Izvorni članak UDK 111.1: 51

Boran Berčić, Rijeka

Zašto 2+2=4?

0. Uvod

Matematika je filozofima oduvijek bila zanimljiva. Pitagora i njegovi sljedbenici vjerovali su da se sve činjenice u svijetu mogu izraziti matematički. Platon je smatrao da je jedino filozofsko znanje vrijednije od matematičkog. Descartes i Leibniz su i sami bili matematičari. Spinoza je svoj filozofski sistem nastojao izložiti geometrijskim redom, po uzoru na Euklidove *Elemente*. Ono što je možda najviše fasciniralo filozofe u matematici jest njezina *izvjesnost*. Matematička spoznaja bila je, zbog svoje izvjesnosti, uzor svakoj drugoj spoznaji. Doista, ne možemo se otrgnuti dojmu da su matematičke istine *nužne*, to jest, da ne mogu biti drukčije nego što jesu. Sve drugo može biti drukčije nego što jest, samo matematičke istine ne. U svim drugim znanostima i valjana metoda može dovesti pogrešnih rezultata, samo u matematici ne. Matematička spoznaja jest, ako je valjana, apsolutno sigurna i izvjesna. Stoga ćemo u ovom tekstu nastojati vidjeti što matematičke sudove čini istinitima, o čemu oni govore i kako ih spoznajemo.

1. Teorije u filozofiji matematike

To da 2+2=4 – to je jasno i oko toga se svi slažemo. Međutim, ni iz daleka nije jasno *zašto* je 2+2=4, što je to *zbog čega* 2+2=4?

Oko odgovora na to pitanje nema nikakvog slaganja. Mislim da je pitanje Zašto 2+2=4? najbolje shvatiti kao pitanje Što rečenicu »2+2=4« čini istinitom? Da pojasnim; Da li je istina da 2+2=4? Jest, istina je! Da li je istina da 2+2=5? Ne, to nije istina! Pitanje je što je to što rečenicu »2+2=4« čini istinitim, a rečenicu »2+2=5« neistinitom? Dakle, mora biti negdje nešto što prvu rečenicu čini istinitom, a drugu neistinitom. Pitanje je: što je to?

Dakle, pitanje je *ontološke* prirode, koja je to vrsta stvari koja rečenice matematike čini istinitima? Ili, da se poslužimo engleskim izrazom, što su *truth makeri* matematičkih rečenica? Ontološko pitanje, o tome što rečenice matematike čini istinitima ili neistinitima, u uskoj je vezi s epistemološkim i semantičkim problemima matematike. *Epistemološko* pitanje jest kako spoznajemo matematičke istine? O kojoj se vrsti spoznaje radi? Kako znamo da 2+2=4? Zašto vjerujemo da je to istina? Na osnovi kojih razloga to tvrdimo? Da li to spoznajemo iskustvom, čistim mišljenjem, ili na neki treći način? *Semantičko* pitanje jest što to znači da 2+2=4? O čemu govori rečenica 2+2=4? O čemu govore rečenice matematike? Na što referiraju? Što one opisuju? Jasno, ontološki, epistemološki i semantički aspekt pitanja o istini uvijek su usko povezani, tako je i u slučaju matematike. Semantički i ontološki aspekt povezani su na slijedeći način. Izjavnim rečenicama uvijek se *nešto tvrdi*, one su uvijek *o nečemu*. Ono što se rečenicom tvrdi, ono o čemu ona govori, to je ujedno i ono što ju čini istinitom ili neistinitom. Ako je to što se rečenicom tvrdi stvarno tako, rečenica je istinita. Ako nije tako, rečenica nije istinita. Ono što se rečenicom tvrdi, to je ono o čemu je ona i to je ono što ju čini istinitom ili neistinitom. Isto tako, matematička spoznaja mora biti spoznaja onoga o čemu matematika govori, to jest, onoga što matematiku čini istinitom. U ovoj će raspravi naglasak prvenstveno biti na ontološkom aspektu pitanja: što je to što rečenice matematike čini istinitima, koja je to vrsta stvari?

Istina ima raznih. Različite rečenice istinite su na različitim osnovama, ovisno o čemu govore. Istinosna vrijednost rečenica koje govore o fizičkim predmetima ovisi o tome kakvi su fizički predmeti koje one opisuju. Na primjer, rečenica »U prostoriji 212 na FF-u u Rijeci ima 35 klupa«, istinita je zato što u prostoriji 212 na FF-u Rijeci doista ima 35 klupa. Dakle, *fizička činjenica* da u toj prostoriji ima toliko klupa jest ono što tu rečenicu čini istinitom. Istinosna vrijednost rečenica koje govore o mentalnim stanjima ovisi o tome jesu li mentalna stanja o kojima one govore doista takva kao što se njima tvrdi. Ono što rečenicu »Martu boli zub« čini istinitom jest *mentalna činjenica* da Martu stvarno boli zub. Neke su rečenice istinite na osnovi konvencije. Na primjer, da li je istina da 1 metar ima 100 centimetara? Istina je! Ono što odgovarajuću rečenicu čini istinitom jest *konvencija* o metričkom sustavu da 1m ima 100cm. Isto je tako istinito na osnovi konvencije da je 1m dugačak upravo toliko koliko jest, a ne više ili manje. Neke istine ovise o *pravilima igre*. Rečenica »Lovac se smije kretati samo dijagonalno« istinita je na osnovi pravila šaha. Na osnovi pravila nogometa istina je da se ne smije igrati rukom. Pravila igara isto su tako samo konvencije. Neke su rečenice istinite na osnovi *značenja riječi* od kojih se sastoje. Rečenica »Ujak je brat od majke« istinita je zato što riječ »ujak« naprosto znači »brat od majke«. Neke istine ovise o tome *kako mi vidimo* stvari oko sebe. Istina je da je trava zelena zato što normalan spoznavatelj u normalnim okolnostima travu vidi kao zelenu. Da imamo drukčiji perceptivni aparat, trava nam možda ne bi izgledala zelena. Neke su rečenice istinite zbog *logičkog oblika* kojega imaju. Rečenica »Ako kiša pada, onda kiša pada« istinita je, padala kiša ili ne. Isto kao i »Kiša pada ili kiša ne pada«. Ako bismo nekoga pitali da li pada kiša, a on bi nam dao ovakve odgovore, mislili bismo da nas zafrkava. Međutim, iako neinformativni, ovi su odgovori istiniti. Istiniti su na osnovi svog logičkog oblika. Prva je rečenica istinita zato što ima oblik zakona logike $p \rightarrow p$ (ako p, onda p). Druga zato što ima oblik $p \vee \sim$p (p ili $\sim$p). Postoji vjerojatno još vrsta istina, onoliko koliko ima vrsta činjenica u svijetu. Pitanje koje nas zanima jest što je to što rečenicu »2+2=4« čini istinitom? Koja je to vrsta činjenica u svijetu koja matematiku čini istinitom. Jesu li to fizički predmeti, mentalna stanja, konvencije, pravila igre, značenja riječi, način na koji vidimo svijet, zakoni logike, ili pak nešto drugo?[1] U ostatku poglavlja izloženo je i ukratko razmotreno pet mogućih odgovora na to pitanje, to jest, pet teorija o prirodi matematičke istine. To su: *fikcionalizam*, *nominalizam*, *konceptualizam*, *fizikalizam* i *platonizam*.[2]

