Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 15. veljače 2022.

Zadatke za školsko/gradsko natjecanje za A varijantu i B varijantu priredilo je Državno povjerenstvo.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Dokaži da je broj $6^{2022} - 2^{2022}$ djeljiv s 2^{2025}.

2. Tea je umijesila tijesto od tri sastojka: brašna, vode i jaja. Masa brašna u tijestu prema masi vode odnosi se kao $7:2$, dok se masa vode prema masi jaja odnosi kao $5:2$. Ukupna masa tijesta je 1470 grama. Odredi mase svakog od sastojaka.

3. Dva sukladna kvadrata sa stranicama duljine $1+\sqrt{2}$ imaju isto središte, a njihov presjek je pravilni osmerokut. Kolika je površina tog osmerokuta?

4. Za realne brojeve a, b i c vrijedi $a+b+c=0$ i $abc=4$. Odredi vrijednost izraza $a^3+b^3+c^3$.

5. Na stolu se nalazi hrpa s 1001 kamenčićem. U svakom koraku Matko odabire neku hrpu koja sadrži više od tri kamenčića, uklanja jedan kamenčić i podijeli ostatak kamenčića na dvije (ne nužno jednake) hrpe. Može li Matko nizom ovakvih koraka postići da u svakoj hrpi budu točno tri kamenčića?

6. U trokutu ABC s težištem T vrijedi $|AT|=|BC|$ i $\measuredangle BCT=30^\circ$. Odredi $|CT|:|AT|$.

7. Odredi sve parove (m,n) prirodnih brojeva za koje je $m(m-4n)=n-4$.

II. razred

1. Koliko je cijelih brojeva n za koje nejednakost $x^2+nx+100>0$ vrijedi za sve realne brojeve x?

2. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{9-5x}-\sqrt{3-x}=\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

3. Sir se nalazi u točki $(13,13)$, a miš trči pravocrtno od točke $(4,-2)$ do točke $(-1,23)$.
U kojoj se točki miš nalazi najbliže siru?

4. Pet strana drvene kocke obojeno je plavom bojom dok je jedna strana neobojena. Kocka je potom razrezana na sukladne manje kockice od kojih 649 ima točno jednu plavu stranu. Koliko je manjih kockica koje imaju točno dvije plave strane?

5. Dan je kvadrat $ABCD$. Neka je E točka na polupravcu AB takva da je $\measuredangle AED=27^\circ$. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$ sijeku se u točki S. Odredi mjeru kuta $\measuredangle BSE$.

6. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a < b$ i neka je $S = \{a^2, a^2 + 1, a^2 + 2, \ldots, b^2\}$. Odredi sve parove brojeva a i b za koje je među elementima skupa S točno $1\ \%$ kvadrata prirodnih brojeva.

7. Kvadratna jednadžba $x^2 + bx + c = 0$ ima realna rješenja čiji je zbroj kvadrata jednak 2. Odredi sve moguće vrijednosti izraza $b + c$.

III. razred

1. Ako je $\cos x + \sin x = 0.3$, odredi $\cos^3 x + \sin^3 x$.

2. Odredi realne brojeve a i b tako da skup vrijednosti funkcije $f(x) = 2022^{-2(x-2a)(x+a)} + 1$ bude interval $\langle b, 2023]$.

3. Kvadrat $ABCD$ površine 36 smješten je u koordinatnu ravninu tako da je stranica $\overline{AB}$ paralelna s y-osi, a točke A, B i C redom pripadaju grafovima funkcija $f(x) = 3\log_a x$, $g(x) = 2\log_a x$ i $h(x) = \log_a x$. Odredi broj a.

4. Za koliko je prirodnih brojeva n vrijednost razlomka

$$\frac{n + 2022}{n - 3}$$

cijeli broj?

5. Kocka $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 presječena je sferom. Središte sfere je točka S na dužini $\overline{AD}$ takva da je $|AS| = \sqrt{3} - 1$. Sfera prolazi točkama C i D', te siječe bridove $\overline{AB}$ i $\overline{AA'}$. Odredi površinu onog dijela oplošja kocke koji se nalazi unutar te sfere.

6. Neka su a, b i c redom duljine stranica trokuta nasuprot kutova veličina α, β i γ. Ako vrijedi $9a^2 + 9b^2 = 19c^2$, odredi $\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

7. Na koliko načina se u tablicu 3×3 mogu upisati brojevi od 1 do 9 tako da zbrojevi brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na svakoj dijagonali budu djeljivi s 3?

IV. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 = (1 + i) \cdot \overline{z}$.

2. Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbroj iznosi 50. Odredi te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.

3. Za kompleksne brojeve p i q vrijedi $p + q = 5$ i $p^2 + q^2 = 9$. Dokaži da je $p^n + q^n$ neparan cijeli broj za sve $n \in \mathbb{N}$.

