(\alpha-\frac{\gamma}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)\Big)$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)+\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}\right)}{\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{n}-\gamma\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{n}\right)}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\frac{\gamma}{n}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\frac{\gamma}{n}\right)\cos\left(\frac{-\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a^2}{b^2}.$$

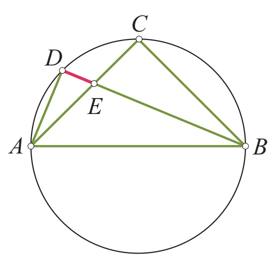
Borna Gojšić (3), Karlovac

3828. *Dana je kružnica s promjerom $\overline{AB}$. Točke C i D su na kružnici s iste strane od AB, pri čemu BD raspolavlja kut $\sphericalangle ABC$. Tetive $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u E. Ako je $|AB| = 169$ i $|CE| = 119$, koliko je $|ED|$?*

Rješenje. Kako BE raspolavlja $\sphericalangle ABC$ imamo

$$\frac{|CB|}{|AB|}=\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{119}{169}.$$

Imamo $|BC| = 119y$ i $|AB| = 169y$ za neko y.



Kako je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ imamo

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$
$$(169y)^2 = (169+119)^2 + (119y)^2$$
$$y^2(169-119)(169+119) = (169+119)^2$$
$$y^2 = \frac{169+119}{169-119} = \frac{144}{25}$$

tj. $y = \dfrac{12}{5}$.

Iz trokuta BCE imamo

$$|BC| = \sqrt{|CE|^2 + |BC|^2} = \sqrt{119^2 + \left(119 \cdot \frac{12}{5}\right)^2} = 119 \cdot \frac{13}{5}.$$

Kako su trokuti ADE i BCE slični imamo

$$|ED| = \frac{|AE| \cdot |CE|}{|BE|} = \frac{169 \cdot 119}{119 \cdot \frac{13}{5}} = 65.$$

Ur.

3829. *Ako je c hipotenuza i h visina pravokutnog trokuta, dokaži nejednakost*

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2}.$$

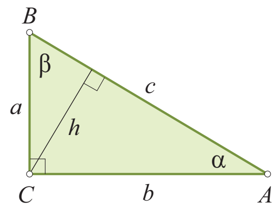
Prvo rješenje. Koristimo Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$ i formule $P = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{ch}{2}$ pa je:

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2} \quad / \cdot 2hc$$
$$\iff 2c^2 + 2h^2 \geq 5hc$$
$$\iff 2(a^2+b^2) + 2\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \geq 5 \cdot \frac{ab}{c} \cdot c$$
$$\iff 2(a^2+b^2) + 2 \cdot \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \geq 5ab \quad / \cdot (a^2+b^2)$$
$$\iff 2(a^2+b^2)^2 + 2a^2b^2 \geq 5ab(a^2+b^2)$$
$$\iff 2a^4 + 6a^2b^2 + 2b^4 \geq 5ab(a^2+b^2)$$
$$\iff 2a^4 - 4a^2b^2 + 2b^4 \geq 5ab(a^2+b^2) - 10a^2b^2$$
$$\iff 2\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 5ab\left(a^2+b^2-2ab\right)$$
$$\iff 2(a-b)^2(a+b)^2 - 5ab(a-b)^2 \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2\left[2(a+b)^2 - 5ab\right] \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2\left(2a^2 - ab + 2b^2\right) \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2 \underbrace{\left[2(a-b)^2 + 3ab\right]}_{>0} \geq 0.$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi, pa vrijedi i ona iz uvjeta zadatka. Jednakost se postiže u slučaju kad je $a = b$ tj. za jednakokračni pravokutni trokut.

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka su α i β, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ kutovi trokuta uz hipotenuzu. Tada je $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$.



Nadalje, $h = a\sin\beta = c\sin\alpha\sin\beta$. Tada je

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} = \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \frac{2}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + \sin 2\alpha\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt[5]{\frac{1}{\sin^3 2\alpha}} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Jednakost se postiže za $\sin 2\alpha = 1$, tj. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Borna Gojšić (3), Karlovac

3830. *Odredi maksimalnu vrijednost izraza*

$$3\sin\left(x + \frac{\pi}{9}\right) + 5\sin\left(x + \frac{4\pi}{9}\right)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t = x + \frac{\pi}{9}$, pa imamo funkciju:

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\sin t + 5\cdot \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\sin t + 5\left(\sin t\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos t\cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\sin t + \frac{5}{2}\sin t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos t \\ &= \frac{11}{2}\sin t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos t \\ &= 7\left(\frac{11}{14}\sin t + \frac{5\sqrt{3}}{14}\cos t\right). \end{aligned}$$