1.1 Fikcionalizam

Predmeti matematike čiste su *fikcije*, njih zapravo nema. Zato se ova pozicija i naziva fikcionalizam.[3] Predmeti o kojima govore rečenice matematike naprosto *ne postoje*. U svijetu u kojem živimo *nema* brojeva, drugih korijena, integrala, logaritama, funkcija i skupova. Iskazi matematike zapravo i ne govore ništa o svijetu u kojem živimo. Možda nam se čini da se iskazima matematike nešto tvrdi o nekoj vrsti stvari, međutim, taj je dojam naprosto pogrešan. Matematika zapravo nije ni o čemu te stoga iskazi matematike *uopće nemaju istinosne vrijednosti*. Budući da se njima ništa ne tvrdi, oni *ne mogu biti ni istiniti ni neistiniti*.[4] Tako točan odogovor na pitanje Što sud 2+2=4 čini istinitim? – jest Ništa! Taj sud zapravo i nije istinit. Jasno, nije ni neistinit, on naprosto nema istinosnu vrijednost. Ipak, to ni u kom slučaju ne znači da je matematika zato bezvrijedna, njezina vrijednost uopće nije u istinitosti već u *korisnosti*. Ona je izuzetno korisno sredstvo koje nam olakšava snalaženje u svijetu u kojem živimo. Iako predmeta o kojima matematika govori zapravo nema, matematika je izuzetno korisna. Sve ono što možemo reći uz pomoć matematike, zapravo možemo reći i bez nje. Broj 5 nam, na primjer, omogućuje da govorimo o »ovih 5 stolova«. Međutim, o njima možemo govoriti i bez broja 5. Možemo reći »ovaj stol i ovaj stol i ovaj stol i ovaj stol i ovaj stol.« Radi se samo o tome da nam broj 5 pomaže da to isto kažemo kraće brže i lakše. Broj 5 je, kao i svi ostali navodni predmeti matematike, zapravo samo *korisna fikcija*. Sva je znanost u principu moguća i bez matematike. Štogod možemo uz pomoć matematike učiniti brže i jednostavnije, sve to možemo učiniti i bez ikakve matematike. Doduše, sporije i nepreglednije, ali ipak možemo. Prema tome, ne trebamo pretpostaviti da postoje nekakvi matematički predmeti o kojima govore rečenice matematike, a pogotovo ne nekakva *sui generis* matematička stvarnost koju matematika opisuje.

1

Doduše, ne mora sva matematika biti istinita na istoj osnovi. Može biti da je jedan dio istinit na jednoj osnovi, a drugi na drugoj. Na primjer, možda je dio koji govori o konačnim veličinama fizički istinit, a dio koji govori o beskonačnome samo stvar definicije. Možda prirodni brojevi postoje neovisno o nama, dok su svi ostali brojevi samo naša konstrukcija. Možda euklidska geometrija predstavlja generalizaciju iz iskustva, a ostale geometrije nizove definicija. Možda matematika jest nastala na iskustvenim osnovama, ali se kasnije razvila u sistem definicija. Itd. Ipak, u znanosti je unifikacija vrlina. Stoga treba vidjeti može li ijedna od teorija koje ćemo razmatrati objasniti cijelu matematiku. Tek ako bi se ispostavilo da tako nešto nije moguće, tek bi onda trebalo razmotriti neko hibridno rješenje.

2

Upućenom čitatelju možda će biti čudno što se ne spominju tri standardne pozicije u filozofiji matematike – *formalizam*, *intuicionizam* i *logicizam*. Ipak, osnovni filozofski sadržaj tih pozicija sadržan je u izloženih pet: formalizam je pozicija bliska fikcionalizmu i nominalizmu; intuicionizam se vezuje uz konceptualizam, a logicizam uz platonizam (iako može biti spojiv i s nominalizmom). Pored toga, podjela na izloženih pet pozicija jednostavnija je i zahtijeva manje predznanja. Prikazi triju standardnih pozicija mogu se naći u tekstovima Carnapa, Heytinga i von Neumanna iz 1931., koji su dostupni u hrvatskome prijevodu u Šikićevu zborniku *Novija filozofija matematike*. Lijepe i jasne prikaze tih triju pozicija predstavljaju i *Thinking about Mathematics* Stewarta Shapira iz 2000., kao i *Philosophies of Mathematics* Georga i Vellemana iz 2002. Shapirova je knjiga »filozofskija«; na primjer, sadrži prikaze gledišta klasika iz povijesti filozofije Platona, Aristotela, Kanta i Milla. George i Velleman su nešto više »tehnički« orijentirani.

3

Najpoznatiji je zastupnik ove pozicije Hartry Field, izložio ju je u knjigama *Science without Numbers* iz 1980. i *Realism, Mathematics and Modality* iz 1989.

4

Poziciju prema kojoj iskazi matematike uopće nemaju istinosnu vrijednost bilo bi možda prikladnije nazvati *instrumentalizam*. Naziv *fikcionalizam* bilo bi možda bolje koristiti za poziciju prema kojoj iskazi matematike imaju istinosnu vrijednost (budući da opisuju predmete matematike i njihova svojstva), ali su svi naprosto neistiniti (budući da takvi predmeti jednostavno ne postoje). Ovako shvaćen fikcionalizam bio bi sasvim analogan poznatoj Mackievoj *teoriji pogreške* u meta-etici. (To je pozicija prema kojoj iskazi moralnog diskursa imaju istinosnu vrijednost, budući da nešto tvrde o moralnim svojsvtima, međutim, svi su oni doslovno neistiniti, budući da takva svojstva zapravo ne postoje.) Ovako shvaćeni, instrumentalizam i fikcionalizam u filozofiji matematike potpuno bi se slagali u pogledu ontologije (toga što postoji), ali bi se razilazili u pogledu semantike matematičkog diskursa (toga što se tvrdi matematičkim iskazima). Najpoznatiji zastupnik fikcionalizma, Hartry Field, ovu distinkciju smatra nezanimljivom i u potpunosti je zanemaruje (*Realism, Mathematics and Modality*, str. 4, bilj. 4). Stoga ću i ja ovdje pod fikcionalizmom podrazumijevati poziciju prema kojoj iskazi matematike nemaju istinosne vrijednosti.

1.2. Nominalizam

2+2=4 – to je istina *po definiciji*.[5] 2+2 po definiciji jesu 4. Izrazi »2«, »+«, »=« i »4« tako su definirani da je istina da 2+2=4. U matematici je sve stvar definicije. Kada kažemo »2+2« rekli smo *istu stvar* kao i da smo rekli »4«. To su samo dva različita načina da kažemo istu stvar. »2+2« i »4« su *sinonimi*, oni *imaju isto značenje*. Isto kao i »glazba« i »muzika«; »hiljada« i »tisuća«; ili »ujak« i »brat od majke«. Rečenica »Ujak je brat od majke« istinita je samo na osnovi značenja izraza »ujak« i »brat od majke«. Riječ »ujak« naprosto znači »brat od majke«. »Ujak« i »brat od majke« imaju *isto značenje*, to su *sinonimi*. »x je ujak« i »x je brat od majke« samo su dva različita načina da se kaže ista stvar. Ono što kažemo kada kažemo »4« u principu, možemo reći »1+1+1+1«, možemo reći »5–1«, možemo reći »1000–996«, možemo reći »2^2«, itd. Sve su to samo razni načini da se kaže ista stvar. U tome je tajna matematičke istine. I s lijeve i s desne strane znaka »=« nalazi se ista stvar, samo što je izrečena na različiti način. Ako u rečenični oblik »___ = ___« uvrstimo dva izraza koji imaju isto značenje, rečenica koju dobijemo mora biti istinita, ona ne može ne biti istinita. Definicija je točna upravo kada definiendum ima isto značenje kao i definiens.

Ujak je ujak.	4 = 4
Ujak je brat od majke.	4 = 2+2

Svim istinitim rečenicama matematike zapravo se iskazuje *identitet*, one sve zapravo imaju oblik *A je A*, one su sve *tautologije*. Rečenice matematike uopće *ne govore o stvarima, već prije o načinu na koji govorimo o stvarima*. Dakle, nisu činjenice ono što ih čini istinitima ili neistinitima, već *jezik* kojim govorimo o činjenicama. Tako su i istine matematike samo vrsta *istina jezika*. Dakle, istina je da 2+2=4 zato što »2+2« *znači isto što i* »4«. Time što smo rekli »2+2« ujedno smo rekli »4«. Prema tome, rečenica 2+2=4 zapravo je *istina jezika*, kao i sve druge definicije. Matematičke istine samo su podskup istinâ jezika. One su zapravo *semantičke* istine – istine o značenjima riječi i izraza u jeziku. Ovise o našim *jezičnim konvencijama*. Istine matematike jesu *analitičke a priori* istine. To znači da su istinite na osnovi *značenja termina* od kojih se sastoje, neovisno o bilo kakvom iskustvu. Stoga je matematika čisto formalna znanost koja ne govori ništa ni o kakvim činjenicama, već odražava jezične konvencije, našu odluku da određene simbole upotrebljavamo na određeni način.