4. Kružnica prolazi točkama $A(0, 5)$ i $B(0, -1)$, a njeno središte pripada pravcu $y = 2x - 6$. Odredi sinus obodnog kuta nad manjim lukom $\widehat{AB}$ te kružnice.

5. Od 27 sukladnih bijelih kockica sastavljena je kocka te su sve njene vanjske strane obojene crno.

a) Slučajno je odabrana jedna od tih kockica i postavljena na stol na slučajno odabranu stranu. Kolika je vjerojatnost da svih pet vidljivih strana kockice bude bijele boje?

b) Na stolu se nalazi kockica kojoj je svih pet vidljivih strana bijele boje. Kolika je vjerojatnost da je i šesta strana te kockice bijela?

6. Izračunaj
$$\sum_{k=1}^{1011}\binom{2022}{2k-1}2^{2k-1}.$$

7. U ovisnosti o prostom broju p odredi sve parove (m,n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu
$$m^2=n^2-4np+3p^2.$$

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Ako je $A=456+457+458+\ldots+554+555$ i $B=0.04^3\cdot\frac{1}{25^2}\cdot125^4$, koliko je $\frac{A}{B}$?

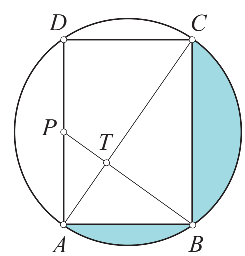
2. Dvije cijevi napune bazen za 4 sata. Samo jedna od tih cijevi napuni bazen za 5 sati i 15 minuta. Koliko vremena treba da se bazen napuni samo drugom cijevi?

3. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\frac{35}{2n-5}$ cijeli broj.

4. S polazne tramvajske stanice u 5 sati ujutro kreću tri tramvaja. Prvome tramvaju treba 1 sat i 30 minuta da se vrati na polaznu stanicu, drugome 1 sat, a trećemu 40 minuta. U koliko će se sati sva tri tramvaja naći ponovo u isto vrijeme na polaznoj stanici? Koliko će se to puta dogoditi istoga dana ako tramvaji voze od 5 sati ujutro do 24 sata navečer (ne računajući prvi polazak u 5 sati ujutro)?

5. U novome postavu nekoga muzeja svaki je eksponat numeriran redom brojevima $1,2,3,4,\ldots$ Ako su za numeriranje svih eksponata upotrijebljene ukupno 2022 znamenke, koliko eksponata ima novi postav muzeja?

6. Pravokutniku $ABCD$ opisana je kružnica. Točka P polovište je stranice $\overline{AD}$. Dužina $\overline{BP}$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki T. Ako je $|BT|=10$ cm i $|AP|=9$ cm, kolika je površina osjenčanoga dijela na slici?



7. Dva Talijana i tri Engleza traže smještaj u hotelu kao vjerni gosti. U hotelu za smještaj svojih vjernih gostiju čuvaju 8 soba, od čega su u 3 sobe zidovi obojeni plavom bojom, u 3 sobe zelenom bojom, a u preostale 2 sobe žutom bojom. Talijani žele biti ili u plavoj ili u žutoj sobi, a Englezi ili u zelenoj ili u žutoj sobi. Na koliko se načina dvojici Talijana i trojici Engleza mogu dodijeliti sobe tako da svatko od njih bude sam u jednoj sobi?

II. razred

1. Izračunajte $\sqrt{1-A^{-1}}$ ako je $A=\frac{\sqrt{2022}+1}{\sqrt{2022}-1}-\frac{2}{\sqrt{2022}+1}$.

2. Filip je provjeravao rezultate množenja prirodnih brojeva svoje mlađe sestre Barbare. U jednom je zadatku primijetio da je Barbara u rezultatu napisala znamenku stotica za jedan veću nego što je točno. Prilikom provjere podijelio je Barbarin umnožak s većim faktorom i dobio količnik 24 i ostatak 12. Koja je dva broja množila Barbara ako im je razlika 2?

3. Grafovi dviju linearnih funkcija imaju nagibe 3 i $\frac{1}{3}$, a sijeku se u točki $(3,3)$. Odredite površinu trokuta koji je omeđen tim grafovima i osi x.

4. Andro i Leo pogađaju četveroznamenkasti broj koji je onaj drugi zamislio. Pri tome moraju otkriti neke podatke o svom broju. Androv broj ima sve znamenke različite te su mu prva i zadnja znamenka neparni brojevi. Leov broj ne mora imati sve znamenke različite, ali sve su mu znamenke iste parnosti i različite od 0. Prema otkrivenim podacima, tko ima veće šanse pogoditi broj koji je onaj drugi zamislio?

5. Od žice duljine 4.5 metra treba napraviti šest ukrasa, tri u obliku pravilnog šesterokuta i tri u obliku jednakostraničnog trokuta. Svi šesterokuti, odnosno trokuti su međusobno sukladni. Odredite duljine stranica šesterokuta i trokuta tako da zbroj površina svih likova bude minimalan, a cijela žica upotrebljena.

6. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{4y^2+3y}&=-\frac{2}{3},\\ \frac{3}{x^2+2x}+\frac{2}{4y^2+3y}&=3.\end{aligned}$$

7. Pravac koji prolazi vrhom C pravog kuta trokuta ABC s kraćom katetom zatvara kut od 30° i dijeli hipotenuzu u omjeru $1:2$. Ako je duljina kraće katete $\sqrt{3}$, odredite duljinu hipotenuze.

III. razred

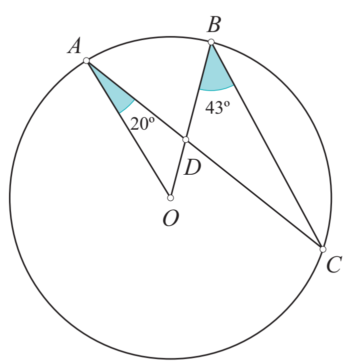
1. Izračunajte: $\dfrac{1}{\left(337^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{337}-\sqrt{6}}{337^{\frac{3}{2}}-6^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$.

2. Ako je

$$\log_2\left[\log_3\left(\log_4 x\right)\right]=\log_3\left[\log_2\left(\log_4 y\right)\right]=\log_4\left[\log_3\left(\log_2 z\right)\right]=0,$$

izračunajte $\log_y\left(\log_z x\right)$.

3. Točke A, B i C nalaze se na kružnici sa središtem u točki O, kao na slici. Tetiva $\overline{AC}$ siječe polumjer $\overline{OB}$ u točki D. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle BDA$ ako je $\sphericalangle OAC=20^\circ$, $\sphericalangle OBC=43^\circ$.



4. Matko je pripremajući se za natjecanje otkrio knjižaru s dobrom matematičkom literaturom. Knjižara nudi 7 različitih knjiga sa zadatcima samo iz geometrije, 4 samo iz teorije brojeva, 5 samo iz kombinatorike. Nadalje, u ponudi su i knjige sa zadatcima iz točno dva područja. Tako je 6 različitih knjiga sa zadatcima iz teorije brojeva i kombinatorike te 7 sa zadatcima iz geometrije i kombinatorike. Na koliko načina Matko može odabrati literaturu iz dva od svih navedenih područja ako može kupiti najviše dvije knjige?

5. Ako je $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, koliko je $(\sin x - \cos x)^{10}$?

6. Zadan je pravokutnik sa stranicama duljina a i b, $a = \frac{4}{7}b$. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana točka zadanog pravokutnika bude bliža kraćoj stranici i da je od nje udaljena za manje od $\frac{a}{8}$.

7. Duljine stranica tetivnog četverokuta $ABCD$ su $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|CD| = 5$ cm i $|DA| = 6$ cm. Odredite kosinuse šiljastih kutova i površinu četverokuta $ABCD$.

IV. razred

1. Riješite jednadžbu $\binom{x+1}{x-2} + 2\binom{x-1}{3} = 7(x-1)$.

2. Odredite najmanji prirodan broj m za koji je umnožak $3^{\frac{1}{55}} \cdot 3^{\frac{4}{55}} \cdot 3^{\frac{7}{55}} \cdot \ldots \cdot 3^{\frac{3m-2}{55}}$ veći od 729?

3. Središte kružnice koja prolazi točkama $A(0,5)$ i $B(0,-1)$ nalazi se na pravcu $y = 2x - 6$. Odredite tangens manjeg obodnog kuta nad tetivom $\overline{AB}$.

4. Na ekipnom natjecanju iz matematike sudjeluje 5 timova. Svaki se tim sastoji od 3 učenika među kojima je i vođa tima. Svih 5 timova sjedi za istim okruglim stolom, tako da učenici iz istog tima sjede zajedno, jedan kraj drugoga, a vođa tima je uvijek između članova svojeg tima. Koliko je ukupno različitih razmještaja za okruglim stolom? (Razmještaje smatramo istima ako se jedan od drugog mogu dobiti rotacijom. Razmještaji su različiti ako postoji par osoba koje u jednom razmještaju sjede jedna lijevo od druge, a u drugom to nije istina.)

5. Dekadski zapis broja N završava s 2022. Ako se obrišu zadnje 4 znamenke, broj koji ostaje je djelitelj broja N. Primjerice, ako se broju 22 022 obrišu zadnje 4 znamenke, ostaje broj 2, a on je djelitelj broja 22 022. Odredite zbroj znamenaka svih brojeva N s opisanim svojstvom.

6. Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2022 za koje je $\left(\dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{8} - 2i\sin\frac{\pi}{8}}\right)^n$ realan broj?

7. Neka su a, b i c uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako je $a + b + c = \frac{7}{3}$ i $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{91}{9}$, odredite a, b i c.

Matija Bašić