Sada primijetimo da se može naći kut φ u prvom kvadrantu, takav da je $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ i $\cos\varphi = \frac{11}{14}$, jer je

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2 + \left(\frac{11}{14}\right)^2 \\ &= \frac{75}{196} + \frac{121}{196} = 1. \end{aligned}$$

Zato je:

$$\begin{aligned} y(t) &= 7\cdot(\sin t\cos\varphi + \cos t\sin\varphi) \\ &= 7\cdot\sin(t+\varphi). \end{aligned}$$

Kako je uvijek $\sin(t+\varphi) \leq 1$, maksimalna vrijednost danog izraza se postiže u slučaju jednakosti i ona iznosi $y(t)_{\max} = 7$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3831. *Odredi sumu*

$$S_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}.$$

Odredi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Rješenje. Koristimo formulu

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} &= \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{18} &= \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Odavde naslućujemo da bi moglo vrijediti $S_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}$, a da to i vrijedi pokazat ćemo matematičkom indukcijom. Kako bazu indukcije već imamo, sada ćemo pretpostaviti da vrijedi $S_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}$ i dokazati da je $S_{n+1} = \operatorname{arc\,tg}\frac{n+1}{n+2}$. Koristeći pretpostavku indukcije slijedi redom:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{2n(n+1)^2+n+1}{2(n+1)^3-n} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{(n+1)\cdot[2n(n+1)+1]}{2[(n+1)^3+1]-(n+2)} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{(n+1)\cdot(2n^2+2n+1)}{(n+2)\cdot[2(n+1)^2-2(n+1)+1]} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{(n+1)\cdot\left(2n^2+2n+1\right)}{(n+2)\cdot\left(2n^2+2n+1\right)} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

i dokaz indukcijom je gotov. Znači, dokazali smo $S_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je konačno

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1} \\ &= \left\{\operatorname{arc\,tg} \text{ je neprekidna funkcija na } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\ &= \operatorname{arc\,tg}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

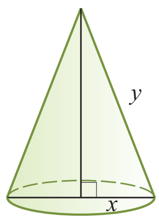
3832. *Ako je V volumen i S površina bočne strane pravilnog stošca, dokaži nejednakost*

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \le \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Označimo s x i y redom polumjer osnovice i izvodnicu stošca. Tada su njegov obujam i plašt jednaki

$$V = \frac{1}{3}\cdot x^2\pi\cdot\sqrt{y^2-x^2}, \quad S = \pi xy.$$



Uvrštavajući ove vrijednosti u danu nejednakost dobivamo:

$$4x^4(y^2-x^2) \le \frac{8}{(\sqrt{3})^3}\cdot x^3y^3$$

$$\iff 4(x^4y^2-x^6) \le \frac{8}{(\sqrt{3})^3}\cdot x^3y^3 \quad / \quad : 4x^3y^3$$

$$\iff \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \le \frac{2}{(\sqrt{3})^3}$$

$$\iff \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \ge 0$$

$$\iff \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \ge 0.$$

Kako je $\frac{x}{y} < 1$, možemo označiti $\frac{x}{y} = \cos\varphi$ gdje je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ kut između polumjera osnovke i izvodnice stošca. Gornja nejednakost je ekvivalentna sa:

$$\cos^3\varphi - \cos\varphi + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \ge 0$$

$$\iff \cos^3\varphi - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \ge 0$$

$$\iff \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi + \frac{1}{3}\right) - \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ge 0$$

$$\iff \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{2}{3}\right) \ge 0$$

$$\iff \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos^2\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{2}{3}\right) \ge 0$$

$$\iff \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left[\cos\varphi\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] \ge 0$$

$$\iff \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ge 0.$$

U posljednjoj nejednakosti prvi faktor je uvijek nenegativan, a drugi je za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ uvijek pozitivan. Kako je posljednja nejednakost ekvivalentna zadanoj, tvrdnja zadatka je dokazana. Jednakost vrijedi samo u slučaju $\cos\varphi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Marko Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 490. *Luka je na bateriju serijski spojio žaruljicu i komad aluminijske folije dugačak 30 cm i širok 1 cm. Izmjerio je da je struja u tom krugu 0.25 A (ampera), a napon na krajevima folije je iznosio 85.5 mV (milivolta). Pronašao je da električna otpornost aluminija iznosi $2.8\cdot10^{-8}$ Ωm. Koliko je debela folija?*

Rješenje.