1.3. Konceptualizam

Ono što rečenicu »2+2=4« čini istinitom jest *način na koji mislimo*. Ako zamislimo dva štapića i još dva štapića, samim time smo zamislili četiri štapića. Mi *ne možemo misliti drukčije*. Čak i kada dva štapića i još dva štapića ne bi stvarno bila četiri štapića, mi to ne bismo mogli shvatiti i to ne bismo mogli znati. *Za nas* bi 2 i 2 i dalje bilo 4. To da 2+2=4, to nije samo stvar definicije. Radi se o još nečem, o tome da mi ne možemo zamisliti da 2+2 nisu 4. Definicije su proizvoljne, način na koji mislimo nije. 2+2=4, to nije *analitička* rečenica već *sintetička*.[6]

»2+2« *ne znači* »4«. Izrazi »2+2« i »4« *nemaju isto značenje*. Nominalizam nije istinit; matematika nije istinita na osnovi definicija. Isto tako nije u pravu niti fizikalizam; matematika ne može biti o fizičkoj stvarnosti, budući da matematičke istine spoznajemo *neovisno o iskustvu*, to jest *a priori*.

Dakle, istine matematike jesu *sintetičke a priori*.[7] Matematika je u našim glavama, a ne u vanjskoj stvarnosti. Gdje se nalazi, recimo, skup od 5 mrkava? U našem mišljenju ili u fizičkoj stvarnosti? Mrkve su fizički predmeti i postoje neovisno o nama. Međutim, da li i *skup* postoji neovisno o nama? Ne! *Skup* od 5 mrkava nastao je našim mišljenjem. Ono što je neovisno o našem mišljenju, to su same mrkve. Uostalom, gdje su brojevi? U našim glavama ili u vanjskoj stvarnosti? Gdje to u iskustvu možemo naići na broj 5, ili na treći korijen iz 16? Gdje se u fizičkoj stvarnosti nalazi množenje? Matematički predmeti su *konstrukti našeg mišljenja* i ne postoje neovisno o načinu na koji mislimo. Matematika svoje uporište ima u ljudskoj *psihologiji*, takvoj kakva jest. Kada bi nam psihologija bila drukčija, možda bismo imali i drukčiju matematiku. Matematičke strukture odražavaju strukture našeg mišljenja. Istine matematike zapravo su *istine psihologije*.

1.4. Fizikalizam

Istine matematike jesu *istine o fizičkim činjenicama* i spoznajemo ih *iskustvom*.[8] Matematika je *empirijska znanost*.[9] Isto kao i istine svih ostalih znanosti, istine matematike počivaju na iskustvu. To da su dva i dva četiri, mi to naprosto možemo *vidjeti* ili *opipati*. Ako ispred sebe stavimo dva predmeta, i dodamo još dva, onda naprosto pred sobom možemo *vidjeti* ili *opipati* četiri predmeta. Dva kamena i dva kamena uvijek su četiri kamena. Dva stabla i dva stabla uvijek su četiri stabla. Pet cvjetova i sedam cvjetova uvijek je dvanaest cvjetova. To da je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama, to je istina o fizičkom prostoru u kojem živimo. To je, između ostaloga, istina o keramičkim pločicama i parketima. Naprosto uočavamo pravilnosti po kojima se ponašaju predmeti u svijetu oko nas. Istine matematike nisu semantičke istine o značenjima termina, niti *a priori* istine razuma koje spoznajemo neovisno o bilo kakvom iskustvu, niti su istine o nekakvim vječnim i nepromjenjivim predmetima koji postoje van prostora i vremena. Istine su matematike *empirijske istine o fizičkom svijetu* u kojem živimo. Fizički predmeti u svijetu i relacije između njih jesu ono što matematičke rečenice *čini istinitima*. Matematika je istinita na istoj osnovi

5

Među klasičnim autorima, kao zastupnika nominalizma, moglo bi se istaknuti Davida Humea. Za njega su istine matematike zapravo istine o odnosima između ideja. Najpoznatiji zastupnici nominalizma u matematici svakako su logički pozitivisti: Carnap, Ayer, Hahn, Hempel i ostali. Njihova sam gledišta o prirodi matematike nešto opširnije izložio u knjizi *Filozofija Bečkog kruga*, poglavlje VI.

6

Poincaré je, na primjer, smatrao očitim da cijela matematika naprosto ne može biti jedna ogromna tautologija koja se u krajnjoj liniji svodi na zakon identiteta A=A; *Znanost i hipoteza*, dio I, poglavlje I.

7

Ovo je Kantovo gledište. On je smatrao da istine matematike ne mogu potjecati iz iskustva zato što su nužne, ali da nisu ni analitičke. Zato je smatrao da filozofija mora objasiti kako su mogući sintetički sudovi a priori. Ipak, Kant ne bi prihvatio psihologizam – gledište da zakoni matematike odražavaju empirijske zakone po kojima *de facto* mislimo – već bi prije tvrdio da zakoni matematike odražavaju transcendentalne uvjete mogućnosti bilo kakvog mišljenja i iskustva. Ma u čemu se razlika između toga dvoga sastojala, ovdje je svrstan među konceptualiste.

8

Najpoznatiji zastupnik ove pozicije svakako je John Stuart Mill. Svoje je gledište izložio u djelu *A System of Logic*, iz 1843., knjiga III, poglavlja V i VI. Od suvremenih autora, millovska gledišta zastupa Kitcher; pogotovo je zanimljiv tekst »Mill, Mathematics, and the Naturalist Tradition«, u Skorupskijevom zborniku *The Cambridge Companion to Mill* iz 1998.

9

Stoga se ovo gledište često naziva *empirizam* u filozofiji matematike.

kao i fizika. U principu nema razlike između istinâ fizike i istinâ matematike. Razlika je samo u stupnju; matematika govori o najopćenitijim karakteristikama stvari. Ako se nekome Pitagorin poučak objasni na primjeru keramičkih pločica, taj primjer predstavlja *empirijsku evidenciju* koja potkrepljuje istinitost Pitagorina poučka, a ne samo više ili manje prikladno didaktičko sredstvo. Isto kao što u fizici, na primjer, svaki komad metala koji provodi struju predstavlja dodatnu empirijsku evidenciju da svi metali provode struju. Ono što čini istinitim zakon fizike da svi metali provode struju, jest *činjenica o svijetu* da svi metali provode struju. Isto tako, ono što čini istinitim zakon matematike da 2+2=4 jest *činjenica o svijetu* da bilo koje dvije stvari i bilo koje druge dvije stvari uvijek jesu četiri stvari. Kada metali ne bi uvijek provodili struju, ne bi bila istina da metali uvijek provode struju. Kada dvije i dvije stvari ne bi uvijek bile četiri stvari, ne bi bila istina da su dva i dva uvijek četiri. Dakle, istine matematike jesu *empirijske generalizacije* o svijetu u kojem živimo. Kada bi u svijetu u kojem živimo stvari nastajale i nestajale same od sebe, aritmetika naprosto ne bi bila istinita. Kada bi svaki puta kada bismo stavili dvije stvari i još dvije stvari, dobili pet stvari, zakon aritmetike bio bi da 2+2=5. Budući da se fizički predmeti ne ponašaju tako, nije istina da 2+2=5. Istine matematike zapravo su vrsta fizičkih istina o svijetu u kojem živimo.

Matematička spoznaja nije *a priori*. Nema nikakve druge spoznaje osim iskustvene. I matematika je *a posteriori*, isto kao i svo drugo ljudsko znanje. Nisu značenja termina ono što rečenice matematike čini istinitima, niti zakoni našeg mišljenja, već su to činjenice u svijetu. To jest, istine matematike nisu analitičke niti apriorne, već *sintetičke a posteriori*. Matematika je, u krajnjoj liniji, iskustvena znanost.

1.5. Platonizam

Istine matematike nisu ni o definicijama, niti o načinu na koji mi mislimo, a niti o iskustvenim činjenicama. Matematika opisuje *vječnu i nepromjenjivu matematičku stvarnost koja postoji izvan vremena i izvan prostora*.[10] Ta specifično matematička stvarnost jest ono o čemu govore rečenice matematike i ono što ih čini istinitima. Matematički predmeti postoje izvan vremena i prostora, oni su idealni i apstraktni. Brojevi, skupovi, funkcije, trokuti, krugovi, integrali, pravci, matrice i drugi matematički predmeti *postoje objektivno*, neovisno o načinu na koji mislimo ili govorimo o njima. Isto tako, postoje neovisno o fizičkim predmetima, prostoru i vremenu. Oni su vječni i nepromjenjivi. Oni su *sui generis*, to znači da svoje postojanje ne duguju ničem drugom. Drugim riječima, postoji specifično *matematička stvarnost*, različita od svega ostaloga što postoji u svijetu. Matematička spoznaja jest spoznaja te *sui generis* matematičke stvarnosti. Matematičar intuicijom i radom otkriva tu stvarnost koja postoji prethodno i neovisno od njega i njegova otkrića. Otkrića u matematici u principu su iste vrste kao i otkrića u geografiji ili fizici. Pitagora je otkrio da $a^2+b^2=c^2$ baš kao što je Kolumbo otkrio Ameriku. Otkrića u matematici nisu *naše konstrukcije* već *doslovno otkrića*. Matematička stvarnost postoji neovisno o nama i čeka da ju otkrijemo.

Prije nego što pokušamo vidjeti kako koja teorija u filozofiji matematike izlazi na kraj s pojedinim karakteristikama matematike i matematičkog znanja, pojasnimo još neke stvari važne za bolje razumijevanje različitih pozicija.

Realizam i antirealizam

Osnovna karakteristika *realizma* u filozofiji matematike jest stav da matematičke istine *ne ovise* o našim vjerovanjima, načinima računanja, pojmovima kojima baratamo, načinu na koji mislimo, itd, to jest, da matematički sudovi imaju istinosne vrijednosti *prethodno i neovisno* o našim vjerovanjima o njima.[11] S druge strane, *antirealizam* u filozofiji matematike pozicija je prema kojoj matematičke istine nisu nešto što postoji prethodno i neovisno o nama, već *ovisi* o jeziku kojim govorimo, načinu na koji mislimo, načinu na koji računamo, itd. Eutifrova dilema općenito je vrlo prikladno sredstvo za pojašnjavanje razlike između realističkih i antirealističkih pozicija u nizu filozofskih debata. Tako je i u matematici. Pitanje koje si trebamo postaviti glasi:

Da li mi vjerujemo da 2 i 2 jesu 4 zato što 2 i 2 jesu 4,

ili 2 i 2 jesu 4 zato što mi vjerujemo da 2 i 2 jesu 4?

Dakle, pitanje je *Što ovisi o čemu?* Da li naša vjerovanja ovise o istinama matematike, ili istine matematike ovise o našim vjerovanjima? Od ovdje izloženih pozicija prve tri su *antirealističke*; to su fikcionalizam, nominalizam i konceptualizam.[12] Ostale dvije su *realističke*; to su fizikalizam i platonizam.[13]

Kada je postala istina da 2+2=4?

Pitanje zvuči čudno. Međutim, pomaže nam lakše odrediti o čemu ovise matematičke istine. Naime, ako je X to što sudove matematike čini istinitima, onda oni nisu mogli biti istiniti prije nego što je nastalo X. Dakle, pitanje treba shvatiti u sasvim doslovnom smislu. Prije nego što razmotrimo moguće odgovore, pogledajmo analogan slučaj iz fizike: Kada je postala istina da metali provode struju? Ili, da li je rečenica »Metali provode struju« mogla biti istinita i prije nego što su nastali metali? Ne, nije mogla! Dok nije bilo metala naprosto nije mogla biti istina da metali provode struju. Budući da ono što rečenicu »Metali provode struju« čini istinitom jest fizička činjenica da metali provode struju, ta rečenica nije mogla biti istinita prije nego što je nastalo ono što ju čini istinitom. Nije bila istinita, recimo, prije Velikog praska. Ili, primjer iz šaha. Kada je postala istina da se lovac smije kretati samo dijagonalno? Onda kada su utemeljena pravila šaha. Prije toga to nije mogla biti istina naprosto zato što nije postojao šah. Itd. Dakle, kada je postala istina da 2+2=4?

Različite teorije daju različite odgovore. *Fikcionalizam*: nikada nije niti bila. *Nominalizam*: onda kada smo razvili jezik kojim smo to izrekli. *Konceptuali-*

10
Među suvremenim zastupnicima platonizma u filozofiji matematike, svakako treba istaknuti Jamesa Roberta Browna, koji je svoje stavove o tom problemu izložio u knjizi *Philosophy of Mathematics* iz 1999. On, na primjer, smatra da Platonovo otkriće apstraktnih predmeta jest najveće otkriće u cjelokupnoj povijesti ideja; str. 8.

11
Zainteresiranog čitatelja može se uputiti na niz radova Penelope Maddy, koja zastupa realistički stav u pogledu matematike. Vrlo je lijep i jasan prikaz realizma u filozofiji matematike predstavlja (nažalost, neobjavljena) doktorska disertacija Majde Trobok.

12
Konceptualizam je očito antirealistička pozicija, jer prema njoj istine matematike ovise o načinu na koji o njima razmišljamo. Ipak, način na koji razmišljamo o matematici može se shvatiti kao nešto objektivno – u smislu da taj način predstavlja (psihološku ili čak nekakvu transcendentalnu) *danost* na koju ne možemo utjecati svojom voljom.

zam: onda kada nam se mišljenje razvilo do stupnja na kojem smo to mogli misliti. *Fizikalizam*: onda kada su nastali fizički predmeti. *Platonizam*: oduvijek je bila. O odgovoru na pitanje Kada je postala istina da 2+2=4?, ovisi i odgovor na pitanje što sud da 2+2=4 čini istinitim? Možemo se pitati slijedeće: Da li bi matematika bila istinita i kada ne bi bilo jezika kojim bi se mogla izreći? Ako bi i tada bila istinita, to bi značilo da matematičke istine ne ovise o našim definicijama, to jest, da nominalizam nije istinit. Da li bi matematika bila istinita i kada ne bismo mislili da jest? Ako bi bila, to bi značilo da konceptualizam nije istinit. Da li bi matematika bila istinita i kada ne bi bilo fizičkih predmeta? Ako bi bila, to bi značilo da fizikalizam nije istinit. Da li bi matematika bila istinita i kada ne bi postojala platonička matematička stvarnost? Ako bi bila, to bi značilo da platonizam nije istinit.

2. Karakteristike matematike

Neke karakteristike matematike filozofski su vrlo zanimljive. Zadovoljavajuća filozofska teorija matematike trebala bi ih objasniti. Međutim, neke od njih podupiru, ili barem naizgled podupiru jednu teoriju, a neke drugu. Pitanje je može li ijedna od navedenih pet teorija na zadovoljavajući način objasniti izložene karakteristike matematike. Izložit ćemo te karakteristike i pokušati pokazati kako ih koja teorija objašnjava.[14]

2.1. Ontološka obveza matematičkog diskursa

Postoje li brojevi veći od 5? Postoje! Dakle, *postoje brojevi* veći od 5. Ima li 16 kubni korijen? Ima! Dakle, *postoji broj* čija je treća potencija 16. Itd. Prema tome, *brojevi postoje*. Postoji li geometrijski lik kojemu su jednake sve stranice i svi kutevi? *Postoji!* To je, na primjer, kvadrat, ili istostranični trokut. Dakle, *postoje barem dva* takva geometrijska lika. Itd. Prema tome, *matematički predmeti postoje*. To je zaključak kojega nam nameće naš *matematički diskurs*. Način na koji govorimo o brojevima obvezuje nas da tvrdimo postojanje brojeva. Način na koji govorimo o geometrijskim likovima obvezuje nas da tvrdimo postojanje geometrijskih likova. Itd. To je *ontološka obveza* načina na koji govorimo o matematičkim predmetima.[15]

Naš matematički diskurs naprosto *pretpostavlja postojanje matematičkih predmeta*: brojeva, funkcija, skupova, geometrijskih likova, itd. Isto kao što, na primjer, diskurs fizike implicira postojanje predmeta fizike; elektrona, atoma i kvarkova; ili kao što diskurs sociologije implicira postojanje grupa, klasa, itd., tako i matematički diskurs implicira postojanje brojeva, funkcija, skupova, geometrijskih likova, itd. Naš je matematički diskurs *realistički*. To znači da način na koji govorimo o matematičkim predmetima implicira da su oni nešto što postoji neovisno o nama i o činjenici da o njima mislimo i govorimo. Što zapravo pokazuje činjenica da je naš matematički diskurs realistički? Budući da se radi samo o načinu na koji govorimo, ova činjenica možda i nema neku veliku težinu.[16] Ipak, ona barem *prima facie* podržava platonizam. Platonist smatra da je prirodno pretpostaviti da doista postoje matematički predmeti, da rečenice matematike govore o njima i da su oni to što ih čini istinitima. Drugim riječima, da postoji posebna *matematička stvarnost* koju rečenice matematike odražavaju, opisuju ili izražavaju i koja postoji neovisno o tim rečenicama i o nama koji ih izričemo. Kada rečenice matematike ne bi odražavale matematičku stvarnost, zašto bi onda matematički diskurs bio realistički? Mora biti da postoji neki razlog zbog kojega on jest realistički i zbog kojega nas ontološki obvezuje na postojanje matematičkih predmeta. Platonist smatra da očiti odgovor jest da matematički predmeti doista postoje. Drugim riječima, smatra da pretpostavka da postoji matematička stvarnost naprosto jest *najbolje objašnjenje* činjenice da je naš matematički diskurs realistički. Kada matematika ne bi odražavala nekakvu objektivnu i neovisno postojeću stvarnost, njezin diskurs ne bi bio realistički. Jasno, realistički karakter matematičkog diskursa može se smatrati i potporom fizikalizmu, jer je fizikalizam isto realistička pozicija.[17]