$a = 30\text{ cm} = l = 0.3\text{ m}$

$b = 1\text{ cm}$

$I = 0.25\text{ A}$

$U = 855\text{ mV} = 0.855\text{ V}$

$\underline{\rho = 2.8\cdot10^{-8}\ \Omega\text{m}}$

$d = ?$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{0.0855\text{ V}}{0.25\text{ A}} = 0.342\ \Omega$$

$$S = \frac{\rho l}{R} = \frac{2.8\cdot10^{-8}\ \Omega\text{m}\cdot0.3\text{ m}}{0.342\ \Omega} = 2.456\cdot10^{-7}\text{ m}^2 = 0.2456\text{ mm}^2$$

$$d=\frac{S}{b}=\frac{0.2456\ \mathrm{mm}^2}{10\ \mathrm{mm}}=0.02456\ \mathrm{mm}.$$

Ivan Pejković (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 491. *Zemlji za jedan okret oko Sunca treba 365 dana 5 sati 48 minuta i 46 sekundi. Izračunajte njenu brzinu uz pretpostavku da joj je staza kružnica. Prosječna udaljenost Zemlje od Sunca iznosi 149.6 milijuna kilometara.*

Rješenje.

$$t=365\ \mathrm{d}\ 5\ \mathrm{h}\ 48\ \mathrm{min}\ 46\ \mathrm{s}=31\,556\,926\ \mathrm{s}$$
$$\underline{r=149\,600\,000\ \mathrm{km}}$$
$$v=?$$
$$s=2r\pi=2\cdot 149\,600\,000\ \mathrm{km}\cdot\pi$$
$$=939\,964\,522\ \mathrm{km}$$
$$v=\frac{s}{t}=\frac{939\,964\,522\ \mathrm{km}}{31\,556\,926\ \mathrm{s}}=29.79\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Karlo Glasnović (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 492. *Filip je na stalak objesio oprugu kojoj je duljina u neopterećenom stanju 13 cm. Kad je na nju objesio uteg mase pola kg njena je duljina iznosila 18 cm. Zatim je na taj uteg objesio drugu oprugu duljine 20 cm i konstante elastičnosti 120 N/m. Izračunajte masu utega koji bi trebalo objesiti na drugu oprugu da nakon toga obje opruge budu jednako dugačke. Mase opruga zanemarite.*

Rješenje.

$$l_{01}=13\ \mathrm{cm}$$
$$k_1=100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$
$$m_1=0.5\ \mathrm{kg}$$
$$\Delta l=18\ \mathrm{cm}-13\ \mathrm{cm}=5\ \mathrm{cm}$$
$$l_{02}=20\ \mathrm{cm}$$
$$k_2=120\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$
$$\underline{l_1=l_2}$$
$$m=?$$
$$k_1=\frac{F}{\Delta l}$$
$$F=G=mg=5\ \mathrm{N}$$
$$k_1=\frac{5\ \mathrm{N}}{0.05\ \mathrm{m}}=100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Da bi obje opruge bile jednako dugačke prva se mora produljiti dva cm više od druge.

$$\Delta l_1=\Delta l_2+0.02m$$
$$\frac{F}{k_1}=\frac{F}{k_2}+0.02m\ /\ \cdot k_1k_2$$
$$Fk_2=Fk_1+0.02mk_1k_2$$
$$F(k_2-k_1)=0.02mk_1k_2$$
$$F=\frac{0.02\ \mathrm{m}\cdot 100\ \mathrm{N/m}\cdot 120\ \mathrm{N/m}}{120\ \mathrm{N/m}-100\ \mathrm{N/m}}$$
$$=12\ \mathrm{N}=G$$
$$m=\frac{G}{g}=1.2\ \mathrm{kg}.$$

David Pongrac (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 493. *Posljednjih su desetljeća izumljene mnoge legure kojima je talište niže od 100 °C i one imaju veliku primjenu u tehnici i industriji. Na primjer, galinstan je legura galija, indija i kositra koja u termometrima zamjenjuje puno otrovniju živu. Njegovo je talište na −19 °C. Galinstan sadrži 68.5 posto galija, 21.5 posto indija i 10 posto kositra. Izračunajte njegovu gustoću. Gustoća galija je 5910 kg/m³, indija 7310 kg/m³, a kositra 7265 kg/m³.*

Rješenje.