Međutim, i fikcionalizam, koji u potpunosti negira postojanje bilo kakvih matematičkih predmeta, može ponuditi prilično plauzibilno objašnjenje činjenice da je matematički diskurs realistički.[18] Objašnjenje se svodi na *analogiju s igrama ili književnim djelima*. Fikcionalist smatra da je pitanje o postojanju brojeva u principu iste vrste kao i pitanje o postojanju figura u šahu ili karata u briškuli ili pokeru.[19] Da li postoji sedmica herca? Postoji! Da li postoje lovac i kraljica? Postoje! Da li postoji duja baštoni? Postoji! *Broj 5 postoji na isti način na koji postoji laufer ili duja baštoni.* Funkcije i skupovi postoje na isti način na koji postoji tref ili karo. Oni postoje u istom smislu i jednako su »realni«. To da 2+2=4 istinito je u istom smislu u kojem je istinito i da je Odisej bio kralj Itake ili da se Ana Karenjina bacila pod vlak.[20]

13

Fizikalizam je očito realistička pozicija, jer fizičke činjenice jesu nešto što je očito neovisno o nama (osim u idealističkim filozofskim sistemima u kojima su i fizičke činjenice nešto na ovaj ili na onaj način svoje postojanje duguje nama). Ipak, moglo bi se tvrditi da fizikalizam nije realistička pozicija u punom i pravom smislu jer, prema fizikalizmu, matematička stvarnost nije nešto što postoji *sui generis*, to jest, samo po sebi, neovisno o bilo kakvoj drugoj stvarnosti. Drugim riječima, fizikalizam je *redukcionistička* i *eliminativistička* pozicija u pogledu matematičke stvarnosti. U tom bi smislu jedino platonizam bio nedvojbeno realistička pozicija u filozofiji matematike.

14

Prilično je rasprostranjeno gledište da između filozofije i znanosti u principu nema razlike. Način na koji je organizirano ovo poglavlje očito govori u prilog toj tezi; s jedne strane, izloženo je pet teorija ili hipoteza o prirodi matematike; s druge strane, izložene su činjenice (ili navodne činjenice) matematike koje te hipoteze moraju objasniti. Tražimo teoriju koja može objasniti sve ili barem većinu činjenica – tu treba prihvatiti, a ostale odbaciti. Ne funkcionira li i sama znanost na isti način? I u znanosti prihvaćamo onu teoriju koja najbolje objašnjava najveći broj relevantnih činjenica. Razlika između filozofije i znanosti bila bi isključivo u stupnju općenitosti i apstraktnosti, ali ne i u vrsti znanja. Isto vrijedi i za čitav niz rasprava u filozofiji, različite teorije o odnosu uma i tijela, ili različite meta-etičke teorije – samo su vrlo općenite hipoteze kojima se nastoji objasniti skup relevantnih činjenica. Jasno, često se raspravlja o tome koje su činjenice relevantne i jesu li uopće činjenice.

15

Izraz »ontološka obveza« prijevod je engleskog izraza »ontic commitment«.

16

Carnap je čak mislio da nema nikakvu težinu, to jest, da nas činjenica da je naš diskurs o apstraktnim entitetima realistički ne obvezuje ni na što. Upravo je u ovom kontekstu formulirao svoj poznati *princip tolerancije*: budimo oprezni u tvrđenju i kritički u razmatranju, ali tolerantni u dozvoljavanju jezičkih oblika (u članku »Empiricism, semantics, and ontology« iz 1950.).

17

Ipak, matematički je diskurs *sav* realistički, a pitanje je da li je moguće dati fizičku interpretaciju svega o čemu matematika govori. Gdje su u prirodi beskonačno velike ili beskonačno male veličine, i kako ih spoznajemo, ako uopće postoje? Stoga izgleda da realistički karakter matematičkog diskursa bolje podržava platonističku hipotezu.

18

Jasno, na isto objašnjenje mogu se oslanjati i nominalizam i konceptualizam.

19

Ovo rješenje vrlo lijepo i jasno zastupa R. L. Goodstein u članku »Postojanje u matematici« iz 1968., prevedenom i objavljenom u zborniku Zvonimira Šikića *Novija filozofija matematike*.

20

Primjer kojega razmatra Hartry Field jest da je istina da je Oliver Twist živio u Londonu; Field, 1989, str. 3–5.

Ontološka obveza matematike jednaka je ontološkoj obvezi šaha, briškule, pokera, romana ili filma. Radi se o *postojanju u okviru konvencije*. Sasvim je jednostavno objasniti takvo minimalno postojanje, ono je *ontološki potpuno bezazleno*. Entiteti matematike jednako su »realni« kao i entiteti šaha, briškule, epa ili drame. Pravila zbrajanja jednako su »realna« kao i pravila rukometa ili kriketa. I jedna i druga isključivo su stvar konvencije. Dojam da je matematika »realnija« od igara isključivo je stvar rasprostranjenosti. Kada bi se briškula podučavala u svim školama od prvoga osnovne, i studirala na svim sveučilištima, isto bismo tako imali dojam da je duja baštoni ipak na neki način realna i da ne može biti samo produkt naše konvencije. Razlika je sociološka i psihološka, ne ontološka. Jasno, pitanje je jesu li brojevi, skupovi i funkcije u matematici realni u istom smislu u kojem je realan lovac u šahu, duja baštoni u briškuli, glavni lik u romanu ili meksičkoj sapunici? Postoje li oni na isti način? Ako ne, onda antirealističke pozicije u filozofiji matematike ne mogu dati zadovoljavajuće objašnjenje činjenice da je naš matematički diskurs realistički i činjenice da su barem neki od nas uvjereni da entiteti matematike ipak na neki način postoje. Ako je analogija ipak održiva, onda je ontologija matematike uspješno riješena na vrlo jeftin način.

2.2. Apriornost i imunost na empirijsko opovrgavanje

Matematika ima nemjerljivu primjenu u svakodnevnom životu; od bankomata i tržnice do inženjerskih proračuna. Smatra se i da je nastala kao empirijska aktivnost premjeravanja zamljišta nakon poplave Nila u starom Egiptu. Međutim, kako u pravilu izgleda matematičko istraživanje? *Je li ono empirijsko?* Da li se odvija u prirodi ili u laboratoriju? Postoje li možda eksperimenti koji potvrđuju ili opovrgavaju matematičke teoreme?[21] Ne, barem *prima facie*, matematičko istraživanje *nije iskustveno*. Napredak matematike odvija se u radnim sobama, a ne na terenu ili u laboratorijima, čistim mišljenjem, a ne iskustvom. Imamo dojam da je matematika *neovisna o iskustvu*. Na koncu, i filozofi su stoljećima matematiku smatrali paradigmom čisto razumske, *a priori* spoznaje. Ako je to točno, fizikalizam je naprosto neistinit; matematika ne može biti empirijska znanost. Ostale filozofske teorije o prirodi matematike barem *prima facie* objašnjavaju tu karakteristiku matematike, ili su barem kompatibilne s njom. Fikcionalizam: matematika je korisna fikcija koju stvaramo razumom. Nominalizam: definicije zadajemo razumom a ne iskustvom. Konceptualizam: principe mišljenja otkrivamo neovisno o iskustvu, eventualno introspekcijom. Platonizam: čistim mišljenjem zapravo percipiramo *sui generis* matematičku stvarnost.