$$\text{sastav}=68.5\ \%\ \mathrm{Ga}+21.5\ \%\ \mathrm{In}+10\ \%\ \mathrm{Sn}$$
$$\rho_{\mathrm{Ga}}=5910\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$\rho_{\mathrm{In}}=7310\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$\underline{\rho_{\mathrm{Sn}}=7265\ \mathrm{kg/m^3}}$$
$$\rho_{\mathrm{galinstan}}=?$$
$$\rho_{\mathrm{galinstan}}=0.685\cdot\rho_{\mathrm{Ga}}+0.215\cdot\rho_{\mathrm{In}}+0.1\cdot\rho_{\mathrm{Sn}}$$
$$=0.685\cdot 5910\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$+0.215\cdot 7310\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$+0.1\cdot 7265\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$=6346.5\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Karla Belec (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1763. *Njihalo mase 0.6 kg i duljine 1.2 m njiše tako da je maksimalan kut otklona* 8°. *Odredi:*

a) period njihanja,

b) energiju njihanja,

c) brzinu njihala u trenutku kada otklon iznosi 6°.

Rješenje. Period njihanja T izračunamo direktno iz duljine njihala l,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.2}{9.81}} = 2.2 \text{ s}.$$

Energiju otklona 8° odredimo iz visine na koju se njihalo podignulo otklonom,

$$E = mgh = mgl(1 - \cos 8^\circ) = 0.0687 \text{ J}.$$

Pri otklonu 6°, energija se raspodjeljuje na potencijalnu i kinetičku:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos 6^\circ),$$
$$0.0687 = \frac{1}{2}0.6v^2 + 0.0387,$$
$$v = 0.316 \text{ m/s}.$$

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1764. *Fizičko njihalo sastoji se od tankog homogenog štapa duljine l i mase m koji može njihati oko točke na $3/4$ duljine štapa. Izrazi period njihanja malih oscilacija pomoću l i g.*

Rješenje. Period njihanja fizičkog njihala T je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdje je I moment tromosti oko osi rotacije njihala, a d udaljenost osi rotacije i težišta. Kako je težište na polovici štapa, $d = l/4$, a I izrazimo iz poučka o paralelnim osima:

$$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4^2} = \frac{7}{48}ml^2.$$

Uvrštavanje u T daje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7ml^2 \cdot 4}{48mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{12g}}.$$

Borna Cesarec (3),
Srednja škola Krapina, Krapina

1765. *Otpornik otpora $R = 5\ \Omega$ spojen je serijski sa zavojnicom induktiviteta $L = 0.015$ H zanemarivog otpora. Kolika mora biti frekvencija izmjeničnog napajanja 100 V, da bi Jouleova snaga topline na otporniku iznosila 150 W?*

Rješenje. Impedanciju (ukupan otpor) Z možemo izračunati iz otpora, kružne frekvencije ω i induktiviteta L:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Uvrstimo li to u izraz za snagu, i struju izrazimo preko napona, dobit ćemo

$$P = UI\cos\varphi = UI\frac{R}{Z} = U^2\frac{R}{Z^2}$$
$$= \frac{U^2R}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Odatle izrazimo ω^2,

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = \frac{R(U^2 - PR)}{PL^2},$$

i

$$f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{R(U^2 - PR)}{P}} = 186.3 \text{ Hz}.$$

Borna Gojšić (3),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

1766. *Umjetni satelit kruži iznad Zemljinog ekvatora od zapada prema istoku u smjeru vrtnje Zemlje. Nad istu točku na ekvatoru dođe nakon 110 minuta. Na kojoj visini i kojom brzinom kruži satelit? Zemlja ima masu $6 \cdot 10^{24}$ kg, radijus 6371 km i ophodno vrijeme rotacije 24 sata.*

Rješenje. Uvjet kruženja u gravitacijskom polju (na visini h) je jednakost centripetalne i gravitacijske sile:

$$\frac{mv^2}{R + h} = \frac{GmM_Z}{(R_Z + h)^2},$$
$$R_Z + h = \frac{GM_Z}{v^2},$$
$$h = \frac{GM_Z}{v^2} - R_Z.$$

S obzirom da se satelit giba u smjeru rotacije Zemlje, kutna brzina u odnosu na površinu

Zemlje bit će razlika kutnih brzina satelita i Zemlje:

$$\omega = \omega_S - \omega_Z,$$
$$\omega_S = \omega + \omega_Z,$$
$$\frac{v}{R_Z + h} = \frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T_Z}.$$

Na lijevoj strani izrazimo $R_Z + h$ pomoću v:

$$\frac{v}{R_Z - h} = \frac{v^3}{GM_Z} = \frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T_Z}$$

$$v^3 = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 0.00102472$$
$$= 4.101 \cdot 10^{11},$$
$$v = 7430 \text{ m/s}.$$