Velik broj autora smatra da su istine matematike u potpunosti imune na empirijsko opovrgavanje fizičkim protuprimjerima; da ih nikakve fizičke činjenice ne mogu učiniti neistinitima. Ako je tomu doista tako, to znači da matematika uopće ne govori o fizičkom svijetu i da fizički predmeti nisu ono što matematiku čini istinitom. Kada se pitamo što neku rečenicu čini istinitom, opće je pravilo da ju *može učiniti istinitim samo ono što ju može učiniti i neistinitim*. Ako ju neka vrsta činjenica ne može učiniti neistinitim, onda ta rečenica uopće ne govori o toj vrsti činjenica, već o nečem drugom. Pretpostavka može biti *potvrđena* samo onom vrstom činjenica koje ju mogu *opovrgnuti*. Ako je za istinosnu vrijednost neke rečenice potpuno irelevantna bilo koja činjenica o pticama, onda ta rečenica uopće ne govori o pticama, itd. Isto vrijedi i za odnos istinitih rečenica matematike i fizičkih činjenica. Dakle, pitanje je mogu li fizičke činjenice opovrgnuti matematičke istine? Može li bilo kakva fizička činjenica pokazati da rečenica matematike nije istinita?

To da 2+2=4, to je istina o kamenju i kredama. Međutim, da li je istina o *svim* predmetima koji nas okružuju. Da li je to istina, na primjer, o volumenu plina? 2m^3 nekog plina i 2m^3 nekog drugog plina mogu dati više ili manje od 4m^3 plina. Isto može vrijediti i za težinu plina. *Što ćemo reći u tom slučaju?* Da 2+2 nije 4? Doista, u nekom smislu nije: volumen kojega smo dobili naprosto nije 4. Recimo, da smo dobili 2,5m^3. U tom bi slučaju 2+2 bilo 2,5. Dakle, u nekom bi smislu bila istina da 2+2=2,5. Međutim, *da li to pokazuje da nije istina da 2+2=4?* Da li ta činjenica opovrgava istinitost rečenice »2+2=4«? Poznato je iz fizike da se brzina svjetlosti ne može zbrajati: $c + c = c$, a ne $2c$. Da li to pokazuje da 1 + 1 nisu 2? Dakle, pitanje je može li išta što se dogodi u fizičkom svijetu biti protuprimjer matematičkoj istini, ili su, pak, matematičke istine potpuno imune na empirijsko opovrgavanje? Fizički predmeti uglavnom se ponašaju u skladu s istinama matematike. Protuprimjere bismo možda mogli proglasiti rijetkim odstupanjima od pravila i zanemariti ih. Međutim, pravo je pitanje što bi bilo kada se fizički predmeti *u pravilu* ne bi ponašali u skladu sa zakonima matematike? Da li bi i u toj situaciji matematika i dalje bila istinita? Ako bi, onda ona očito nije o fizičkim predmetima u iskustvenom svijetu, već o nečem drugom. Zamislimo slijedeću situaciju: brojimo fizičke predmete, recimo, krede. Uzmemo dvije i još dvije i, odjednom, imamo ih pet. Bile su dvije, i još dvije, a sada ih je pet. Kako bismo reagirali u takvoj situaciji? Što bismo mislili, što se dogodilo? Evo nekoliko mogućih objašnjenja:

1) Nismo dobro brojali.
2) Netko je dodao još jednu.
3) Haluciniramo (nismo se dovoljno naspavali, previše smo popili, netko nas je hipnotizirao, itd).
4) Još je jedna kreda nastala sama od sebe.
5) Zakon aritmetike nije istinit, činjenice su pokazale da 2+2 nisu 4.

Pitanje je koje bismo objašnjenje prihvatili. Što bismo prvo, a što posljednje doveli u pitanje? U što bismo imali više povjerenja, u zakone zbrajanja ili u svoju percepciju? Da li bismo zaključili da zakon aritmetike nije istinit, ili bismo smatrali da se dogodilo nešto drugo? Izgleda da je 5) najmanje vjerojatna mogućnost. U sve bismo drugo prije povjerovali nego u 5), osim možda u 4). Prije bismo odustali od vjerovanja do kojih smo došli percepcijom nego od matematičkih vjerovanja. Prije bismo posumnjali u vlastitu percepciju nego u zakone zbrajanja. U zakone zbrajanja možda uopće ne bismo posumnjali![22] Što biste prvo odbacili, što posljednje? Ako je zakon

21
Doduše, odluka između alternativnih geometrija čisto je empirijsko pitanje. Već je Gauss pokušao empirijski ustanoviti da li je fizički prostor u kojem živimo euklidski ili ne-euklidski. Istina, to mu nije uspjelo zbog premalih odstupanja koje nije mogao registrirati, ali njegov se pristup smatra u principu pravilnim.

22
Ovu je intuiciju, koliko je meni poznato, u obliku argumenta prvi izložio Ayer u knjizi *Language, Truth and Logic*, iz 1936., str. 101. On je htio pokazati da »stari empiristi« (J. S. Mill) nisu bili u pravu kada su matematičku spoznaju interpretirali kao empirijsku. Inače, niz je autora smatrao apsurdnom ideju da bi činjenice iskustva mogle opovrgnuti istine matematike, na primjer: Frege u *Osnovama aritmetike*, str. 33; Hahn u »Logic, Mathematics and Knowledge of Nature«, str. 150, itd.

aritmetike doista posljednje što biste odbacili, onda ste skloni stavu da su istine matematike imune na empirijsko opovrgavanje i da su fizičke činjenice zapravo irelevantne za istinitost matematike.

Imunost matematike na empirijsko opovrgavanje u pravilu se koristi kao argument protiv fizikalizma. Fizikalist je dužan tvrditi da kada bi 2 predmeta i 2 predmeta u fizičkoj stvarnosti bila 5 predmeta, da bi bila istina da 2+2=5, to jest, da bi trebalo revidirati matematiku kada se fizički predmeti ne bi ponašali u skladu sa zakonima matematike.[23] Prema fizikalizmu, matematičke istine zapravo *nisu* imune na empirijsko opovrgavanje; fizikalist poriče da matematičke istine doista imaju tu karakteristiku. S druge strane, zastupnici ostalih teorija smatraju da matematičke istine *jesu* imune na empirijsko opovrgavanje i tu karakteristiku objašnjavaju u skladu s teorijama koje zastupaju. Budući da, prema ostalim teorijama, matematika tako i onako ne govori o fizičkoj stvarnosti, jasno je da je bilo što što se događa u fizičkoj stvarnosti u potpunosti irelevantno za matematičke istine: kako bi istine o fizičkim predmetima mogle opovrgnuti naše fikcije (fikcionalizam), naše definicije (nominalizam), način na koji mislimo (konceptualizam) ili istine o posebnoj matematičkoj stvarnosti (platonizam)?

2.3. Nužnost

Istine matematike imaju još jedno svojstvo koje ih razlikuje od ostalih istina: one su *nužne*. To da 2+2=4, to ne samo da je istinito, to je *nužno* istinito, to *ne može* ne biti istinito. Mogu li 2+2 ne biti 4? Ne mogu! Ne samo da 2+2 *jesu* 4, oni *moraju* biti 4. Može li Pitagorin poučak ne biti neistinit? Ne može! On je, isto tako, *nužno* istinit. Može li π ne biti 3,14? Ne može! Omjer dijametra i opsega kruga nužno je 3,14. Itd. Pored istina matematike, smatra se da su nužne i istine logike. S druge strane, istine o fizičkim činjenicama *nisu nužne*; one su *kontingentne*, to znači da ne moraju biti istinite, da su mogle biti i neistinite. Na primjer; 23. 11. 2001. u 15^{oo} u Rijeci je padao snijeg. To je istina, u Rijeci je doista tada palo malo snijega. Međutim, da li je 23. 11. 2001. u 15^{00} u Rijeci morao pasti snijeg? Da li je to bilo nužno? Nije! Nije morao pasti, mogao je i ne pasti. Moglo je biti i lijepo vrijeme. Gravitacija je 9,81ms^2. I to je istina. Međutim, da li je to nužna istina? Nije! Da li je to moglo ne biti istinito? Moglo je! Ne samo da je moglo već na drugim planetima i jest. Gravitacija nije svuda jednaka. Na Mjesecu je manja, na Jupiteru veća. Čak ni na Zemlji nije svuda jednaka, na polovima je malo veća nego na ekvatoru. Međutim, 2+2 *uvijek su i svuda* 4, i *ne mogu* biti ništa drugo doli 4. Pitanje je *otkuda ta nužnost matematičkih istina*? *Kako to da matematika ne može biti drukčija nego što jest, a da sve ostalo može*? Stoga zadovoljavajuća filozofska teorija matematike mora dati odgovor na to pitanje. Dakle, mora ili objasniti nužnost matematičkih istina, ili pokazati da zapravo nisu nužne i objasniti kako to da imamo dojam da jesu nužne.