Visinu dobijemo iz treće jednadžbe,

$$h = \frac{GM_Z}{v^2} - R_Z = 878\,356 \text{ m}.$$

Borna Gojšić (3), Karlovac

1767. *U zraku ima 78 % dušika (volumni udio) molekula N_2. Ako je tlak zraka na površini prosječno 101 325 Pa, a Zemlja kugla radijusa 6371 km, ubrzanja sile teže 9.81 m/s^2, odredi masu svega dušika u atmosferi (u kg). Atomska masa dušika je $14u$, atomskih jedinica mase.*

Rješenje. Masa cijele atmosfere m može se izračunati iz površine Zemlje P, tlaka na površini p i ubrzanja sile teže g kao

$$mg = Pp = 4\pi R^2 p,$$

pa je

$$m = \frac{4\pi R^2 p}{g} = \frac{4\pi 6\,371\,000^2 \cdot 101\,325}{9.81}$$
$$= 5.268 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Maseni udio dušika izračunamo iz volumnog, i omjera mase molekule dušika i prosječne molekule zraka:

$$\omega_{N_2} = 78 \text{ \%} \cdot \frac{2 \cdot 14}{29} = 75.31 \text{ \%}.$$

Masa dušika je tada

$$m(N_2) = \omega_{N_2} m = 3.968 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Ur.

1768. *Odredi vrijeme potrebno automobilu da prevali put od 120 m:*

- *ako je automobil krenuo jednoliko ubrzano iz stanja mirovanja,*
- *nakon 4.2 sekunde gibanja brzina automobila je 14.7 m/s,*
- *nakon 5 sekundi ubrzanja, automobil se giba jednoliko.*

Rješenje. Ubrzanje automobila, uz početnu brzinu nula, iz drugog uvjeta je,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{14.7}{4.2} = 3.5 \text{ m/s}^2.$$

Konstantna brzina se postiže nakon 5 sekundi,

$$v = at = 3.5 \cdot 5 = 17.5 \text{ m/s},$$

a dotad prevaljeni put je

$$s_1 = \frac{a}{2}t^2 = \frac{3.5}{2} \cdot 25 = 43.75 \text{ m}.$$

Put s_2 i vremenski interval t_2 koji automobil prevali jednolikom brzinom odredimo iz razlike

$$s_2 = 120 \text{ m} - s_1 = 76.25 \text{ m} = vt_2,$$
$$t_2 = \frac{76.25}{17.5} = 4.357 \text{ s}.$$

Ukupno vrijeme potrebno za put od 120 m je

$$t = t_1 + t_2 = 5 + 4.357 = 9.357 \text{ s}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

1769. *Plemeniti plin argon je 37.93 % gušći, a neon 31.03 % rjeđi od zraka. Koliki treba biti volumni udio argona u mješavini argona i neona da bi gustoća mješavine bila jednaka gustoći zraka?*

Rješenje. Zadani omjeri gustoća su

$$\rho_{\text{Ar}} = 1.3793\rho_Z, \quad \rho_{\text{Ne}} = 0.6897\rho_Z,$$

i uvjet

$$\frac{m_{\text{Ar}} + m_{\text{Ne}}}{V_{\text{Ar}} + V_{\text{Ne}}} = \rho_Z.$$

Slijedi:

$$\rho_{\text{Ar}}V_{\text{Ar}} + \rho_{\text{Ne}}V_{\text{Ne}} = \rho_Z V_{\text{Ar}} + \rho_Z V_{\text{Ne}},$$
$$(\rho_{\text{Ar}} - \rho_Z)V_{\text{Ar}} = (\rho_Z - \rho_{\text{Ne}})V_{\text{Ne}},$$
$$\frac{V_{\text{Ne}}}{V_{\text{Ar}}} = \frac{\rho_{\text{Ar}} - \rho_Z}{\rho_Z - \rho_{\text{Ne}}} = \frac{1.3793 - 1}{1 - 0.6897} = 1.222365.$$

Odatle je udio argona

$$\phi_{\text{Ar}} = \frac{V_{\text{Ar}}}{V_{\text{Ar}} + V_{\text{Ne}}} = \frac{1}{1 + 1.222365}$$
$$= 0.44997 = 44.997 \text{ \%}.$$

Dakle, tražena mješavina sadrži 45 % argona i 55 % neona.

Borna Gojšić (3), Karlovac