Platonizam, barem *prima facie*, nema problema s nužnošću. Budući da su matematički predmeti i odnosi među njima vječni i nepromjenjivi, istine matematike ne mogu biti drukčije nego što jesu, one moraju biti takve kao što jesu. Međutim, ovaj odgovor prije izgleda kao izbjegavanje odgovora nego kao pravi odgovor. Naime, ako su rečenice matematike nužno istinite zato što opisuju nužno istinitu platoničku matematičku stvarnost, postavlja se pitanje zašto je ta stvarnost nužna? Zašto ona ne bi mogla biti drukčija nego što jest? *Što nju čini nužnom?*

Nužnost je problem za fizikalizam.[24] Naime, iskustvom možda možemo spoznati da su rečenice matematike istinite, međutim, nije jasno kako bismo iskustvom mogli spoznati da su one *nužno* istinite? Možemo vidjeti ili opipati to da 2 predmeta i još 2 predmeta jesu 4 predmeta. Međutim, kako možemo vidjeti ili opipati to da 2 predmeta i još 2 predmeta nužno jesu 4 predmeta? Prema tome, nužnost toga da 2+2=4 nije u fizičkom svijetu i ne možemo je spoznati iskustvom. Nužnost matematičkih istina mora se nalaziti negdje drugdje. Kant je, na primjer, smatrao da je nužnost u našim glavama, a ne u samim stvarima. Pored toga, prema fizikalizmu, istine matematike zapravo su induktivne generalizacije, isto kao i istine fizike. Međutim, induktivne generalizacije ne mogu biti *nužno istinite*. One samo mogu biti više ili manje *vjerojatne*. Premise induktivnog zaključka uvećavaju vjerojatnost konkluzije, ali je ne mogu konkluzivno dokazati.

a_1 je P	
a_2 je P.	
	Svi a su P.
a_n je P	Ovaj predmet je a.
Svi a su P.	Ovaj predmet je P.

U induktivnom zaključku moguće je da premise budu istinite, a da konkluzija ne bude istinita, dok u deduktivnom zaključku to nije moguće: ako su premise istinite, onda i konkluzija mora biti istinita. *U induktivnom zaključku uvijek je moguće da buduće iskustvo pokaže da postoje neki a koji nije P.* Iako su svi do sada pregledani labudovi bili bijeli, moguće je da će su ubudućnosti ispostaviti da neki nisu. Međutim, je li tako i u slučaju matematike? Iako su 2+2 uvijek do sada bila 4, da li je moguće da se u budućnosti naiđemo na slučajeve u kojima 2+2 nije 4? Čvrsto vjerujemo da tako što nije moguće. Vjerujemo da 2+2 nužno jesu 4, i da nije moguće da bilo kakvo buduće iskustvo pokaže da 2+2 nisu 4. U tome je razlika između induktivnih generalizacija i istina matematike i zbog toga istine matematike ne mogu biti inuktivne generalizacije.

P1: Induktivne generalizacije nisu nužne.
P2: Istine matematike jesu nužne.

K: Prema tome, istine matematike ne mogu biti induktivne generalizacije.

Međutim, prema fizikalizmu, istine matematike zapravo i nisu nužne.[25] Dojam da jesu nužne stječemo iz njihove rasprostranjenosti i općevaljanosti u fizičkom svijetu. Razlika u nužnosti između istina fizike i istina matematike

23
Jasno, moglo bi se tvrditi da je takva situacija potpuno nemoguća i nezamisliva, te da zbog toga ne treba ni pokušati odgovoriti na ovakvo pitanje. Sitacija doista jest nemoguća i nezamisliva, ali pitanje je zapravo što ju čini nemogućom i nezamislivom: jesu li to zakoni našeg mišljenja, zakoni fizičke stvarnosti, ili nešto treće?

24
Vidi, na primjer, Kant *Kritika čistoga uma*, dodatak II. On smatra da nužnost i stroga općenitost matematičkih sudova nedvojbeno pokazuju da matematička spoznaja ne može biti iskustvena.

25
J. S. Mill je smatrao da istine matematike zapravo nisu nužne i da nužnost koju se pripisuje istinama matematike predstavlja *iluziju*; vidi: *A System of Logic*, Vol. I, Book II, Chapter V.

samo je u stupnju, a ne u vrsti. Istine matematike sveobuhvatnije su i duže su nam poznate, otuda dojam da su one nužne. U čemu bi se mogla sastojati principijelna razlika između Pitagorina poučka i Arhimedova zakona poluge? Zar je $a^2 + b^2 = c^2$ nužno, a $F_1 \bullet k_1 = F_2 \bullet k_2$ nije nužno? Ako između ova dva zakona ima ikakve razlike u *modalnom statusu*, onda je ona samo u stupnju, a nije i ne može biti u vrsti. Pored toga, fizikalist smatra da i matematika *u principu* podliježe iskustvenoj reviziji, on to smatra normalnim. Ono što matematiku čini istinitom to su fizičke činjenice, i kada bi one bile drukčije i matematika bi bila drukčija. Kada bi u fizičkom svijetu 2+2 uvijek bilo 3, onda bi i u matematici 2+2 bilo 3. *De facto* je istina da 2+2=4, međutim, *u principu* je moguće da to ne bude tako. Kada se keramičke pločice, tapisoni i njive ne bi ponašali u skladu s Pitagorinim teoremom, on naprosto ne bi bio istinit. Bilo kakva nadempirijska i nadfizička nužnost koja se pripisuje matematici čista je iluzija.

Nužnost je problem i za nominalizam. Naime, jezik je *konvencija*; riječi nisu morale značiti to što znače, mogle su značiti i nešto drugo. S druge strane, čini nam se da matematika nije stvar konvencije. Matematika je nužna. Prema tome, istine matematike ne mogu biti istine jezika.

P1: Istine jezika nisu nužne.

P2: Istine matematike jesu nužne.

K: Prema tome, istine matematike ne mogu biti istine jezika.

Dakle, pitanje je može li nominalist objasniti nužnost matematičkih istina. Može li konvencija objasniti nužnost? Nominalist smatra da može, i to na slijedeći način.[26] Istina je da izrazi »2«, »+«, »=« i »4« nisu morali značiti to što znače. Mogli su značiti i nešto drugo. Međutim, *ako* znače to što znače, *onda* je nužno istinito da 2+2=4. *Kada* ti izrazi jednom znače to što znače, *onda* više ne može ne biti istina da 2+2=4. Isto tako, riječ »ujak« nije morala značiti »brat od majke«, mogla je značiti i nešto drugo. Međutim, *ako* »ujak« znači »brat od majke«, *onda* je nužno istinito da ujak jest brat od majke. To je smisao u kojem su naše definicije nužno istinite. Značenja riječi u jeziku jesu arbitrarna, ona jesu stvar konvencije. Međutim, *kada jednom* znače to što znače, odnosi između njih više nisu stvar konvencije, već stvar nužnosti. To je način na koji nominalizam objašnjava nužnost matematičkih istina. Ovo rješenje može izgledati prilično prihvatljivo, međutim, pitanje je da li je doista održivo. *Značenje simbola koje koristimo jest arbitrarno, ali relacije koje njima izričemo nisu arbitrarne.*

Ako bismo, na primjer, odlučili da od sada pa na dalje »3« znači ono što je do sada značilo »4«, onda bismo zapravo rečenicom »2+2=3« izrekli *isto* što smo do sada izricali rečenicom »2+2=4«. Te bi dvije rečenice zapravo imale *isto značenje*; brojka »3« naprosto bi značila ono što sada znači brojka »4«. U nekom bi trivijalnom smislu od sada pa na dalje bila istina da 2+2=3, ali samo zato što bi brojka »3« zapravo značila »4«, to jest, samo zato što bi i dalje bila istina da 2+2=4. I dužina metra isto je tako stvar konvencije. Mi možemo odlukom skratiti metar. Time bi, na primjer, brod dugačak 7 m postao dugačak, recimo, 11 metara. To bi onda bila istina na osnovi konvencije o dužini metra, ali brod bi i dalje bio jednako dugačak. Ako bismo odlučili da, od sada pa nadalje, riječ »ujak« znači ono što je do sada značila riječ »stric«, time bi u trivijalnom smislu postala istina da je stric brat od majke, ali time ujaci ne bi postali stričevi. Majčina braća ne bi promjenom jezičke konvencije postala očeva braća. Ako je to tako, dakle, ako relacije koje se izražavaju matematičkim simbolima nisu arbitrarne, onda pored značenja termina mora postojati *još nešto* što matematiku čini istinitom. To moraju biti nekakve objektivne činjenice ili relacije koje postoje neovisno o značenju termina u našem jeziku. U tom slučaju, ne samo da nominalizam ne može objasniti nužnost matematike već ne može objasniti niti njezinu istinitost.

Konceptualist nužnost objašnjava *psihološki*. Ono zbog čega je *nužno* istinito da 2+2=4 jest činjenica: mi *ne možemo zamisliti* da 2+2 nisu 4. Dakle, nužnost matematičkih istina svodi se na činjenicu da mi ne možemo zamisliti da su njihove negacije istinite. Uostalom, nužno su istinite upravo one rečenice čije su negacije kontradikcije. Što je drugo kontradikcija doli rečenica za koju ne možemo zamisliti da je istinita? Konceptualist smatra da nužnost matematičkih istina nije nešto objektivno i neovisno o nama, već se svodi na psihološku nužnost – činjenicu da ne možemo zamisliti suprotno. Jasno, pitanje je može li se nužnost objasniti psihološki? Kada govorimo o nužnosti matematičkih istina, imamo dojam da se radi o nečem objektivnom što ne može ovisiti o strukturi našeg mišljenja. Imamo dojam da 2+2 mora biti 4, bez obzira što mi možemo, a što ne možemo zamisliti.

2.4. Uzročna izoliranost platoničkih predmeta

Osnovni problem s platonizmom u matematici, isto kao i s platonizmom općenito, jest u tome što *nije jasno* kakvi su ti navodni idealni matematički predmeti. Na koji način oni postoje? Gdje su? Lako je reći da nešto postoji *izvan* vremena i *izvan* prostora, papir trpi sve. Međutim, što to točno znači? Može li uopće nešto postojati, a da nije *u* vremenu i *u* prostoru? Gdje je onda? Nigdje? Razumijemo govor o postojanju fizičkih trodimenzionalnih predmeta koji imaju nekakvu dimenziju i koje se nalaze negdje. Međutim, kako shvatiti tvrdnju da nešto postoji *izvan* vremena i *izvan* prostora? Pazite, tu se ne radi o metafori. To se tvrdi *u doslovnom smislu*. Dakle, problem je *ontološki*: kako nešto takvo može postojati? Ali isto tako i *epistemološki*: kako možemo spoznati nešto takvo? Mi smo *u* vremenu i *u* prostoru, isto kao i znanje koje posjedujemo. *Kako onda možemo biti u kontaktu* s nečim što je navodno *izvan* vremena i *izvan* prostora?[27] Da bismo spoznali neki predmet, moramo s njim biti u nekoj vrsti *uzročne veze*: da bismo ga spoznali on mora nekako *djelovati* na nas (ili barem davati nekakav otpor kada mi djelujemo na njega). Sve stvari koje vidimo i čujemo nekako djeluju na nas. Kada ne bi nikako djelovale, ne bismo ih ni vidjeli niti čuli. Dakle, sve što znamo, znamo na temelju nekakve *uzročne veze*. Problem s platoničkim entitetima jest u tome što bi oni, čak i kada bi postojali, bili potpuno *uzročno izolirani* od svega ostaloga te stoga ne bi bilo načina na koji bismo ih mogli spoznati. Naprosto, nije jasno kako bi nešto što je *izvan*

26
Na primjer, Ayer u *Language, Truth and Logic*, str. 84.

27
Rješenje što ga nudi Platon vrlo je poznato iz literature, ali doslovno shvaćeno potpuno je neprihvatljivo. Naime, u dijalogu *Fedon* (75 *d* i *e*) Platon tvrdi da duša prije nego što se inkarnira u tijelo boravi u svijetu ideja i da ih tamo spoznaje, pa ih se onda prisjeća (anamnezis) kada ih, inkarnirana u tijelo, prepozna u fizičkim predmetima. Doduše, ima neke plauzibilnosti u tvrdnji da u nesavršenim fizičkim predmetima na neki način prepoznajemo idealne obrasce, na primjer, geometrijske oblike. Ipak, time je Platon samo ukazao na problem, ali nije ni naznačio u kojem pravcu treba tražiti rješenje.

vremena i *van* prostora moglo djelovati na nešto što je *u* prostoru i *u* vremenu. Dakle, apsurdna posljedica platonizma jest da matematičko znanje nije moguće. Budući da matematičko znanje očito postoji, treba odbaciti platonizam. Drugim riječima, *platonizam ne može objasniti matematičku spoznaju*. Ovo je vrlo jak i razoran argument protiv platonizma i jasno ukazuje na općenitu neplauzibilnost te pozicije.[28] Argument izgleda ovako:

P1: Matematički su predmeti apstraktni (platonistička pretpostavka).

P2: Apstraktni predmeti ne mogu uzročno djelovati.

P3: Možemo spoznati samo ono što može uzročno djelovati na nas (uzročna teorija znanja).

K: Ne možemo spoznati matematičke predmete.

Budući da je konkluzija očito apsurdna, budući da matematička spoznaja očito postoji, treba odbaciti jednu od premisa. Pitanje je koju? Jasno, protivnici platonizma smatraju da treba odbaciti P1 – platonističko shvaćanje predmeta matematike. S druge strane, platonisti smatraju da je bolje odbaciti P2 ili P3. Dakle, *ili* tvrditi da i predmeti izvan vremena i izvan prostora mogu uzročno djelovati na nas, *ili* odbaciti uzročnu teoriju znanja – tvrditi da možemo spoznati i predmete s kojima nismo ni u kakvoj uzročnoj vezi.[29] Budući da predmeti koji se navodno nalaze »izvan vremena i prostora« po definiciji ne mogu uzročno djelovati na nas, prva opcija otpada. Isto tako otpada i druga, jer istinito vjerovanje da *p* ne može biti znanje, ako nije ni u kakvoj vezi s činjenicom da *p*. Ono u najboljem slučaju može biti slučajno istinito, a slučajno istinito vjerovanje ne može biti znanje. Dakle, pitanje je koju premisu u argumentu treba odbaciti; može li platonizam objasniti matematičku spoznaju; možemo li spoznati nešto s čime nismo u uzročnom kontaktu? Ako doista ne možemo imati znanje o nečemu o čemu nismo u uzročnom kontaktu, najbolje je priznati da platonizam ne može objasniti činjenicu da imamo matematičko znanje i jednostavno odbaciti platonističku ontologiju u matematici.

Jasno, to otvara prostor za ostale teorije u filozofiji matematike: fizikalizam, nominalizam, fikcionalizam i konceptualizam nemaju problema s uzročnom izoliranošću predmeta matematike.

Boran Berčić

Why 2+2=4?

The starting point of this article is the *ontological* question: What makes it true that 2+2=4?, that is, what are the *truth makers* of mathematical propositions? Of course, the satisfactory theory in the philosophy of mathematics has to answer *semantical* question: What are mathematical propositions about? Also, *epistemological* question: How do we know them?, as well. Author compares five theories in the philosophy of mathematics, that is, five accounts of the nature of truth makers in mathematical discourse: *fictionalism* (there are no truth makers because entities of mathematics are fictions, though useful fictions); *nominalism* (mathematical propositions are true by definition, so the truth makers are in the language); *physicalism* (mathematical propositions are inductive generalizations from experience, so, the truth makers are physical facts in the world); *conceptualism* (mathematics reflects the way we think about things, so, the truth makers are ultimately psychological facts) and *Platonism* (mathematics is about *per se* existing mathematical reality).

28
Iako je više nego jasno da je objašnjenje uzročnog utjecaja platoničke stvarnosti na naša vjerovanja nerješiv ili barem vrlo težak problem za platonizam, izgleda da je prvi autor koji je ozbiljno ukazao na taj problem bio Paul Benacerraf, u članku »Mathematical Truth« iz 1973. Stoga se ovaj problem za platonizam u matematici naziva *Benacerraf problem*.

29
Možda najpoznatiji suvremeni zastupnik platonizma u matematici, James Robert Brown, uzročnu teoriju znanja odbacuje kao neistinitu. Pritom se oslanja na samo jedan primjer u kojem navodno postoji znanje o činjenici bez uzročne veze s tom činjenicom, to je poznati eksperiment Einsteina, Podolskog i Rosena. – *Philosophy of Mathematics* iz 1999., str. 16, 17.